Даниел Велинов
Градежен факултет, Скопје

ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ ВО ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Во овој дел ќе бидат разгледани некои основни тврдења за деливоста на природните броеви и ќе бидат дадени некои задачи кои ги илустрираат овие тврдења.

За бројот m велиме дека е делител на бројот n, ако постои природен број k, таков што $n = km$. Запишуваме $m \mid n$. Ако бројот m не е делител на n, запишуваме $m \nmid n$.

Пропозиција. Нека $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Тогаш

1) $x \mid x$
2) $x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$
3) $x \mid y \wedge y \neq 0$, тогаш $|x| \leq |y|$
4) $x \mid y \wedge x \mid z$, тогаш $x \mid \alpha y + \beta z$, за $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
5) $x \mid y \wedge x \mid y \pm z \Rightarrow x \mid z$
6) $x \mid y \wedge y \mid x$, тогаш $|x| = |y|$
7) $x \mid y,\ y \neq 0$, тогаш $\frac{y}{x} \mid y$
8) $z \neq 0,\ x \mid y$ ако и само ако $xz \mid yz$.

Теорема. За секои $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, постои единствен пар од природни броеви (q, r), така што $b = aq + r$, $r < a$. За q велиме дека е количник, додека за r велиме дека е остаток при делењето на b со a.

За $p > 1$, велиме дека е прост број ако не постои $d \in \mathbb{N}$, $d > 1 \wedge d \neq p$, така што $d \mid p$. Во спротивно велиме дека p е сложен број. Бројот 1 е ниту прост, ниту сложен број. Ако n е сложен број, тогаш n има прост делител кој не надминува $\sqrt{n}$. Навистина, $n = pq$, $p \geq q$, тогаш $n \geq q \cdot q = q^2$, од каде $q \leq \sqrt{n}$.

Теорема. (Основна теорема во аритметиката) Секој природен број $n > 1$ има единствена репрезентација $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, каде $p_1, p_2, \ldots, p_k$ се прости броеви.

Теорема. Постојат бесконечно многу прости броеви.

Последица. Нека $a,b\in\mathbb{N}$. Ако p е прост и $p\,|\,ab$, тогаш $p\,|\,a$ или $p\,|\,b$. За прост број p, велиме дека p^k целосно го дели n, пишуваме $p^k\,\|\,n$ ако k е најголемиот природен број така што $p^k\,|\,n$, т.е. $p^k\,|\,n$ и $p^{k+1}\nmid n$.

Теорема. За било кој природен број m, не постои полином $P(x)$ со цели коефициенти така што $P(n)$ е прост за сите природни броеви $n\geq m$.

За броевите a и b велиме дека се конгруентни по модул m, запишуваме $a\equiv b(\bmod m)$ ако и само ако $m\,|\,a-b$.

Теорема. Нека $a,b,c,d,m\in\mathbb{N}$. Тогаш

1) $a\equiv a(\bmod m)$
2) Ако $a\equiv b(\bmod m)$ и $b\equiv c(\bmod m)$, тогаш $a\equiv c(\bmod m)$
3) Ако $a\equiv b(\bmod m)$, тогаш $b\equiv a(\bmod m)$
4) Ако $a\equiv b(\bmod m)$ и $c\equiv d(\bmod m)$, тогаш $a+c\equiv b+d(\bmod m)$ и $a-c\equiv b-d(\bmod m)$
5) Нека $a\equiv b(\bmod m)$ и $k\in\mathbb{N}$. Тогаш $ka\equiv kb(\bmod m)$
6) Ако $a\equiv b(\bmod m)$ и $c\equiv d(\bmod m)$, тогаш $ac\equiv bd(\bmod m)$ и $a^k\equiv b^k(\bmod m)$. Поопшто, ако $a_i\equiv b_i(\bmod m)$, $i=1,2,...,k$, тогаш $a_1a_2\cdot...\cdot a_k\equiv b_1b_2\cdot...\cdot b_k(\bmod m)$
7) $a\equiv b(\bmod m)$, $i=1,2,...,k$ ако и само ако $a\equiv b(\bmod H.З.C(m_1,m_2,...,m_k))$.

Пропозиција. Нека $a,b,n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$, така што $a=nq_1+r_1$, $b=nq_2+r_2$, $0\leq r_1,r_2\lhd|n|$. Тогаш $a\equiv b(\bmod n)$ ако и само ако $r_1=r_2$.

Последица. Нека p е прост број и $x,y\in\mathbb{N}$, $xy\equiv 0(\bmod p)$. Тогаш или $x\equiv 0(\bmod p)$ или $y\equiv 0(\bmod p)$ или важат и двете.

Последица. Нека $m\in\mathbb{N}, a,b,c\in\mathbb{Z}, c\neq 0$. Ако $ac\equiv bc(\bmod m)$, тогаш $a\equiv b\left(\bmod\dfrac{m}{НЗД(c,m)}\right)$.

Последица. Нека $m\in\mathbb{N}, a,b\in\mathbb{Z}, НЗД(a,m)=1$. Ако за $a_1,a_2\in\mathbb{Z}$, важи $a_1\not\equiv a_2(\bmod m)$, тогаш $a_1a\equiv a_2a(\bmod m)$.

