The 6th Junior Balkan Mathematical Olympiad

SHORTLISTED PROBLEMS
AND
SOLUTIONS

Târgu Mureş, 2002

The 6th JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

Târgu Mureş, ROMANIA

22–28 **June 24th 2002**

1. Let ABC be an isosceles triangle such that $AC = BC$ and let P be a point on that arc (AB) of its circumcircle, which does not contain C. The perpendicular line from C on PB intersects PB in D. Prove that $PA + PB = 2PD$.

2. Two circles C_1 and C_2 of different radii have common points A and B and their centers O_1, O_2 are separated by the straight line AB. Let B_1 and B_2 be the diametrically opposed points of B on these circles and let M be the midpoint of the segment B_1B_2. Points M_1, M_2 are taken on C_1 and C_2 respectively such that $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2$, B_1 is an internal point of $\angle AO_1M_1$ and B is an internal point of $\angle AO_2M_2$. Prove that $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.

3. Find all the positive integers N which have the following properties:
   - N has exactly 16 divisors $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{15} < d_{16} = N$;
   - the divisor with index d_5 (that is d_{d_5}) is equal to $(d_2 + d_4)d_6$.

4. Given positive numbers a, b, c prove that
$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Problemele care au stat în atenția juriului celei de a VI a olimpiade balcanice de juniori (Tg. Mureş, România, 22-28 2002)

ALGEBRA **A1.** Un elev joacă pe calculator. Calculatorul îi prezintă 2002 numere pozitive alese la întâmplare. Regulile jocului îi permit următoarele operații:

_ să ia două dintre numerele date, să-l dubleze pe primul, să-l adauge pe al doilea şi să păstreze suma

_ să ia alte două numere dintre cele rămase, să-l dubleze pe primul, să-l adauge pe al doilea, să multiplice suma cu precedenta si să păstreze rezultatul

_ să repete procedeul până utilizează toate cele 2002 numere

Elevul câştigă jocul dacă produsul obținut în final este maximul posibil. Găsiți strategia câştigătoare şi demonstrați-o.

A2. Numerele naturale pozitive sunt aranjate în forma:

$$\begin{array}{lllll} 1 & 3 & 6 & 10 & 15\ \ldots \\ 2 & 5 & 9 & 14 & \ldots \\ 4 & 8 & 13\ \ldots & & \\ 7 & 12\ \ldots & & & \\ 11\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \end{array}$$

Găsiți numărul coloanei şi al liniei pe care este pus numărul 2002.

A3. Fiind date numerele pozitive a,b,c demonstrați:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

A4. Fie a,b,c numere reala pozitive încât $abc=9/4$. Demonstrați inegalitatea

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

A4.1. (*Varianta comisiei*) Fie numerele reale pozitive astfel încât $abc=2$. Să se demonstreze inegalitatea

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

A5. Fie *a, b, c* numere reale pozitive. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

A6. Dacă pentru numerele reale a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 au loc:

$a_1\neq 0$, $a_1a_6+a_3a_4=2a_2a_5$ şi $a_1a_3\geq a_2^2$, demonstrați că $a_4a_6\leq a_5^2$. Când are loc egalitatea?

A7. Se dau 2002 întregi a_i, $i=1,2,\ldots\ldots 2002$ astfel ca

$$a_1^{-3}+a_2^{-3}+\ldots\ldots+a_{2002}^{-3}=1/2.$$

Demonstrați că cel puțin trei dintre ei sunt egali.

NUMERE **N1.** Găsiți numerele întregi pozitive N cu următoarele proprietăți:

- N are exact 16 divizori $1=d_1<d_2<\ldots\ldots<d_{15}<d_{16}=N$
- divizorul cu indice d_5 este egal cu $(d_2+d_4)d_6$.

GEOMETRIE **G1.** Fie triunghiul ABC, centrul său de greutate G şi mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor BC, CA, AB. Paralela prin A_1 la BB_1 intersectează B_1C_1 în F. Demonstrați că triunghiurile ABC, FA_1A sunt asemenea dacă şi numai dacă patrulaterul AB_1GC_1 este inscriptibil.

G2. Fie triunghiul ABC, ortocentrul H, centrul I al cercului înscris, centrul O al cercului circumscris. CI retaie cercul circumscris în L. Se ştie că AB = IL şi AH = OH. Găsiți măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

G3. Fie triunghiul ABC de arie S şi D, E, F punctele arbitrare pe BC, CA, AB. Perpendicularele în D, E, F pe BC, CA, AB taie cercul circumscris în perechile de puncte (D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1,F_2).

Demonstrați $|D_1B\cdot D_1C-D_2B\cdot D_2C|+$

$|E_1C\cdot E_1A-E_2C\cdot E_2A|+|F_1A\cdot F_1B-F_2A\cdot F_2B|>4S$.

G4. Fie ABC in triunghi isoscel (AB = BC) şi P un punct pe arcul AB al cercului circumscris ce nu-l conține pe C. Fie D proiecția lui C pe PB. Demonstrați că $PA+PB=2PD$.

G5. Fie ABC un triunghi cu AB = AC şi $\sphericalangle A = 20°$. Pe latura AC luăm D încât AD = BC. Găsiţi $\sphericalangle BDC$.

G6. (*Enunţ iniţial*) Cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ de raze diferite sunt secante în A şi B. Fie B_1, B_2 diametral opuse lui B in $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi M mijlocul lui B_1B_2. Puncte: M_1 pe $\mathcal{C}_1$ şi M_2 pe $\mathcal{C}_2$ sunt astfel încât $\text{arc}(AB_1M_1) = \text{arc}(ABM_2) < 180°$. Arătaţi că $\sphericalangle MM_1B = \sphericalangle MM_2B$.

