Дончо Димовски
Костадин Тренчевски
Ристо Малчески
Борис Јосифовски

ПРАКТИКУМ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

ПРОСВЕТНО ДЕЛО

Уредник:
Кирил Милчев

Рецензенти:
д-р **Александар Самарџиски**, редовен професор на Природно-математички факултет – Скопје
д-р **Никола Пандевски**, доцент на Природно-математички факултет – Скопје
Оливера Бејковска, професор во гимназијата „Ј. Б. – Тито“ – Битола

Со одлука на Нставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје, под број 08–422/4 од 17.02.1993 година, се одобрува печатењето на оваа книга.

СОДРЖИНА

	ПРЕДГОВОР	5
1.	КОМБИНАТОРИКА	11
1.1.	Основни принципи на пребројување	13
1.2.	Биномни коефициенти	24
1.3.	Разбивања на множества	35
1.4.	Игри и стратегии	43
1.5.	Принцип на Дирихле	51
2.	ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ	63
2.1.	Деливост	63
2.2.	Ојлерова функција и прости броеви	76
2.3.	Природни броеви	88
2.4.	Цели броеви	99
3.	АЛГЕБРА	111
3.1.	Алгебарски трансформации	111
3.2.	Неравенства	124
3.3.	Полиноми	152
3.4.	Равенки и неравенки	165
3.5.	Збирови	174
4.	ГЕОМЕТРИЈА	189
4.1.	Рамнинска геометрија	189
4.2.	Просторна геометрија – геометриски места	197
4.3.	Просторна геометрија – пресметувања	214
4.4.	Просторна геометрија – односи и неравенства	232
	ЛИТЕРАТУРА	245

ПРЕДГОВОР

Книгата Практикум по елементарна математика е првенствено наменета за студентите од IV година на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје, како учебник за дел од предметот елементарна математика со практикум, но тој може да послужи и како дополнителна литература и за сите студенти на Институтите за математика и информатика при Природно-математичкиот факултет. Од учебната 1982/83 година до учебната 1989/90 година на студиите на Институтот за математика постоеја два едносеместрални предмети практикум и елементарна математика, кои во учебната 1990/91 се споени во еден предмет. Првите две години, наставата по предметот практикум ја изведуваше д-р Александар Самарџиски, а после тоа до денес, ја изведува еден од авторите на оваа книга, д-р Дончо Димовски. Материјалот во оваа книга, во основа, се состои од предавањата за предметот Практикум подготвени од д-р Дончо Димовски, со додадени поголем број задачи и од другите автори, д-р Костадин Тренчевски и м-р Ристо Малчевски, кои во последниве неколку години активно учествуваат во спроведувањето на натпреварите по математика за учениците од средните училишта во Македонија, и Борис Јосифовски кој непосредно работи со ученици од средното образование. Книгата е напишана во таква форма што слободно може да ја користат и наставниците и учениците од средното образование за додатната активност - припрема за натпревари по математика, како методска збирка на решени задачи.

Основната цел на книгата (што, всушност е, и основната цел на еден дел од предметот елементарна математика со практикум) е идните наставници по математика да се сретнат со доволен број на различни типови задачи и принципи на решавање задачи од натпревари по математика од најниско ниво - т.е. училишни и регионални натпревари, па се до највисоко ниво - т.е. меѓународни математички олимпијади, што не се опфатени во доволна мерка во останатите курсеви на студиите по математика, а коишто ќе им помогнат во нивната подготовка за работа со учениците кои пројавуваат посебен интерес кон математиката. Кажаното погоре, исто така, се однесува и за сегашните наставници по математика и за учениците од средното образование.

Во книгата има малку задачи од рамнинска геометрија, затоа што повеќето од нив се обработуваат во посебниот предмет на студиите по математика, геометриски трансформации. Многу познати теореми во материјалот се изнесени како задачи, со цел да се одржи континуитет во изнесувањето на задачите. Сите задачи во книгата се дадени со комплетни решенија, при што за некои од нив се дадени и повеќе од едно решение. Најчесто, секоја задача заедно со нејзиното решение претставува засебна целина, додека во мал број случаи решенијата на задачите зависат од други задачи. Стиловите на решавање на задачите од авторите на книгата беа усогласувани, но не во целост, со цел книгата да го опфати и аспектот на различни пристапи кон решавања и стилови на решавања на задачите.

Книгата е поделена во четири глави, што всушност претставуваат четири области, од кои од секоја најчесто се дава по една задача на натпреварите по математика.

Во првата глава, со наслов Комбинаторика, се обработени основите на комбинаториката, т.е. на изучувањето на структури, разместувања, конфигурации и сл. на елементите во конечни множества, низ задачи. Таа е поделена на пет дела, и тоа: Основни принципи на пребројување; Биномни коефициенти; Разбивања на множества; Игри и стратегии и Принцип на Дирихле. Насловот на секој дел кажува која тематика е обработено во него.

Во втората глава со наслов Теорија на броеви, обработени се основните поими од елементарната теорија на броеви, како што се: деливост; конгруенции; прости броеви; Ојлерова функција и Диофантови равенки. Оваа глава е поделена на четири дела и тоа: Деливост; Ојлерова функција и прости проеви; Природни броеви и Цели броеви.