Последица. Нека $m \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, $НЗД(a,m) = НЗД(b,m) = 1$. Ако $x, y \in \mathbb{Z}$, такви што $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ и $a^y \equiv b^y \pmod{m}$, тогаш

$$a^{НЗД(x,y)} \equiv b^{НЗД(x,y)} \pmod{m}.$$

Теорема. (Теорема на Вилсон) Нека p е прост број. Тогаш

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Теорема. (Мала Теорема на Ферма): Нека $a \in \mathbb{N}$ и p е прост број. Тогаш

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Теорема. (Теорема на Ојлер). Нека a и m се релативно прости природни броеви и нека $\varphi(n)$ е Ојлеровата функција, односно бројот на сите броеви помали од n, кои се заемно прости со n. Тогаш

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

1. (BMO 2016, Problem 5) Најди ги сите парови природни броеви (m,n) за кои $(m+n)^2 \mid 2n(3m^2+n)^2 + 8$.

   Решение. Нека претпоставиме дека количникот на $2n(3m^2+n^2)+8$ при делењето со $(m+n)^3$ е природен број кој е поголем од 1. Нека количникот е најмалку 2. Тогаш, имаме,

$$(m+n)^3 \le n(3m^2+n^2)+4$$
$$m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \le 3m^2n + n^3 + 4$$
$$m^3 + 3mn^2 \le 4.$$

   Од овде $m < 2$, односно $m = 1$. Имаме, $1 + 3n^2 \le 4$, од каде добиваме дека $n = 1$. Јасно, оттука парот $(1,1)$ е решение на задачата бидејќи $2^3 \mid 2(3 \cdot 1^2 + 1^2) + 8$ важи.

   Останува уште можноста количникот да биде 1. Тогаш имаме,

$$(m+n)^3 = 2n(3m^2+n^2)+8$$
$$m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = 6m^2n + 2n^3 + 8$$
$$m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 = 8$$
$$(m-n)^3 = 8.$$

Па, имаме $m-n=2$, или $m=n+2$. Јасно е дека сите парови од облик $(m,n)=(n+2,n)$ се решенија на задачата. Значи сите парови кои се решение на задачата се $(m,n)=(1,1)$ и $(m,n)=(n+2,n)$.

2. (TST 2, Nederland 2016, Problem 2) Најди ги сите парови (a,b) од природни броеви со следново својство: постои природен број $d \geq 2$ таков што a^n+b^n+1 е деливо со d за секој природен број n.

Решение. Нека (a,b) е пар кој е делив со некое d. Нека p е прост делител на d (постои такво p, бидејќи $d \geq 2$). Бидејќи $d \mid a^n+b^n+1$ за сите n, имаме дека $p \mid a^n+b^n+1$ за сите n. Нека $n=p-1$. Тогаш $a^n \equiv 0 \pmod{p}$ ако $p \mid a$ и $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ ако $p \nmid a$ (Теорема на Ферма). Аналогно важи и за b. Тогаш a^n+b^n+1 може да ги прими вредностите $1,2,3$ по модул p. Од друга страна, a^n+b^n+1 мора да биде деливо со p, па мора $p=2$ или $p=3$. Ги разгледуваме двата случаја:

Случај 1: Нека $p=3$. Тогаш мора $3 \nmid a$ и $3 \nmid b$. Од случајот $n=1$ имаме дека $3 \mid a+b+1$, па $a+b \equiv 2 \pmod{3}$. Ова заедно со $3 \nmid a$ и $3 \nmid b$ е еквивалентно со $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$. Во овој случај, ова е точно за сите природни броеви n, па имаме $a^n+b^n+1 \equiv 1+1+1 \equiv 0 \pmod{3}$, па таков пар го задоволува условот на задачата, каде $d=3$.

Случај 2: Нека $p=2$. Тогаш 2 мора да биде делител на точно еден од a и b. Во овој случај имаме дека за сите природни броеви n, важи $a^n+b^n+1 \equiv 0+1+1 \equiv 0 \pmod{2}$, па таков пар го задоволува условот на задачата, каде $d=2$.

Значи сите парови кои го имаат својството на задачата се: (a,b) каде $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$, $d=3$, (a,b) каде $a \equiv 1 \pmod{2}$, $b \equiv 0 \pmod{2}$ и (a,b) каде $a \equiv 0 \pmod{2}$ и $b \equiv 1 \pmod{2}$.

3. (IMO 2015, Shortlist N2) Нека a и b се природни бреови такви што $a!+b! \mid a!b!$. Докажи дека $3a \geq 2b+2$.

Решение. Ако $a>b$, веднаш добиваме дека $3a \geq 2b+a$. Во случајот кога $a=b$, неравенството кое треба да се докаже добива облик $a \geq 2$, што е точно бидејќи $(a,b)=(1,1)$ не задоволува $a!+b! \mid a!b!$. Сега претпоставуваме дека $a<b$ и означуваме $c=b-a$. Бараното неравенство добива облик $a \geq 2c+2$.

Да претпоставиме спротивно, односно нека $a \le 2c+1$. Дефинираме $M=\frac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+c)$. Бидејќи $a!+b! \mid a!b!$, имаме $1+M \mid a!M$, од каде добиваме дека мора $1+M \mid a!$. Мора $c<a$, инаку $1+M>a!$, што е во контрадикција со $1+M \mid a!$. Да забележиме дека $c! \mid M$, бидејќи M е производ од c последователни природни броеви. Следува $Н.З.Д(1+M,c!)=1$, од каде следува

$$1+M \mid \frac{a!}{c!}=(c+1)(c+2)\cdot\ldots\cdot a \tag{1}$$

Ако $a \le 2c$, тогаш $\frac{a!}{c!}$ е производ од $a-c \le c$ природни броеви помали од a, каде M е производот на c природните броеви поголеми од a. Тогаш $1+M>\frac{a!}{c!}$, што е контрадикција.