G7. Fie ABCD un patrulater convex cu AB = AD şi BC=CD. Se aleg puncte K, L, L_1, K_1 pe AB, BC, CD, DA încât KLL_1K_1 să fie dreptunghi. Se consideră apoi dreptunghiuri: MNPQ înscris în triunghiul BLK ($M \in KB$, $N \in BL$, P, $Q \in LK$) şi $M_1N_1P_1Q_1$ înscris în triunghiul DK_1L_1 ($M_1 \in DK_1$, $N_1 \in DL_1$ şi P_1, $Q_1 \in L_1K_1$). Fie 2S, $2S_1$, S_2 şi S_3 ariile lui ABCD, KLL_1K_1, MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$. Găsiţi cea mai mare valoare posibilă a expresiei: $(2S_1 + S_2 + S_3)/2S$.

G8. Fie $A_1, A_2, \dots A_{2002}$ puncte în plan. Demonstraţi că oricare ar fi cercul de rază unitate în plan şi oricare ar fi dreptunghiul înscris în el, există trei vârfuri M, N, P ale dreptunghiului încât $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2002} + NA_1 + NA_2 + \dots + NA_{2002} + PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{2002} \geq 6006$.

Din regulamentul Olimpiadelor Matematice Balcanice de Juniori

Scopurile OMBJ (JMBO prescurtarea din limba engleză, considerată oficială) este descoperirea, încurajarea şi sprijinirea elevilor dotaţi din toate ţările participante. Olimpiada se desfăşoară în fiecare an, în ultima decadă a lunii iunie, ţările membre fiind succesiv organizatoare. Ţările membre sunt Albania, Bulgaria, Cipru, Grecia, Iugoslavia, Macedonia, Moldova, România, Turcia; Bosnia/Heţegovina a căpătat accepţiunea celorlalte ţări. Toate deciziile juriului se iau prin majoritate simplă de voturi, preşedintele putând vota doar în cazuri de egalitate. Juriul este constituit din liderii ţărilor participante + preşedintele, numit de ţara organizatoare si poate decide în orice chestiune ce nu este acoperită de regulament. Regulamentul poate fi ajustat, schimbările devenind operante doar la următoarea olimpiadă. Echipele sunt formate din 6 elevi care în ziua desfăşurării concursului nu au vârsta de 15 ani şi 6 luni. Fiecare ţară, exceptând-o pe cea organizatoare, poate propune până la 5 probleme (însoţite de soluţii) care trebuie să ajungă prin poştă la comisia de organizare cu cel puţin o lună înaintea concursului. Comisia de organizare trebuie să selecteze din problemele primite lista problemelor acceptate (minim 16 probleme).

În preziua concursului juriul alege problemele, aprobă traducerile în limbile necesare şi aprobă multiplicarea pentru concurs. Este stric interzisă comunicarea de informaţii referitoare la probleme. Fiecare concurent redactează soluţiile în limba dorită, lucrând absolut independent (sub ameninţarea descalificării). În prima jumătate de oră din timpul de lucru orice elev participant poate cere lămuriri suplimentare asupra enunţurilor, folosind hârtii speciale adresate juriului.

Liderul şi asistentul său corectează lucrările şi propun notele comisiei de coordonare care decide nota finală; eventualele neconcordanţe pot fi aplanate de preşedinte sau de plenul juriului. Coordonarea soluţiilor participanţilor din ţara organizatoare se face în prezenţa liderului ţării ce a propus problema. Tipul premiilor (medaliilor) acordate sunt: primul (aur), al doilea (argint), al treilea (bronz). Se pot acorda premii speciale pentru soluţii cu totul remarcabile şi menţiuni de onoare pentru participanţi ce au primit nota maximă la cel puţin o problemă.

Numărul total de premii este aproximativ 2/3 din numărul participanţilor. Premiile 1, 2, 3 se distribuie aproximativ proporţional cu numerele 1, 2, 3. Problemele de concurs se aleg din domeniile algebră, geometrie, teoria numerelor, combinatorică.

La această olimpiadă au participat 8 ţări (Albania având probleme de nerezolvat cu deplasarea). În clasamentul neoficial pe naţiuni România ocupă detaşat locul I cu 219 puncte din 240 posibile; urmează Bulgaria cu 170, Moldova cu 158. Componenţii echipei României au obţinut următoarele rezultate:

Problema	1	2	3	4	Total	Medalii
Kreindler Gabriel	10	10	10	10	40	Aur
Pachiţariu Marius	10	10	9	10	39	Aur
Ungureanu Andrei	10	10	8	9	37	Aur
Ibram Remzi	10	10	6	10	36	Aur
Mihăilescu Ioana	10	10	6	9	35	Aur
Michnea Dragoş	10	9	8	5	32	Argint

Elevii participanţi sunt, în ordine, din Bucureşti, Iaşi, Turnu Severin, Constanţa, Botoşani. Echipa a fost condusă de Prof. Dan Brânzei (Iaşi), asistat de Prof. Dinu Şerbănescu (Bucureşti), ultimul cu activitate remarcabilă în pregătirea lotului, conceperea barajelor şi selectarea echipei.

ACTIVITATEA JURIULUI

O primă acţiune a fost de a decide gradul de dificultate a problemelor (propus de comisia de coordonare a problemelor după codificarea: E = easy = uşoară, M= medium = medie, D = difficult = grea). Rezumăm aici propunerile comisiei argumentele juriului şi etichetarea finală.

A1. Propusă D, România a remarcat că după găsirea strategiei la 4 numere nu mai rămâne aproape nimic de făcut. Devine M.

