Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Др Павле Младеновић (Београд)

О РЕЗАЊУ КВАДРА

У прошлом броју МЛ писали смо о резању коцке чија је дужина ивице природан број на јединичне коцкице. У овом чланку даћемо решење следећег општијег проблема:

Нека су m, n, p *природни бројеви. Колики је најмањи број резања помоћу којих се квадар (правоугли паралелепипед) димензија* $m \times n \times p$ *може разрезати на* mnp *јединичних коцкица.*

При томе, дозвољено је после првог резања састављати већи број делова и једним потезом сваки од њих резати на два дела.

Прво приметимо да са $m-1$ равни које су нормалне на ивице дужине m, са $n-1$ равни које су нормалне на ивице дужине n и са $p-1$ равни које су нормалне на ивице дужине p можемо једноставно поделити квадар на mnp јединичних коцкица. Према томе, тражени број није већи од броја $m+n+p-3$. Доказаћемо да је тај број, у општем случају, мањи од $m+n+p-3$.

Сваки природан број једнак је степену двојке или се налази између два узастопна степена двојке. Према томе, постоје ненегативни цели бројеви бројеви a, b и c такви да важе неједнакости:

$$2^{a-1} < m \leq 2^a, \quad 2^{b-1} < n \leq 2^b, \quad 2^{c-1} < m \leq 2^c. \tag{1}$$

Докажимо да је тражени најмањи број резања једнак $a + b + c$.

Назовимо број m дужином квадра, број n — ширином, а број p — висином квадра. У првом резању можемо поделити дати квадар на два дела од којих бар један има дужину 2^{a-1}. (Ако је $m = 2^a$, онда добијамо два дела дужине 2^{a-1}, а ако је $2^{a-1} < m < 2^m$, онда добијамо један нови део дужине 2^{a-1} и други део мање дужине.) Затим поставимо те делове један на други и режемо тако да преполовимо дужину највећег дела. Понављајући поступак више пута постижемо да са a резања добијемо делове од којих сваки има дужину 1. Слично са b резања можемо добити делове од који сваки има ширину 1 и са још c резања можемо добити делове од који сваки има висину 1. Према томе, са $a + b + c$ резања можемо дати квадар разрезати на mnp јединичних коцкица.

Докажимо да се са мање од $a + b + c$ резања то не може постићи. Збир $a + b + c$, где су a, b, c експоненти за које важе неједнакости (1), назовимо *карактеристика* квадра димензије $m \times n \times p$. Слично дефинишемо карактеристику произвољног квадра чије су дужине страница природни бројеви. Тада је карактеристике јединичне коцке једнака нули. При сваком резању смањује се карактеристика сваког дела, при чему се карактеристика бар једног дела смањује тачно за 1. Зато је полазећи од квадра који има карактеристику $a + b + c$ неопходно извести $a + b + c$ резања да би се добиле све саме јединичне коцкице од којих свака има карактеристику нула.

Размотримо и конкретан пример квадра димензије $9 \times 5 \times 4$. У овом случају неједнакости (1) примају облик:

$$2^3 < 9 < 2^4, \quad 2^2 < 5 < 2^3, \quad 2^1 < 4 \leq 2^2.$$

Према томе најмањи број резања помоћи којих се квадар димензије $9 \times 5 \times 4$ може разрезати на $9 \cdot 5 \cdot 4 = 180$ јединичних коцкица једнак је $4 + 3 + 2 = 9$.