Останува уште да го исклучиме случајот кога $a=2c+1$. Бидејќи $a+1=2(c+1)$ имаме $c+1 \mid M$. Следува од (1) дека $1+M \mid (c+2)(c+3)\cdot\ldots\cdot a$. Сега $(c+2)(c+3)\cdot\ldots\cdot a$ е производ од $a-c-1=c$ природни броеви кои се помали од a, следува производот е помал од $1+M$, што е контрадикција.

4. (TST 1, Belarusian Mathematical Olympiad, 2016,Problem 3) Реши ја равенката $p^3-q^3=pq^3-1$, каде p и q се прости броеви.

Решение. Да забележиме дека $q \le p$. Во спротивно левата страна на равенката ќе биде негативна, додека десната страна на равенката ќе биде позитивна, што е контрадикција. Имаме,

$$p^3-q^3=pq^3$$

$$p^3+1=pq^3+q^3$$

$$(p+1)(p^2-p+1)=q^3(p+1)$$

$$p(p-1)=q^3-1$$

$$p(p-1)=(q-1)(q^2+q+1)\,.$$

Бидејќи $p \mid p(p-1)$, имаме $p \mid (q-1)(q^2+q+1)$. Но, $p \nmid q-1$, бидејќи $q-1<p$, па $p \mid q^2+q+1$ или $q^2+q+1=kp$, за $k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$p(p-1)=(q-1)kp$$

$$p-1=k(q-1)$$

$$p=k(q-1)+1\,.$$

Оттука,

$$q^2+q+1=kp$$

$$q^2+q+1=k^2(q-1)+k \qquad (2)$$

Ако $k>3$, имаме

$$q^2+q+1=k^2(q-1)+k,$$

па следува

$$(q-1)(q+2)+3=k^2(q-1)+k$$

$$(q-1)(q+2)-k^2(q-1)=k-3.$$

Следува,

$$q-1\,|\,k-3, \text{ од каде } k\geq q-1+3=q+2, \text{ па}$$

$$(q-1)(q+2)=k^2(q-1)+k-3\geq(q+2)^2(q-1)+q-1>(q-1)(q+2),$$

што е невозможно. Значи, немаме решенија кога $k>3$. Останува да ги провериме случаите кога $k=1,2,3$.

Нека $k=1$. Од (2) имаме $q^2+q+1=q$, односно $q^2+1=0$, што нема решенија во множеството прости броеви.

За $k=2$, од (2), имаме $q^2+q+1=4(q-1)+2$, од каде добиваме $q^2-3q+3=0$. Лесно се проверува дека оваа равенка нема решенија во множеството од прости броеви.

Нека $k=3$. Од (2), имаме $q^2+q+1=9(q-1)+3$, односно $q^2-8q+7=0$, од каде добиваме дека $q=1$ и $q=7$.

Бидејќи 1 не е прост број, па $q=7$ е решение, од каде $p=3(q-1)+1=19$.

Значи, единствено решение е $p=19$ и $q=7$.

5. (TST 2, Argentine national Olympiad, 2015, Problem 5) Најди ги сите прости броеви такви што p^3-4p+9 е полн квадрат.

Решение. Со директна проверка добиваме дека $p=2$ е решение. Навистина, $2^3-4\cdot 2+9=3^2$. Со проверка добиваме дека $p=3$ не е решение на проблемот. Нека сега $p>3$. Ако $p^3-4p+9=n^2$, за некое $n\in\mathbb{N}$, тогаш $p^3-4p=n^2-9$, односно $(p-2)p(p+2)=(n-3)(n+3)$. Еден од броевите $p-2, p, p+2$ е делив со 3, па мора и n да биде делив со 3. Нека $n=3k$, $k\geq 1$, тогаш $(p-2)p(p+2)=9(k-1)(k+1)$. Двете страни се различни од нула, бидејќи $p\neq 2$. Простиот број $p>3$ го дели $9(k-1)(k+1)$, односно p дели точно еден од броевите $k-1$ и $k+1$.

Нека $p \mid k-1$. Запишуваме $k-1=lp$, па добиваме $(p-2)(p+2)=9l(lp+2)$. Гледајќи ј апоследната равенка по модул p имаме $18l+4 \equiv 0(\mod p)$. Бидејќи p е непарен, $9 \mid 9l+2$. Всушност, $p \le 9l+2$, односно $p-2 \le 9l$, па $(p-2)(p+2)=9l(lp+2)$ повлекува $p+2 \ge lp+2$. Оттука единствената можност е ако $l=1$, па $p=9l+2=11$. Јасно е дека $p=11$ е решение. ($11^3-4\cdot 11+9=36^2$)

Нека $p \mid k+1$, па $k+1=lp$. Тогаш $(p-2)(p+2)=9l(lp-2)$. Гледајќи ја равенката по модул p, имаме $18l-4 \equiv 0(\mod p)$. Следува дека $p \mid 9l-2$. Всушност $p \le 9l-2$, $p+2 \le 9l$, па од $(p-2)(p+2)=9l(lp-2)$, следува $p-2 \ge lp-2$. Оттука $l=1$, па $p=9l-2=7$. Па, $p=7$ е уште едно решение на проблемот. ($7^3-4\cdot 7+9=18^2$)

Конечно, сите решенија на проблемот се $p=2,7,11$.