A2. Propusă E, i s-a reproşat (România) că un elev poate scrie efectiv numerele pe una, două foi, creând dificultăţi de apreciere a notei. O varianta intermediară (semnalată de Turcia), de a scrie numerele a_n de pe prima coloană cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = a_n + n$ până la depăşirea lui 2002 a apărut ca probabilă. Juriul fiind în criză de probleme de teoria numerelor s-au propus şi variante de îngreunare care să ceară şi *adresa* lui 2002^2, sau a multiplilor lui 2002. Juriul a admis posibilităţile expuse.

A3. Eticheta propusă, D, a fost acceptată; semisimetria membrului stâng a constituit argumentul decisiv, verificat şi de rezolvările concurenţilor. Liderul bulgar a prezentat şi varianta descoperirii unui *termen intermediar*. În concurs, Ungureanu Andrei a operat cu termenul intermediar simetric $\sum 1/(2ab)$.

A4 şi **A4.1.** Comisia propusese M şi D. A fost admisă remarca României că demonstrarea unei inegalităţi slabe poate fi mai grea decât a unei tari şi ambele etichete au devenit D. S+a mai comentat ca A4 este *urâtă*, iar A4.1 este *frumoasă*.

A5. Nu a fost contestată eticherta D propusă de comisie deşi se văzuse soluţia rapidă bazată pe $a^3/b^2 \ge a^2/b + a - b$.

A6. Propusă M, a rămas M.

A7. Propusă M, a rămas M. Comisia gândise o uşurare înlocuind = cu ≥ ce nu a impresionat juriul.

N1. Propusă M. România a cerut eticheta DD argumentând că, după primul pas: N *are cel mult 4 divizori*, examinarea cazurilor posibile este excesiv de anevoioasă, cea de-a doua condiţie, foarte puţin uzuală, fiind interpretabilă drept *capcană*. Argumentul, certificat de rezolvările concurenţilor nu a impresionat decisiv juriul şi eticheta a devenit D.

G1. Propusă M. România a cerut E, având în vedere posibilitatea traducerii inscriptibilității prin *puterea* lui B sau C. La balotaj s-a decis eticheta M.
G2. Propusă M, a rămas M. Deși România (și Bulgaria!) a considerat-o drept *cea mai frumoasă de geometrie* nu prea a beneficiat de voturi de popularitate, liderii apreciind că obligația de a gândi un ABC obtuz unghic ar crea dificultăți insurmontabile propriilor concurenți.
G3. Propusă D, a rămas D chiar dacă au fost suficiente voturi pentru M. Ulterior a fost scoasă din atenție ca *urâtă*.
G4. Propusă E, a rămas E. Argumentul că este cunoscută încă de la Arhimede nu a fost considerat relevant. Faptul că, pe lângă soluțiile autorului și a comisiei au apărut alte două, ușoare, a fost argument pentru popularitate. Admisă în concurs s-a dovedit ușoară și a beneficiat de soluții variate. (Cei 6 concurenți români au furnizat 5 soluții distincte).
G5. Propusă M și *amenințată* de E, a fost scoasă din atenție la afirmația Turciei că este cunoscută (cel puțin de concurenții turci).
G6. Propusă M, a rămas M fără comentarii inițiale. După alegerea ei s-a dovedit *găunoasă* și *incomodă*. Găunoasă deoarece *nu ține* când centrele sunt de aceeași parte a lui AB și incomodă deoarece *arce egale* pot fi doar în cercuri egale, măsurile arcelor referindu-se (pentru unele țări participante) la lungimile arcelor. După votarea ei neașteptată (4 pentru, o abținere, 3 contra), a devenit necesară o lungă discuție de ajustare a enunțului în limba engleză și permisiuni de a aduce precizări în traduceri. Comisia de jurizare a constata că problema obligă la considerente de orientare a căror absență trebuie penalizată cu măcar un punct (având în vedere vârsta concurenților). [Din păcate acest punct a fost pierdut și de talentatul Michnea Dragoș.] Calificativul *incomodă* a fost ratificat și de numărul mare întrebări puse de concurenți spre lămurire.
G7. Propusă D, a rămas D până când a fost exclusă din atenție ca *urâtă*.
G8. Propusă E, a rămas E. Propunerea Ciprului de a o interpreta drept problemă de combinatorică (spre a acoperi un *gol*) nu a beneficiat de adepți.

După fixarea dificultăților, juriul a decis ca testul să conțină cel puțin un E și cel puțin un D. În absența unor probleme de combinatorică s-a convenit să fie doua de geometrie. Numele țarilor propunătoare au fost comunicate ulterior juriului: A1 - Mol; A2 - Bul; A3 -Gre; A4 - Mkd; A5 -- Bul. A6 - Cyp; A6 - Mkd; N1 - Bul; G1 - Cyp; G2 - Bul; G3 - Gre; G4 -Gre; G5 - Cyp; G6 - Cyp; G7 -Yug; G8 - Yug.

Se poate aprecia ca excelentă activitatea comisiei de coordonare ce a reușit să depășească dificultățile de limbă, să corecteze independent cele 48 lucrări și să asigure, prietenos dar ferm, uniformitatea notării.

Un cuvânt final trebuie adresat excelentei organizări sprijinită de oficialitățile orașului Tg. Mureș. Competiția a marcat și celebrarea a 200 ani de la nașterea cunoscutului geometru Janos Bolyai ce a locuit in Tg. Mureș, unde a și publicat, în 1831, celebrul *Appendix* ce a revoluționat geometria.

ALGEBRA

A1-D. *A student plays a computer game. The computer provides him with 2002 positive distinct numbers randomly choosen. The game rules allows him to do the following operations:*

- *take two of the given numbers, double one of them add the second number and keep the sum;*
- *next, choose two other numbers from the remaining ones, double one of them and add the second; then multiply the sum with the previous one and keep the result;*
- *repet the above procedure until all the 2002 given numbers are used.*

The student wins the game if the last product he finally obtains is maximal.

