Методи Главче
Скопје

ПОВЕЌЕ НАЧИНИ НА РЕШАВАЊЕ НА ИСТА ЗАДАЧА

Секако, наоѓањето на решението на една задача е успех за секој ученик. Меѓутоа, ќе се согласите дека кога една задача ќе успеете да ја решите на повеќе начини, т.е. со повеќе различни постапки, тогаш можете да кажете дека добро сте ја анализирале задачата и сте успеале суштински да навлезете во истата. Токму затоа во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на една едноставна задача, за која ќе презентираме пет начини за нејзино решавање.

Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Нека $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{a+b}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. ***Прв начин.*** Нека α,β,γ се големините на аглите при темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно. Нека $n=\overline{AD}$, $m=\overline{BD}$ и $\overline{AB}=c$. Од својството на симетралата на аголот на триаголникот следува $m:n=a:b$. Но, $m+n=c$, па затоа $m=\frac{ac}{a+b}$. Сега од косинусната теорема, применета на $\triangle BCD$, следува

$$\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}=a^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}-\frac{2a^2b}{a+b}\cos\beta,$$

т.е.

$$\cos\beta=\frac{(a+b)^2+c^2-b^2}{2c(a+b)}=\frac{a^2+2ab+c^2}{2c(a+b)}.$$

Но, од косинусната теорема применета на $\triangle ABC$ имаме $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$, па затоа

$$\frac{a^2+2ab+c^2}{2c(a+b)}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca},$$

од каде добиваме $a^2+b^2+ab=c^2$. Повторно од косинусната теорема за $\triangle ABC$ следува $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, па затоа $\gamma=120^\circ$.

Втор начин. При ознаки како во првиот начин аналогно докажуваме дека $m=\frac{ac}{a+b}$ и $n=\frac{bc}{a+b}$. Понатаму, бидејќи $\overline{CD}=d=\frac{ab}{a+b}$ со замена во формулата на Стјуарт

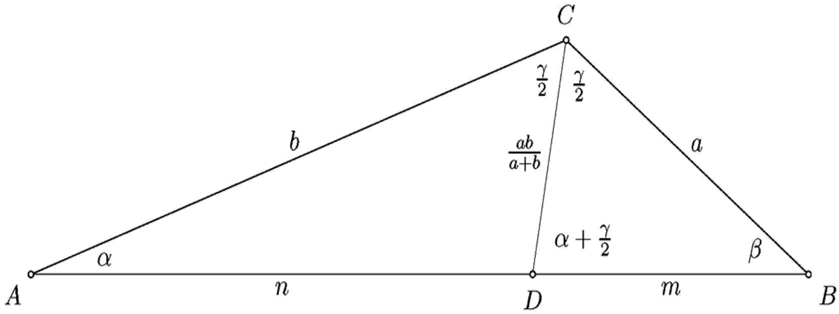
$$b^2m+a^2n=c(d^2+mn),$$

после средувањето добиваме

$$a^2+b^2+ab=c^2,$$

од што како и во првиот начин заклучуваме дека $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, т.е. $\gamma=120^\circ$.

Трет начин. Нека α,β,γ се големините на аглите при темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно.



Имаме $\measuredangle BDC=\alpha+\frac{\gamma}{2}$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува

$$\tfrac{ab}{a+b}:a=\sin\beta:\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2}),\text{ т.е. }\tfrac{b}{a+b}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}.$$

Понатаму, $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1$, па затоа

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1,\text{ т.е. }\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})=\sin\alpha+\sin\beta.$$

Сега, бидејќи $\sin\beta=\sin(180^\circ-\beta)=\sin(\alpha+\gamma)$, од последното равенство и адиционите формули добиваме

$$\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})=\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)=2\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})\cos\tfrac{\gamma}{2}.$$

Понатаму, $\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})\neq 0$, бидејќи во спротивно ќе важи $\alpha+\frac{\gamma}{2}=180^\circ$, што не е можно. Конечно, од последното равенство следува $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$, па затоа $\frac{\gamma}{2}=60^\circ$, т.е. $\gamma=120^\circ$.

Четврт начин. Нека α,β,γ се големините на аглите при темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно. Нека $n=\overline{AD}$, $m=\overline{BD}$ и $\overline{AB}=c$. Од својството на симетралата на агол следува $m:n=a:b$. Но, $m+n=c$, па затоа

$m=\frac{ac}{a+b}$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува

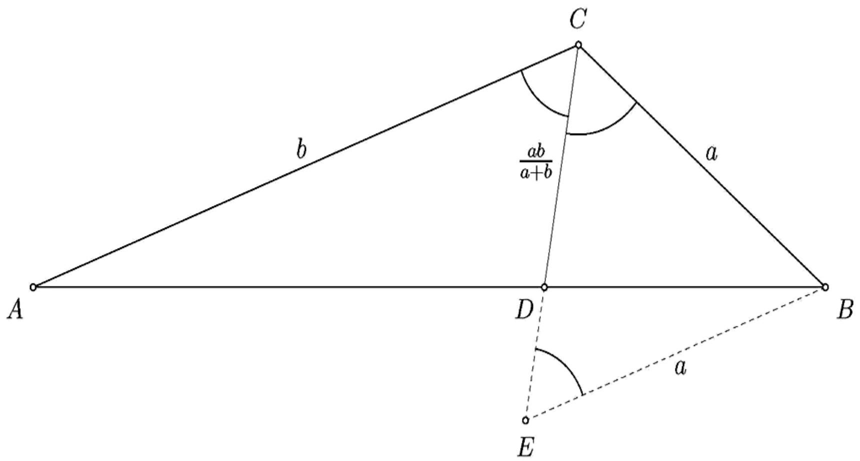
$$\sin\frac{\gamma}{2}:\sin\beta=\frac{ac}{a+b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{c}{b}.$$

Од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува $\frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, што заедно со горното равенство дава $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, т.е.

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Не е можно $\sin\frac{\gamma}{2}=0$, бидејќи тогаш $\gamma=0$, па затоа од последното равенство следува $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}$, т.е. $\frac{\gamma}{2}=60^\circ$, односно $\gamma=120^\circ$.

Петти начин. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Нека E е точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ таква што $BE\parallel AC$. Имаме $\measuredangle BED=\measuredangle ACD=\measuredangle BCD$, па затоа $\overline{BC}=\overline{BE}=a$. Исто така, триаголниците ADC и BDE имаат еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\overline{BE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{CD}$, односно



$$\overline{DE}=\frac{a}{b}\cdot\overline{CD}=\frac{a^2}{a+b}.$$

Според тоа,

$$\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}=\frac{ab}{a+b}+\frac{a^2b}{a+b}=a.$$

Значи, $\triangle BCE$ е рамностран, па затоа $\frac{1}{2}\measuredangle ACB=60^\circ$, т.е. $\measuredangle ACB=120^\circ$.

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