6. (Japan Mathematical Olympiad, 2016, Problem 1) Нека p е непарен прост број. За природниот број k, $1 \le k \le p-1$, нека a_k е бројот на делителите на $kp+1$ поголеми или еднакви на k и помали од p. Најди ја вредноста на $a_1+a_2+...+a_{p-1}$.

Решение. За природниот број k, $1 \le k \le p-1$, нека S_k е монжеството кое се состои од сите делители на $kp+1$ поголеми или еднакви на k, а помали од p. Бројот a_k во формулацијата на задачата е бројот на елементи на множеството S_k. Прво ќе покажеме дека за произволен природен број r, $1 \le r \le p-1$, постои единствено k, за кое $r \in S_k$. Да забележиме дека за да важи $r \in S_k$, мора да важи $k \le r$.

Нека претпоставиме дека постои пар од природни броеви (i, j), $1 \le i < j \le r$ за кои важи $ip+1 \equiv jp+1(\mod r)$. Тогаш $(j-i)p \equiv 0(\mod r)$. Бидејќи r и p се заемно прости, мора $j-i \equiv 0(\mod r)$, што е невозможно бидејќи $1 \le i < j \le r$. Ова значи дека броевите $p+1, 2p+1, ..., rp+1$ имаат различни остатоци при делење со r. Според ова, постои само едно k $(1 \le k \le r)$, за кое важи $r \mid kp+1$. За ова k, јасно е дека $r \in S_k$.

Можеме да заклучиме дека за секој природен број r, $1 \le r \le p-1$, постои единствено k, за кое $r \in S_k$ и секој природен број s, $1 \le s \le p-1$, се содржи во точно едно S_k. Па,

$$a_1+a_2+...+a_{p-1}=p-1.$$

7. (IMO 2007, Shortlist N3) Нека X е множество од 10000 цели броеви, од кои ниту еден не е делив со 47. Докажи дека постои 2007 елементно подмножество Y од X така што $a-b+c-d+e$ не е деливо со 47 за било кои $a,b,c,d \in Y$.

   Решение. Множеството M од цели броеви ќе го нарекуваме обро ако $47 \nmid a-b+c-d+e$, за $a,b,c,d,e \in M$. Нека го разгледаме множеството $J=\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$. Тврдиме дека J е добро множество. За било кои броеви $a,b,c,d,e \in J$, бројот $a-b+c-d+e$ е непарен и
   $$-45=(-9)-9+(-9)-9+(-9) \le a-b+c-d+e \le 9-(-9)+9-(-9)+9=45.$$
   Но, нема непарен природен број делив со 47, помеѓу -45 и 45. За било кој $k=1,2,...,46$ го разгледуваме множеството
   $$A_k=\{x \in X \mid \exists j \in J : kx \equiv j \pmod{47}\}.$$
   Ако A_k не е добро множество, отгаш $47 \mid a-b+c-d+e$, за некои $a,b,c,d,e \in A_k$, следува $47 \mid ka-kb+kc-kd+ke$. Но, множеството J содржи броеви кои имаат исти остатоци при делење со 47, па J не е добро множество, што е контрадикција. Значи A_k е добро подмножество од X. Сега останува да покажеме дека постои природен број k, така што $|A_k| \ge 2007$. Да забележиме дека секој $x \in X$ се содржи во точно 10 множества A_k. Тогаш $\sum_{k=1}^{46} |A_k| = 10|X| = 100000$, па за некои вредности на k имаме
   $$|A_k| \ge \frac{100000}{46} > 2173 > 2007,$$
   со што доказот е завршен.

8. (IMO 2007, Shortlist N6) Нека k е природен број. Докажи дека бројот $(4k^2-1)^2$ има делител природен број од облик $8kn-1$ ако и само ако k е парен број.

   Решение. Ќе ја докажеме следнава лема: За произволни природни броеви x и y, бројот $4xy-1$ го дели $(4x^2-1)^2$ ако и само ако $x=y$.

   Доказ. Ако $x=y$, тогаш $4xy-1=4x^2-1$ очигледно го дели $(4x^2-1)^2$. Сега ја докажуваме обратната насока. Парот (x,y) од природни броеви го нарекуваме лош пар ако $4xy-1 \mid (4x^2-1)^2$, при што $x \ne y$. За да покажеме дека лоши парови не постојат, ќе дадеме два својства:

Својство 1: Ако (x, y) е лош пар и $x<y$, тогаш постои природен број $z<x$, така што (x, z) е лош пар.

Нека $r=\frac{(4x^2-1)^2}{4xy}-1$. Тогаш,

$$r=-r\cdot(-1)\equiv -r(4xy-1)=-(4x^2-1)^2\equiv -1(\bmod 4x)$$

и $r=4xz-1$ за некој природен број z. Од, $x<y$ имаме дека

$$4xz-1=\frac{(4x^2-1)^2}{4xy-1}<4x^2-1\text{, па } z<x.$$

Од конструкцијата бројот $4xz-1\,|\,(4x^2-1)^2$ и $x\neq z$, па (x, z) е лош пар.

Својство 2: Ако (x, y) е лош пар, тогаш (y, x) е лош пар.

Бидејќи $1=1^2\equiv(4xy)^2(\bmod 4xy-1)$,

имаме

$$(4y^2-1)^2\equiv(4y^2-(4xy)^2)^2=16y^4(4x^2-1)^2\equiv 0(\bmod 4xy-1).$$

Следува бројот $4xy-1$ го дели $(4y^2-1)^2$, па (y, x) е лош пар.