Find, with proof, the winning strategy of the game.

Solution. Let $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2002}$ be the given numbers, and let P be the maximal value of the final product. The number P has the form

$$P = (2a_{i_1} + a_{i_2})(2a_{i_3} + a_{i_4}) \cdots (2a_{i_{2001}} + a_{i_{2002}}),$$

where $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{2002}}$ is a permutation of the given numbers.

First, remark that if $a > b$ then $2a + b > 2b + a$. Hence, the product increases when in a pair the greatest number is doubled. It follows that in P we must have $a_{i_k} > a_{i_{k+1}}$, for any $k = 1, 3, 5, , \ldots, 1001$.

Next, we prove that P contains the factor $2a_{2002} + a_1$. Indeed, when assuming the contrary, P will contain a factor of the form

$$(2a_{2002} + b)(2c + a_1).$$

The following inequality then holds

$$(2a_{2002} + b)(2c + a_1) < (2a_{2002} + a_1)(2c + b),$$

the proof of which being a simple reduction to

$$(a_{2002} - c)(b - a_1) > 0,$$

which is obvious.

The same argument than works with $\frac{P}{2a_{2002}+a_1}$ which should be maximal for $a_2, a_3 \ldots, a_{2001}$, a.s.o. Hence P maximal is given by the formula

$$P = (2a_{2002} + a_1)(2a_{2001} + a_2) \cdots (2a_{1002} + a_{1001}),$$

whence the corresponding strategy of the play.

A2-E. *All positive integers are arranged in patern as it is shown bellow*

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 2 & 5 & 9 & 14 & \dots & \\ 4 & 8 & 13 & \dots & & \\ 7 & 12 & \dots & & & \\ 11 & \dots & & & & \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Find the number of the column and the number of the row where 2002 is put.

Solution. Let a the number of the column and b the number of the row where 2002 is put.

It is easy to see that the n-th number of the first row equals $\frac{n(n+1)}{2}$. Since $\frac{62\cdot 63}{2} = 1953$ and $\frac{63\cdot 64}{2} = 2016$, and $1953 < 2002 < 2016$, we conclude that $a + b = 64$. It follows that $b = 2016 - 2002 + 1 = 15$ and $a = 64 - 15 = 49$.

A3-D. *Given positive numbers a, b, c, prove that*

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Solution. Apply the GM-AM mean inequality to the right term. One obtains:

$$\left(\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)}\right)^3 \geq \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

On the other side, by the same inequality, we have

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc,$$

and

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

These imply by multiplication

$$\frac{1}{abc(b+c)(c+a)(a+b)} \geq \frac{3^3\cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6},$$

which concludes the proof.

Alternative solution. The Cauchy-Schwartz inequality provides

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left[\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\right] \geq \left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2,$$

which implies

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{2(a+b+c)}.$$

It will thus enough to prove that

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{2(a+b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2},$$

which is the same as

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 27.$$

However we have that

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

for all positive numbers x, y, z. For $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}, c=\sqrt{z}$ we have

$$a+b+c \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3}.$$

To end the proof it will thus be enough to show that

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right) \geq 9,$$

which is equivalent to the HM-AM mean inequality.

Alternative solution; non-elementary. First observe that

$$\sum \frac{1}{b(a+b)} \geq \sum \frac{1}{c(a+b)},$$

where the summation is circular. Indeed, the above inequality reduces to

$$\sum ac^3 \geq abc \sum a,$$

which can be obtained from the Cauchy inequality by the following trick

$$\sum (\sqrt{a})^2 \sum \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

The given inequality reduces thus to the analogous for $\sum \frac{1}{c(a+b)}$. It can be easily derived by means of the Jensen inequality for the convex function $f(x) = \frac{1}{x(s-x)}$, applied to a, b, c, where $s = a + b + c$.

A4-M. *Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = \frac{9}{4}$. Prove that the following inequality holds*

$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

Solution. We shall use the inequality $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, valid for positive numbers x, y. It can be easily shown it is eqiuvalent to the obvious $(x-y)^2(x+y) \geq 0$.

Thus

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab(a+b) + c^3 \geq 2\sqrt{abc^3(a+b)} = 2\sqrt{\frac{9}{4}c^2(a+b)} = 3c\sqrt{a+b}.$$

Analogously, $a^3+b^3+c^3 \geq 3a\sqrt{b+c}$ and $a^3+b^3+c^3 \geq 3b\sqrt{c+a}$. Adding these inequalities we get the announced one.

It is easy to see that the inequality is strict, as equality implies $a + b = c = 0$.

A4.1-D (Committee's variant for A3). *Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 2$. Prove that the following inequality holds*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

When does the equality holds.

Solution. By the CS-inequality

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

and

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

By using them succesively we can write

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{3} = \frac{(a^2+b^2+c^2)((b+c)+(a+c)+(a+b))}{6} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^2}{6}. \end{aligned} \tag{1}$$

For $x = a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$, we can write using in two steps the AM-GM inequality
$$x^3 \geq 27abc\sqrt{8abc} = 27 \cdot 8,$$
that is $x \geq 6$ which used in (1) under the form $\frac{x^2}{6} \geq x$, conclude the proof.

A5-D. *Let a, b, c be positive real numbers. Prove the inequality*
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Solution. We shall make use of the inequality $\frac{a^3}{b^2} \geq \frac{a^2}{b} + a - b$, easily reduced to the obvious one $(a-b)^2(a+b) \geq 0$. In the same way
$$\frac{b^3}{c^2} \geq \frac{b^2}{c} + b - c, \quad \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{b^2}{c} + b - c.$$
The given inequality is then obtained by the addition of the previous ones.

A6-M. *If for real numbers $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, $a_1 \neq 0$, we have the relations $a_1a_6 + a_3a_4 = 2a_2a_5$ and $a_1a_3 \geq a_2^2$, show that $a_4a_6 \leq a_5^2$. When does equality holds?*

Solution. Let $a \geq 0$ given by $a_1a_3 = a_2^2 + a$. Multiplying the first given relation by a_4 one obtaines
$$a_1a_6a_4 + a_3a_4^2 = 2a_2a_5a_4, \text{ or } a_6a_4 = \frac{2a_2a_5a_4 - a_3a_4^2}{a_1}.$$
Use $a_3 = \frac{a_2^2+a}{a_1}$ in the previous relation, gives
$$a_6a_4 - a_5^2 = -\frac{(a_1a_5 - a_2a_4)^2 + aa_4^2}{a_1^2},$$
which is nonpositive.

A7-M. *We are given 2002 positive integers, a_i, $i = 1, 2, \ldots, 2002$ such that*
$$\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \cdots + \frac{1}{a_{2002}^3} \geq \frac{1}{2}$$
Prove that at least three of them must be equal.

Solution. It can easily be seen that $a_i \neq 1$, and that:

$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right),$$

for any positive integer n. If in the given sum, there were not more than two equal summands, then

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \cdots + \frac{1}{a_{2002}^3} \\ &\leq 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{1002^2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1002 \cdot 1003}, \end{aligned}$$

which is a contradiction.

Thus, there must be at least three mutually equal numbers between the given ones.

NUMBER THEORY

N1-M. *Find all positive integers N which have the following properties*

- *N has exactly 16 divisors $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$;*
- *the divisor with number d_5 is equal to $(d_2 + d_4)d_6$.*

Solution. Observe first that N has no more than 4 prime distinct divisors and $d_2 = 2$.

From the conditions in the hypothesis we must have $2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$, implying $d_4 \geq 5$. As $d_4 < d_5 \leq 2 + d_4$ we should have $d_5 = 1 + d_4$ (1) or $d_5 = 2 + d_4$ (2).

If the case (1) holds, we will have $d_6 = 2 + d_4$ which implies N multiple of 3, thus $d_3 = 3$. As $6|N$ we must have $d_4 = 6$, implying $d_5 = 7$, $d_6 = 8$, thus $4|N$ and $d_4 = 4$, a contradiction.

It remains (2): $d_5 = 2 + d_4$. We consider the following cases:

• If $4|N$, as $d_4 \geq 5$ we have $d_3 = 4$ implying $8|N$. As $d_6 \geq 8$ we must have $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. All of these cases conduct to a contradiction. For

if $d_4 = 8$ we must have $d_5 = 10$, thus $5|N$ and $d_4 = 5$, impossible;

if $d_5 = 8$ we will have $d_4 = 6$, thus $3|N$, consequently $d_3 = 3$, impossible;

if $d_6 = 8$ then $d_5 = 7$ implying $d_4 = 5$ and $10|N$. But $d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, a contradiction.

Since N is not divisible by 4 we conclude that d_3 is prime.

• If $3|N$, we deduce $d_3 = 3$. Because $6|N$ and $d_4 \geq 6$, we must have $d_4 = 6$, thus $d_5 = 8$ implying $4|N$, impossible.

Therefore 3 does not divide N and we conclude $d_3 \geq 5$ and $d_4 \geq 7$.

As N and $2 + d_4$ are not multiples of 4 we deduce that d_4 is odd. As $2 + d_4$ and d_4 are not divisible by 3 we obtain that $d_4 = 3k + 2$ for some integer k and as it is odd $d_4 = 6l + 5$

for some l. As $d_5 \leq 16$ we must have $7 \leq d_4 \leq 14$. The only possibility is $d_4 = 11$ and $d_3 = 13$. As $2d_3|N$ and $2d_3 \geq d_4$ we infer $d_3 \geq 6$. As d_3 is prime and $d_3 < 11$ we conclude $d_3 = 7$. We colect $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

GEOMETRY

G1-M. *Let ABC be a triangle, G be its barycenter and A_1, B_1, C_1 be the midpoints of the sides BC, AC, AB respectively. The parallel line to BB_1 drawn through A_1 meets B_1C_1 at the point F. Prove that the triangles ABC and FA_1A are similar, in that order, if and only if the quadrilateral AB_1GC_1 is cyclic.*

Solution. Let G be the centroid of the triangle ABC, $AA_1 = m_a, BB_1 = m_b$ and $CC_1 = m_c$. The quadrilaterals CBC_1F and CC_1AF are parallelograms.

The point D belongs to the ray $(GA_1$ such that A_1 is the midpoint of the segment GD. The quadrilateral $BGCD$ is a parallelogram with $BG = DC = \frac{2}{3}m_b$, $BD = GC = \frac{2}{3}m_c$ and $GD = \frac{2}{3}m_a$.

If the points A, B_1, G, C_1 are concyclic, then the points A, B, D, C are also concyclic. We have

$$m(\angle GAB_1) = m(\angle GC_1B_1) = m(\angle GCA_1), m(\angle BAD) = m(\angle BCD) \Rightarrow m(\angle BAC) = m(\angle DCG)$$

$$m(\angle ACB) = m(\angle AB_1C_1) = m(\angle AGC_1) = m(\angle CGD), m(\angle ADC) = m(\angle ABC).$$

Hence, the triangles CDG and ABC are similar. But, the triangles CDG and FA_1A are similar too. So, the triangles ABC and FA_1A are similar.