Сега нека претпоставиме дека постои барем еден лош пар. Нека (x, y) е таков лош пар, така што $2x+y$ ја достигнува најмалата можна вредност. Ако $x<y$, тогаш од Својство 1 постои лош пар (x, z), така што $z<y$, па $2x+z<2x+y$, што е контрадикција. Ако $y<x$, Својство 2, вели дека (y, x) е исто така лош пар, па $2y+x<2x+y$ што е контрадикција со минималноста на $2x+y$. Во двата случаја имаме контрадикција со што лемата е докажана.

За да го докажеме тврдењето на задачата со помош на лемата, нека ставиме $x=k$ и $y=2n$. Бројот $8kn-1$ го дели $(4k^2-1)^2$ ако и само ако $k=2n$.

Следува постои таков n ако k е парен и $n=\frac{k}{2}$.

9. (IMO 2006, Shortlist N2) За $x\in(0,1)$ дадено, нека $y\in(0,1)$ е бројот чијашто n-та цифра после децималната запирка е 2^n-та цифра после децималната запирка на x. Докажи дека ако x е рационален, тогаш и y е рационален број.

Решение. Бидејќи x е рационален, неговите цифри се повторуваат периодично, почнувајќи од некоја позиција после децималната запирка. Сакаме да покажеме дека ова е точно и за цифрите на y после децималната запирка, од каде ќе добиеме дека и y е рационален број.

Нека d е должината на периодот x и нека $d=2^u v$, каде v е непарен број. ПОстои природен број w така што $2^w\equiv 1(\bmod v)$. Таков број навистина постои од теоремата на Ојлер, ставајќи $w = \varphi(v)$, каде φ е Ојлеровата функција.

Според тоа,

$2^{n+w} = 2^n \cdot 2^w \equiv 2^n \pmod{v}$ за секој n. Исто така, за $n \geq u$ имаме

$$2^{n+w} \equiv 2^n \equiv 0 \pmod{2^u}.$$

Следува дека, за сите $n \geq u$, важи $2^{n+w} \equiv 2^n \pmod{d}$.

Тогаш за n доволно големо, 2^{n+w}-та цифра е на исто место во периодот на x како и 2^n-тата цифра, па овие цифри се еднакви. Следува $(n+w)$-та цифра е еднаква на n-тата цифра во y. Ова значи дека цифрите на y се променуваат периодично со период w од некоја точка.

10. (IMO 2005, Problem 4) Нека е дадена низата $a_1, a_2, ...$ дефинирана со $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ за сите природни броеви n. Определи ги сите природни броеви така што се заемно прости со секој член од дадената низа.

Решение. Одговорот е 1. Доволно е да докажеме дека секој прост број p го дели a_n, за некој природен број n. Да забележиме дека $p = 2$ и $p = 3$ го делат

$$a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48.$$

Нека сега претпоставиме дека $p \geq 5$. Од малата теорема на Ферма, имаме

$$2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Тогаш

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 3 + 2 + 1 \equiv 6 \pmod{p},$$

или

$$6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

од каде добиваме дека $6a_{p-2}$ е делив со p. Бидејќи p е заемно прост со 6, a_{p-2} е деливо со p. Оттука го добиваме заклучокот дека 1 е единствениот број со кој секој член од низата е заемно прост.

11. (IMO 2002, Shortlist N1) Најди го најмалиот природен број k, така што постојат цели броеви $x_1, x_2, ..., x_k$ за кои важи $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3 = 2002^{2002}$.

Решение. Одговорот е $k = 4$. Прво ќе покажеме дека 2002^{2002} не може да се запише како сума на три кубови на природни броеви. Да забележиме дека $2002 \equiv 4 \pmod{9}$ и

$$2002^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod{9},$$

од каде

$$2002^{2002} \equiv (2002^3)^{667} \cdot 2002 \equiv 4 \pmod 9 .$$

Од друга страна, $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$ за било кој цел број x. Оттука, јасно е дека

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \not\equiv 4 \pmod 9 .$$

Останува да покажеме дека 2002^{2002} е збир на четири кубови. Имаме

$$2002 = 10^3 + 10^3 + 1^3 + 1^3 ,$$

и имајќи предвид дека $2002 = 3 \cdot 667 + 1$, можеме да запишеме дека

$$\begin{aligned} 2002^{2002} &= 2002 \cdot (2002^{667})^3 \\ &= (10 \cdot 2002^{667})^3 + (10 \cdot 2002^{667})^3 + (2002^{667})^3 + (2002^{667})^3 , \end{aligned}$$

со што сме покажале дека дека $k = 4$.

12. (Hong Kong Mathematical Olympiad, 2015, Problem 1) Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ е низа од реални броеви такви што $-1 < a_i < 1$ за кои $1 \le i \le n$ и нека

1) $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$;

2) $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 40$.

Најди ја најмалата можна вредност на n.