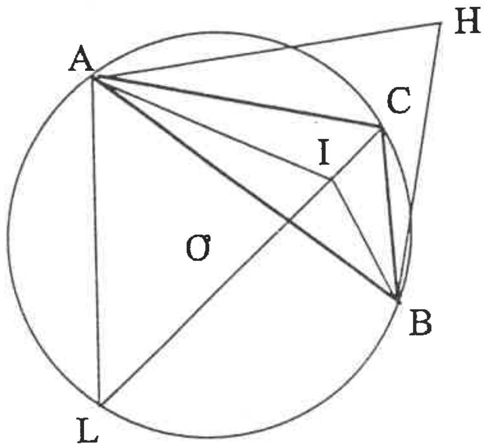
Let the triangles ABC and FA_1A are similar. Because the triangles FA_1A and CDG are similar too, we obtain that the triangles ABC and CDG are similar. So,

$$m(\angle ACB) = m(\angle CGD) = m(\angle AGC_1) = m(\angle AB_1C_1).$$

Hence, the quadrilateral AB_1GC_1 is a cyclic.

G2-M. *Let ABC be a triangle, H its orthocenter, I be the incenter and O the circumcenter. The line CI meets the circumcircle at point L. It is known that $AB = IL$ and $AH = OH$. Find the measures of the angles of ABC.*

Solution. Denote $a = \angle CAB$, $b = \angle ABC$, $c = \angle ACB$. Since $\angle IAL = \angle AIL = \frac{1}{2}(a+c)$, we have $AL = IL = AB = BL$. Hence $\angle ALB = 60°$, $\angle ACB = 120°$, $\angle AOB = 120°$.



From $\angle AHB = 180° - \angle ACB = 60°$ we obtain that A, O, B and H are concyclic. Thus we have $\angle AHO = \angle ABO = 30°$. From $AH = HO$ we obtain $\angle HAO = \angle AOH = 75°$.

Since $\angle HAC = \angle BAO = 30°$ we have $\angle HAO = 60° + a = 75°$ and $a = 15°$.

Finally $a = 15°$, $b = 45°$, $c = 120°$.

G3-D. *Let ABC be a triangle, S its area and D, E, F be arbitrary interior points on the sides BC, CA, AB respectively. The perpendicular lines at points D, E, F on the sides BC, CA, AB intersect the circumcircle in pairs of points $(D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2)$ respectively. Prove that:*

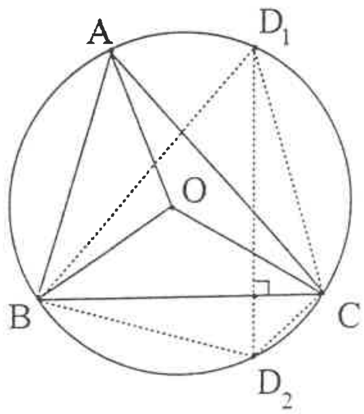
$$|D_1B \cdot D_1C - D_2B \cdot D_2C| + |E_1C \cdot E_1A - E_2C \cdot E_2A| + |F_1A \cdot F_1B - F_2A \cdot f_2B| > 4S.$$

Solution. We will prove the result in two steps. The first one is a general result.

Lemma. Let AB and D_1D_2 be a pair of perpendicular chords in a circle of center O. Then:

$$|S_{D_1AB} - S_{D_2AB}| = 2S_{AOB},$$

where S_{XYZ} denotes the area of the triangle XYZ.



Indeed, let D_1' be the symmetrical of D_1 with respect to AB. Then $\angle D_1'AB = \angle D_1AB = \angle D_1D_2B = 90^\circ - \angle ABD_2$. It follows that AD_1' is perpendicular to BD_2. Let B' the antipode of B. We infer that $B'D_2$ is parallel to AD_1', and AB' is parallel to D_1D_2. Hence, the quadrilateral $AB'D_2D_2'$ is a parallelogram and $D_2D_1' = AB' = 2OO'$, where O' is the projection of O on AB. We obtain:

$$S_{D_2AB} - S_{D_1AB} = \frac{AB \cdot D_2T}{2} - \frac{D_1T \cdot AB}{2} = \frac{AB}{2}(D_2T - D_1T)$$
$$= \frac{AB}{2} \cdot D_1D_2 = \frac{AB}{2} \cdot 2OO' = AB \cdot OO' = 2S_{AOB}$$

Remark. The lemma can be easily proved by trigonometric arguments, also. Indeed, if we denote $\angle D_2AB = \alpha$, $\angle D_2BA = \beta$, $\angle AD_2B = \gamma$ and $OA = R$, by the sine theorem we easily arrive at:

$$S_{D_2AB} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

and

$$S_{D_1AB} = 2R^2 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma$$

wence

$$S_{D_2AB} - S_{D_1AB} = 2R^2 \sin\gamma(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta) = 2R^2 \sin 2\gamma = 2S_{AOB}.$$

Returning to the proof of the given result, we will apply the lemma succesively to the pairs of perpendicular chords (BC, D_1D_2), (CA, E_1E_2) and (AB, F_1F_2). We have

$$|D_1B \cdot D_1C - D_2B \cdot d_2C| \geq |D_1B \cdot D_1C - D_2B \cdot d_2C||\sin A|$$
$$= |D_1B \cdot D_1C \sin A - D_2B \cdot d_2C \sin A|$$
$$= 2|\frac{D_1B \cdot D_1C \sin A}{2} - \frac{D_2B \cdot d_2C \sin A}{2}|.$$
$$= 2|S_{D_1BC} - S_{D_2BC}|$$

Therefore by the lemma:

$$|D_1B \cdot D_1C - D_2B \cdot d_2C| \geq S_{BOC}.$$

It is clear that $\angle A = \angle BD_1C = 180^\circ - \angle BD_2C$ and thus $\sin A = \sin\angle BD_1C \sin\angle BD_2C$.

In a similar way, we can prove the inequalities $|E_1A \cdot E_1C - E_2A \cdot E_2C| \geq 4S_{AOC}$ and $|F_1A \cdot F_1B - F_2A \cdot F_2B \geq 4S_{AOB}|$, which added give the desired result.