Решение. Да забележиме дека $4 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 < 1 + 1 + ... + 1 = n$, па имаме дека $n \ge 41$. Ќе покажеме дека одговорот е 42. Нека одговорот е 41. Тогаш имаме низа $a_1, a_2, ..., a_{41}$ од реални броеви во интервалот $(-1,1)$ така што $a_1 + a_2 + ... + a_{40} + a_{41} = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{40}^2 + a_{41}^2 = 40$. Можеме без губење на општоста да претпоставиме дека низата е монотоно растечка и $a_1 \le 0 \le a_{41}$. Бидејќи n треба да биде минимален, $a_i \ne 0$ за сите $i \in \{1, 2, ..., 40, 41\}$ и постои единствено k така што

$$-1 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_k < 0 < a_{k+1} \le ... \le a_{41} < 1.$$

Од друга страна ако $a_1, a_2, ..., a_{41}$ е таква низа, тогаш и $-a_1, -a_2, ..., -a_{41}$ е низа кој ги задоволува условите на задачата. Па, може да претпоставиме дека $k \le \left\lfloor \frac{41}{2} \right\rfloor = 20$. Сега за $k + 1 \le i \le n$, имаме $0 < a_i^2 < a_i$. Следува дека

$$\begin{aligned} 40 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{41}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2) + (a_{k+1}^2 + ... + a_{41}^2) < \\ < (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2) + (a_{k+1} + ... + a_{41}) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2) - (a_1 + a_2 + ... + a_k) < 2k \le 40 \end{aligned}$$

,

што е контрадикција. Значи $n \ge 42$.

Ќе покажеме дека $n=42$ е можно. Ставаме $a_i=-\sqrt{\frac{20}{21}}$, за $1\le i\le 21$ и $a_i=\sqrt{\frac{20}{21}}$ за $22\le i\le 42$. Лесно се проверува дека се исполнети условите на задачата.

13. (IMO 2012, Shortlist A3) Нека $a_2,a_3,...,a_n$ се $n-1$ позитивни реални броеви, каде $n\ge 3$, така што $a_2a_3\cdot...\cdot a_n=1$. Докажи дека

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdot...\cdot(1+a_n)^n>n^n.$$

Решение. Ставајќи ги смените $a_2=\frac{x_2}{x_1},a_3=\frac{x_3}{x_2},...,a_n=\frac{x_1}{x_{n-1}}$ оригиналниот проблем го трансформираме во неравенството

$$(x_1+x_2)^2(x_2+x_3)^3\cdot...\cdot(x_{n-1}+x_n)^n>n^n{x_1}^2{x_2}^3\cdot...\cdot{x_{n-1}}^n,$$

за сите $x_1,x_2,...,x_{n-1}>0$. За да го докажеме неравенството, го користиме неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина на левата страна од новодобиеното равенство. Имаме,

$$(x_1+x_2)^2\ge 2^2x_1x_2$$

$$(x_2+x_3)^3=\left(2\left(\frac{x_2}{2}\right)+x_3\right)^3\ge 3^3\left(\frac{x_2}{2}\right)^2x_3$$

$$(x_3+x_4)^4=\left(3\left(\frac{x_3}{3}\right)+x_4\right)^4\ge 4^4\left(\frac{x_3}{3}\right)x_4$$

$$...$$

$$(x_{n-1}+x_1)^n=\left((n-1)\left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)+x_1\right)^n\ge n^n\left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}x_1.$$

Множејќи ги овие неравенства го добиваме равенството погоре само со знак $\ge$, наместо со $>$. За да имаме неравенство, треба да биде задоволено $x_1=x_2,x_2=2x_3,...,x_{n-1}=(n-1)x_1$, од каде добиваме дека $x_1=(n-1)x_1$. Ова е невозможно бидејќи $x_1>0$ и $n\ge 3$. Со ова го добиваме тврдењето на задачата.

14. (Austrian Mathematical Olympiad, 2016, Problem 6) Нека a,b,c се природни броеви такви што $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}$ е природен број. Докажи дека броевите $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ и $\frac{bc}{a}$ се природни броеви.

Решение. Нека ставиме $u=\frac{ab}{c}, v=\frac{ac}{b}, w=\frac{bc}{a}$. Од претпоставката $u+v+w$ е природен број. Лесно се проверува дека $uv+uw+vw=a^2+b^2+c^2$ и $uvw=abc$ се природни броеви (бидејќи a,b,c се природни броеви).

Од Виетовите формули броевите u,v,w се решенија на кубната равенка

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

со коефициенти природни броеви. Бидејќи водечкиот коефициент е 1, корените u,v,w се природни броеви, со што докажавме дека броевите $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ и $\frac{bc}{a}$ се природни броеви.

15. (IMO 2015, Shortlist A1) Нека е дадена низата $a_1,a_2,...$ од позитивни реални броеви за кои важи

$$a_{k+1}\geq \frac{ka_k}{a_k{}^2+(k-1)} \tag{6}$$

за секој природен број k. Докажи дека $a_1+a_2+...+a_n\geq n$, за секој $n\geq 2$.

Решение. Од (6) имаме дека

$$\frac{k}{a_{k+1}}\leq \frac{k(a_k{}^2+(k-1))}{ka_k}=\frac{a_k{}^2+(k-1)}{a_k}=a_k+\frac{k-1}{a_k},$$

па

$$a_k\geq \frac{k}{a_{k+1}}-\frac{k-1}{a_k}.$$

Сумирајќи го горното неравенство за $k=1,2,...,m$, добиваме

$$a_1+a_2+...+a_m\geq \frac{m}{a_{m+1}}. \tag{7}$$

Доказот ќе го дадеме со помош на математичка индукција по n.

За $n=2$, имаме $a_1+a_2\geq a_1+\frac{1}{a_1}\geq 2$. Овде искористивме дека $a_2\geq \frac{1}{a_1}$, кое директно се добива од (6), ставајќи $k=1$.

Сега нека претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $n\geq 2$.