Equality is impossible since the equalities $\sin A = \sin B = \sin C = 1$ are simultanouslly impossible.

Remark. In fact, the left quantity in the inequality is constant for an acute triangle. It can been shown (not difficult) that it equals $4R^2(\sum \cos A) = 4R(R + r)$. This easily implies that the inequality can be improved by the lower bound to $\frac{8}{\sqrt{3}}S$.

G4-E. *Let ABC be an isosceles triangle such that $AC = BC$ and let P be a point on that arc (AB) of the circumcircle, which does not contain C. The perpendicular line from C on PB intersects PB at D. Prove that $PA + PB = 2PD$.*

Solution. From the first theorem of Ptolemy we have that

$$PA \cdot BC + PB \cdot AC = PC \cdot AB,$$

thus

$$PA + PB = \frac{PC \cdot AB}{AC}.$$

Therefore it will be enough to prove that

$$2PD = \frac{PC \cdot AB}{AC}.$$

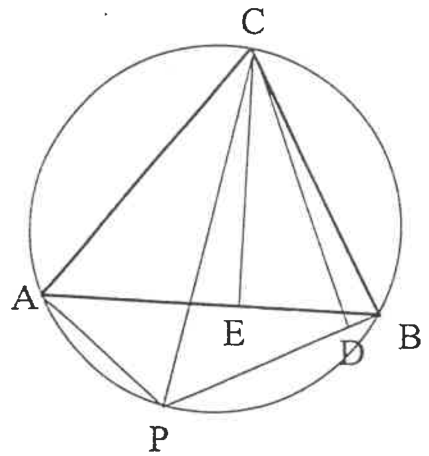
Since $CE \perp AB$, it will be equivalent to prove

$$2PD = \frac{2AE \cdot PC}{AC},$$

which is similar to

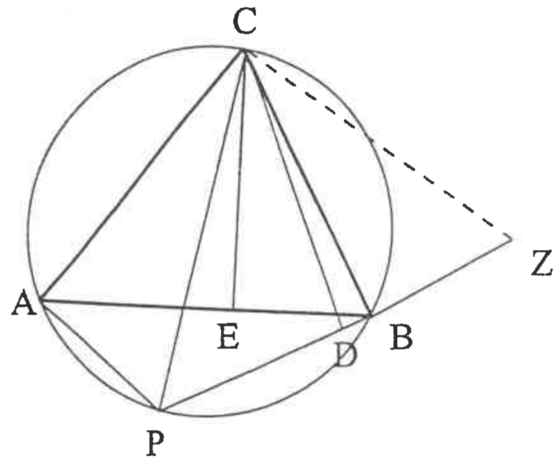
$$\frac{PD}{PC} = \frac{AE}{AC}.$$

The last equality means $\cos \angle CPB = \cos \angle CAB$, obviously true.



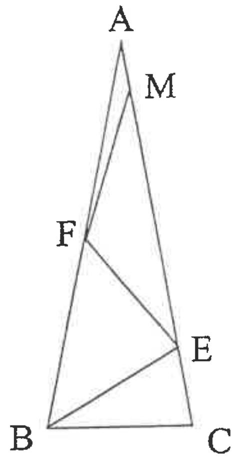
Alternative solution. We extend PB with the segment $BZ = AP$. The triangles BCZ and APC are congruent, hence $CP = CZ$ and the triangle CPZ is isosceles with $CD \perp AZ$. Thus D is the midpoint of PZ, hence

$$2PD = PZ = PB + BZ = PA + PB$$



G5-M. *Let ABC be an isosceles triangle such that $AB = AC$ and $A = 20°$. On the side AC we take a point D such that $AD = BC$. Find the angle $\angle BDC$.*

Solution. From the isosceles triangle ABC we easily find $B = \angle C = 80°$. Let E be the point on AC such that $\angle EBC = 60°$. It follows $\angle BEC = 180° - 100° = 80°$. That is $BE = BC$. Therefore $\angle ABE = 80° - 20° = 60°$. On the side AB take the point F such that $BF = BE = BC$. The triangle BEF is equilateral, so that $\angle BEF = \angle BFE = 60°$ and $FE = BE = BC$.

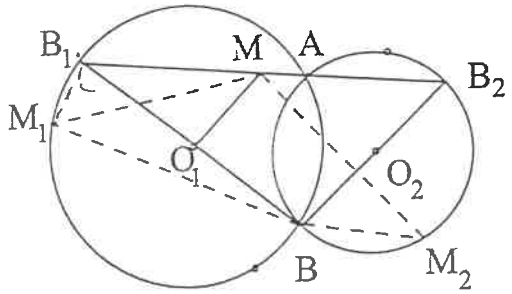


Let M be the point on AC such that $\angle FEM = 180° - 140° = 40°$. It follows $\angle FME = 40°$, thus $FM = FE = BC$. As $\angle AFM = 20°$ we infer $\angle AFM = \angle FAM$ and $AM = MF = BC$. Therefore M coincides with D. Since $FB = FM$ implies $\angle FMB = \angle FBM = \frac{180° - 160°}{2} = 10°$, we conclude $\angle FDB = 10°$. Finally $\angle BMC = 40° - 10° = 30°$.

Comment. The Problem Selection Committee considers the problem to involve known ideas.

G6-M. *Two circles C_1 and C_2 of diferent radii intersect at A and B. Let B_1 and B_2 respectively the simetric point of B with respect to the centers of C_2 and C_2 respectively and M the midpoint of the segment B_1B_2. Take points M_1 on C_1 and M_2 on C_2 such that arc(AB_1M_1) =arc(ABM_2) $< 180°$. Show that $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.*

Solution.



Obviously points B_1, A, B_2 are colinear. We have

$$MO_1 = \frac{BB_2}{2} = AO_2 \text{ and } MO_2 = \frac{BB_1}{2} = AO_1,$$

implying that the triangles MO_1A and MO_2A are congruent and therefore $\angle MO_1A = \angle MO_2A$. We conclude that the triangles MO_1M_1 and MO_2M_2 are also congruent which implies $MM_1 = MM_2$.

From the hypothesis we obtain $\angle ABM_1 = \frac{a}{2}$ and $\angle ABM_2 = 180° - \frac{a}{2}$. This gives $\angle ABM_2 + \angle ABM_1 = 180°$ and therefore the points M_1, B and M_2 are colinear. Thus the triangle MM_1M_2 is isosceles and $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.

G7-D. *Suppose that $ABCD$ is a convex quadrilateral, where $AB = AD$ and $BC = CD$. Points K, L, L_1, and K_1 are chosen in sequence on AB, BC, CD and DA sides so that the quadrilateral KLL_1K_1 is a rectangle. Then. suppose that a rectangle $MNPQ$ is inscribed in a triangle BLK , where $M \in KB$, $N \in BL$, $P, Q \in LK$, and similarly a rectangle $M_1N_1P_1Q_1$ is inscribed in a triangle DK_1L_1 where $M_1 \in DK_1$, $N_1 \in DL_1$ and $P_1, Q_1 \in L_1K_1$.*

Let $2S$ be the area of the quadrangle $ABCD$ and $2S_1, S_2$ and S_3 in sequence be the areas of rectangles $KLL_1K_1, MNPQ$ and $M_1N_1P_1Q_1$.

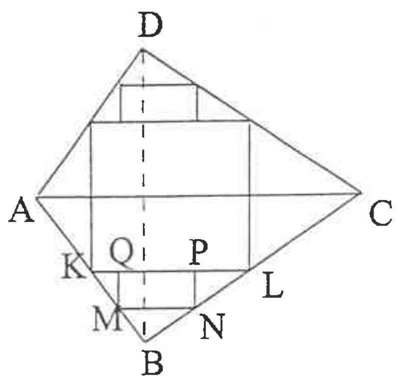
Find the highest possible value of the following expression

$$\frac{2S_1 + S_2 + S_3}{2S}.$$

Solution: The quadrangle $ABCD$ is symmetric with respect to the diagonal AC, so that it would be enough to look at the triangle ABC which includes a half of the rectangle KLL_1K_1 and the rectangle $MNPQ$. If these two rectangles are cut out of the triangle

ABC, we are left with a triangle BMN (height x) which is similar to a triangle BAC and to two pairs of right-angled triangles, which, if adequately connected, can form two more triangles similar to the triangle ABC, the heights of which we denote by y and z respectively. If P_1, P_2, and P_3 are the areas of these triangles (similar to the triangle ABC) and whose heights are x, y, and z respectively, and if S is the area of the triangle ABC, whose height is $x+y+z$, then we get:

$$\frac{P_1}{S} = \frac{x^2}{(x+y+z)^2}, \quad \frac{P_2}{S} = \frac{y^2}{(x+y+z)^2}, \quad \frac{P_3}{S} = \frac{z^2}{(x+y+z)^2}.$$



Due to the symmetry of the quadrilateral $ABCD$, to find the maximum of the quotient

$$\frac{2S_1 + S_2 + S_3}{2S}$$

is equivalent to the finding of the maximum value of the expression

$$\frac{S_1 + S_2}{S}.$$

But,

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{S - (P_1 + P_2 + P_3)}{S} = 1 - \left(\frac{P_1}{S} + \frac{P_2}{S} + \frac{P_3}{S}\right) = \frac{2(xy + yz + zx)}{(x+y+z)^2}.$$

Since $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ we infere $a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$, i.e. $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$. Thus:

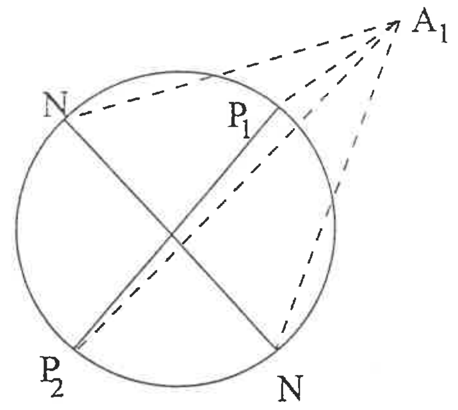
$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2(xy + yz + zx)}{(x+y+z)^2} \leq \frac{2}{3}.$$

Equation holds if and only if $x = y = z$.

G8-E. *Let $A_1, A_2, \ldots A_{2002}$ be arbitrary points in a plane. Prove that for any unit circle in the plane, and any rectangle inscribed in it, there are three vertices M, N and P of the rectangle, such that:*

$$MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_{2002} + NA_1 + \cdots + NA_{2002} + PA_1 + \cdots + PA_{2002} \geq 6006.$$

Solution. Let us notice any diameter MN of any circle in the plane. Then $2 = MN \leq MA_i + NA_i$ for each $i \in 1, \ldots 2002$. Thus, $MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_{2002} + NA_1 + NA_2 + \cdots + NA_{2002} \geq 4004$. Now, let us take another diameter P_1P_2 (different from MN) diameter. Then, we have $P_1A_1 + P_1A_2 + \cdots + P_1A_{2002} + P_2A_1 + P_2A_2 + \cdots + P_2A_{2002} \geq 4004$. The point P is the one of P_1 or P_2 for which the sum is as follows $P_1A_1 + P_1A_2 + \cdots + P_1A_{2002} \geq 2002$ or $P_2A_1 + P_2A_2 + \cdots + P_2A_{2002} \geq 2002$.



Thus, M, N and P are the three asked points.