Ако $a_{n+1}\geq 1$, тогаш

$$(a_1+a_2+...+a_n)+a_{n+1}\geq n+1.$$

Ако $a_{n+1}<1$, од (7) иамаме

$$(a_1+a_2+...+a_n)+a_{n+1}\geq \frac{n}{a_{n+1}}+a_{n+1}=\frac{n-1}{a_{n+1}}+\left(\frac{1}{a_{n+1}}+a_{n+1}\right)>n-1+2=n+1.$$

Согласно, принципот на математичка индукција докажавме дека тврдењето е точно за секој $n\in\mathbb{N}$, односно важи $a_1+a_2+...+a_n\ge n$, за сите $n\ge 2$.

16. (IMO 2015, Shortlist A2) Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ со својството

$$f(x-(y))=f(f(x))-f(y)-1 \qquad (8)$$

за сите $x,y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Сите функции кои го задоволуваат (8) се $f(x)=-1$ и $f(x)=x+1$. Нека f е функција која го задоволува (8) за сите $x,y\in\mathbb{Z}$. Ставајќи $x=0$ и $y=f(0)$ во (8), за бројот $z=-f(f(0))$ имаме $f(z)=-1$. Ставајќи $y=z$ во (8) добиваме

$$f(x+1)=f(f(x)) \qquad (9)$$

за секој $x\in\mathbb{Z}$. Според ова (8) го добива обликот

$$f(x+f(y))=f(x+1)-f(y)-1. \qquad (10)$$

Наредно ќе покажеме дека f е линеарна со тоа што ќе ја разгледуваме разликата $f(x+1)-f(x)$, за секој $x\in\mathbb{Z}$. Заменувајќи во (10) со $y=x$ и имајќи предвид (9), добиваме

$$f(x+1)-f(x)=f(x-f(x))+1=f(f(x-1-f(x)))+1.$$

Од (10) имаме $f(x-1-f(x))=f(x)-f(x)-1=-1$, од каде можеме да запишеме $f(x+1)-f(x)=A$, односно $f(x+1)=f(x)+A$, каде $A=f(-1)+1$. Со индукција по x, можеме да докажеме дека f е линеарна функција, т.е. $f(x)=Ax+B$, за сите $x\in\mathbb{Z}$, каде $B=f(0)$. Заменувајќи го ова во (9) имаме дека

$$Ax+(A+B)=A^2x+(AB+B),$$

важи за сите $x\in\mathbb{Z}$, каде $B=f(0)$. Ставајќи $x=0$ и $x=1$, добиваме $A+B=AB+B$ и $A^2=A$. Од втората равенка добиваме дека $A=0$ и $A=1$. Кога $A=1$, од првата равенка имаме $B=1$, односно $f(x)=x+1$. Ако $A=0$, тогаш f е константна, па (8) ни дава дека мора $f(x)=-1$. Со ова ги најдовме сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ што го задоволуваат (8).

17. (IMO 2008, Shortlist A1) Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ така што

$$\frac{f(p)^2+f(q)^2}{f(r^2)+f(s^2)}=\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2},$$

за сите $p,q,r,s>0$ за кои $pq=rs$.

Решение. Нека f е функција која го задоволува условот на задачата. Ставајќи $p=q=r=s=1$, добиваме $f(1)^2 = f(1)$, па имаме $f(1)=1$. Нека сега $x>0$ и нека ставиме $p=x$, $q=1$, $r=s=\sqrt{x}$, па добиваме

$$\frac{f(x)^2+1}{2f(x)}=\frac{x^2+1}{2x}.$$

Последново равенство може да се запише како

$$xf(x)^2+x=x^2f(x)+f(x)$$
$$(xf(x)-1)(f(x)-x)=0.$$

Следува,

за секој $x>0$ или $f(x)=x$ или $f(x)=\frac{1}{x}$.

Јасно дека ако $f(x)=x$ или $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x>0$, условот на задачата е задоволен. Во продолжение ќе покажеме дека овие две функции се единствените решенија на задачата.

Нека претпоставиме дека постои функција f која го задоволува условот на задачата и е различна од горенаведените функции. Тогаш $f(a)\neq a$ и $f(b)\neq\frac{1}{b}$, за некои $a,b>0$. Оттука мора $f(a)=\frac{1}{a}$ и $f(b)=b$. Заменувајќи во почетното равенство ставајќи $p=a,q=b,r=s=\sqrt{ab}$ добиваме

$$\frac{\frac{1}{a^2}+b^2}{2f(ab)}=\frac{a^2+b^2}{2ab},$$

што е еквивалентно со

$$f(ab)=\frac{ab\left(\frac{1}{a^2}+b^2\right)}{a^2+b^2}.$$

Јасно е дека $f(ab)$ мора да биде или ab или $\frac{1}{ab}$. Ако $f(ab)=ab$, тогаш од последното равенство имаме $\frac{1}{a^2}+b^2=a^2+b^2$, па $a=1$. Но, бидејќи $f(1)=1$, имаме контрадикција со $f(a)\neq a$.

Ако $f(ab)=\frac{1}{ab}$, тогаш повторно од последното равенство имаме

$$a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+b^2\right)=a^2+b^2,$$

од каде $b=1$, што е во контрадикција со $f(b)\neq\frac{1}{b}$.

Заклучуваме дека $f(x)=x$ или $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x>0$ се единствените решенија на задачата.

18. (IMO 2009, Shortlist N2) Природен број N се нарекува балансиран, ако $N=1$ или ако N може да се запише како производ од парен број од прости броеви кои не мора да бидат различни. Нека се дадени природните броеви a и b и нека P е полином дефиниран со $P(x)=(x+a)(x+b)$.

а) Докажи дека постојат различни природни броеви a и b така што броевите $P(1),P(2),...,P(50)$ се балансирани;

б) Докажи дека ако $P(n)$ е балансиран за сите природни броеви n, тогаш $a=b$.

Решение. Дефинираме функција на множеството од природни броеви со $f(n)=0$, ако n е балансиран и $f(n)=1$, ако n не е балансиран. Јасно, $f(mn)\equiv f(n)+f(m)(\bmod 2)$,
за сите природни броеви n,m.

а) За природен број n ја рагледуваме бинарната низа $(f(n+1),f(n+2),...,f(n+50))$. Бидејќи имаме 2^{50} различни такви низи, има два различни природни броеви a и b така што

$$(f(a+1),f(a+2),...,f(a+50))=(f(b+1),f(b+2),...,f(b+50)).$$

Но, ова повлекува дека за полиномот $P(x)=(x+a)(x+b)$ сите броеви $P(1),P(2),P(3),...,P(50)$ се балансирани, бидејќи $1\leq k\leq 50$ имаме

$$f(P(k))=f(a+k)+f(b+k)\equiv 2f(a+k)\equiv 0(\bmod 2).$$

б) нека, сега претпоставиме дека $P(n)$ е балансирано за сите природни броеви n и $a<b$. Нека $n=k(b-a)-a$, за доволно големо k, така што n е позитивен. Тогаш $P(n)=k(k+1)(b-a)^2$ и овој број ќе биде балансиран ако $f(k)=f(k+1)$. Тоа значи дека низата $(f(k))_k$ мора да биде константна за доволно големо k. Но, ова не е можно бидејќи за секој прост број p, $f(p)=1$
, а за секој квадрат $f(t^2)=0$. Значи мора $a=b$.

19. (IMO 2007, Shortlist N2) Нека b, n се природни броеви. Нека претпоставиме дека за секој $k > 1$, постои цел број a_k така што $b - a_k{}^n$ е деливо со k. Докажи дека $b = A^n$, за некој природен број A.

Решение. Нека факторизацијата на b е $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}$, каде $p_1, p_2, ..., p_s$ се различни прости броеви. Наша цел ќе биде да покажеме дека сите експоненти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ се деливи со n, па така $A = p_1^{\frac{\alpha_1}{n}} p_2^{\frac{\alpha_2}{n}} \cdot ... \cdot p_s^{\frac{\alpha_s}{n}}$.

Нека во $k \,|\, b - a_k{}^n$, ставиме $k = b^2$. За секој $1 \le k \le s$, $b - a_k{}^n$ е деливо со $p_i^{2\alpha_1} > p_i^{\alpha_i}$. Оттука,

$$a_k{}^n \equiv b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i})$$

и

$$a_k{}^n \equiv b \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i + 1}),$$

од каде имаме дека најголемиот степен на p_i кој го дели $a_k{}^n$ е $p_i^{\alpha_i}$. Бидејќи $a_k{}^n$ е n-ти степен на број, следува дека α_i е делив со n.

20. (IMO 2011, Shortlist N2). Нека е даден полиномот

$$P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot ... \cdot (x + d_9),$$

каде $d_1, d_2, ..., d_9$ се девет различни цели броеви. Докажи дека постои цел број N, така што за сите цели броеви $x \ge N$, бројот $P(x)$ е делив со прост број поголем од 20.

Решение. Да забележиме дека тврдењето во задачата е инваријантно во однос на транслации по x, па без губење на општоста можеме да претпоставиме дека броевите $d_1, d_2, ..., d_9$ се позитивни.

Главната идеја во задачата е дека има точно осум прости броеви помали од 20, додека $P(x)$ има повеќе од осум множители.

Ќе докажеме дека $N = d^8$ го задоволува бараното својство, каде $d = \max\{d_1, d_2, ..., d_9\}$.

Нека сега претпоставиме дека постои број $x \ge N$, така што $P(x)$ е сложен број кој е делив со прости броеви помали од 20. Тогаш за секој индекс $i \in \{1, 2, ..., 9\}$, бројот $x + d_i$ може да се запише како производ на степените од првите 8 прости броеви.

Бидејќи $x + d_i > x \ge d^8$, постои некој степен на прост број $f_i > d$ кој го дели $x + d_i$. Од принципот на Дирихле, постојат два различни индекси i и j така што $f_i \le f_j$. Сега и двата броја $x+d_i$ и $x+d_j$ се деливи со f_i, од каде имаме дека и нивната разлика $d_i - d_j$ е деливо со f_i. Но,

$0 < |d_i - d_j| \le \max\{d_i, d_j\} \le d < f_i$,

што е контрадикција. Значи бројот $N = d^8$ го задоволува условот на задачата.

Литература

1. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 Number theory problems, Birkhauser, Boston, 2007.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
3. German Mathematical Olympiad, 2016.
4. Argentine National Olympiad, 2015.
5. 66st Belarusian Mathematical Olympiad, 2016.
6. 54th Dutch Mathematical Olympiad 2015.
7. Hellenic Mathematical Competitions 2016.
8. Japan Mathematical Olympiad 2016.
9. Problems of the 47th Austrian Mathematical Olympiad 2016.
10. Hong Kong Mathematical Competitions 2015.
11. 47th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Slovenia, 2006.
12. 48th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Vietnam, 2007.
13. 49th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Spain, 2008.
14. 50th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Germany, 2009.
15. 51st International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Kazakhstan, 2010.
16. 52nd International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Netherlands, 2011.
17. 53th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Argentina, 2012.
18. 54th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Colombia, 2013.
19. 56st International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Thailand, 2015.