Третата глава има наслов Алгебра. Таа е поделена на пет дела, и тоа: Алгебарски трансформации; Неравенства; Полиноми; Равенки и неравенки и Збирови. Во делот Алгебарски трансформации се изнесени најразлични задачи во чие решение се употребени типични алгебарски трансформации. Во вториот дел Неравенства, даден е еден заокружен приказ на основните елементарни неравенства на броеви, заедно со нивни примени во конкретни задачи. Во третиот дел, решени се различни задачи во врска со полиноми, додека во четвртиот дел се решени различни видови равенки и неравенки. Во делот Збирови, решени се типични задачи со конечни низи и збирови на броеви, а исто така изнесени се и неколку елементарни збирови на тригонометриски функции, при што се искористени и комплексни броеви.

Четвртата глава Геометрија е поделена во четири дела. Во првиот дел Рамнинска геометрија повеќето задачи се однесуваат на разни односи помеѓу елементите на триаголник. Во останатите три дела од оваа глава обработени се задачи од просторна геометрија (стереометрија), при што насловите на тие три дела кажуваат какви типови задачи се решени во секој од нив.

Април 1992 — Авторите

Скопје

1. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаториката како дел од математиката се занимава со изучување на структури, шеми, дизајни, распореди, разместувања и конфигурации на објекти од дадено конечно множество. Обично луѓето под зборот комбинаторика разбираат само: "пермутации, комбинации и варијации", но комбинаториката не е само тоа. Постојат три основни проблеми со кои се занимава комбинаториката. Тоа се: проблемот за постоење; проблемот на пребројување и проблемот на оптимизација. Проблемот за постоење се занимава со прашањето дали постои барем една конфигурација. Проблемот на пребројување го разгледува прашањето колкав е бројот на конфигурации од даден тип, додека третиот проблем се занимава со избирање од сите можни конфигурации на онаа која е најдобра според дадени критериуми.

Ќе дадеме неколку типични примери на комбинаторни задачи.

1. Дали постои разместување на броевите 1,2,3,4 на квадратна 4×4 табла, така што секој број се појавува точно по еднаш во секој ред и секоја колона?

2. Може ли десет компјутери да се поврзат така што секој компјутер ќе биде поврзан со по точно четири од преостанатите?

3. На колку различни начини можат да седнат три девојчиња и две момчиња на тркалезна маса со пет столчиња?

4. Дали е можно три девојчиња и две момчиња да седнат на тркалезна маса со пет столчиња, така што од двете страни на секое девојче да се наоѓа момче?

5. Колкав е бројот на сите природни броеви помеѓу 1 и 100 што не се деливи со 21?

Во решавањето на комбинаторните задачи најчесто е потребно со помош на некоја досетка да се направи добра претпоставка која потоа се докажува најчесто со математичка индукција, но сепак, постојат и општи принципи и методи за решавање на комбинаторни задачи. Такви принципи и методи се, на пример, следниве: *Воспоставување биекции помеѓу две множества; Разгледување на множеството од пресликувања од едно во друго множество; Броење на елементи во комплемент на дадено подмножесто; Рекурзивни релации; Принципот на Дирихле; Теорија на графови и слично.*

1.1. ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ НА ПРЕБРОЈУВАЊЕ

Во понатамошниот текст ќе ги користиме следните поими и ознаки. Ако n *е природен број, т.е.* n *припаѓа на множеството природни броеви* $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\ldots\}$, *нека* $\mathbb{N}_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$. *Едно множество* S *се вика* **конечно**, *ако постои биекција од* $\mathbb{N}_n$ *во* S *за некој* $n\in\mathbb{N}$. *Во тој случај се вели дека* S *има* n *елементи и тоа се означува со* $\varkappa(S)=n$, *или со* $|S|=n$, *или со* $k(S)=n$, *или со* $\mathrm{card}S=n$. *Ние ќе ја користиме ознаката* $|S|=n$. *Понатаму множествата ќе бидат конечни, ако поинаку не е кажано. За пребројување на елементите во множества најчесто се користат следните три принципи.*

Задача 1. (Принцип на еднаквост) *Ако постои биекција помеѓу* A *и* B, *тогаш* $|A|=|B|$.

Решение. Нека $f:B\to A$ и $g:A\to\mathbb{N}_n$ се биекции. Тогаш и $g\circ f:B\to\mathbb{N}_n$ е биекција. ∎

Задача 2. (Принцип на збир)

(а) Ако $A\cap B=\emptyset$, *тогаш* $|A\cup B|=|A|+|B|$;

(б) Ако $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ *е семејство од* n *по парови дисјунктни множества, т.е. семејство од* n *множества такви што за секои* $1\le i\ne j\le n$ *важи* $A_i\cap A_j=\emptyset$, *тогаш*

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|.$$

Решение. (а) Нека $f:A\to\mathbb{N}_n$ и $g:B\to\mathbb{N}_m$ се биекции. Тогаш $h:A\cup B\to\mathbb{N}_{n+m}$ дефинирано со $h(a)=f(a)$ за $a\in A$ и $h(b)=g(b)+n$ за $b\in B$ е добро дефинирано, и уште повеќе е биекција. Значи, $|A\cup B|=|A|+|B|$.

(б) Доказот на (б) се изведува со помош на (а) и математичка индукција по n. Да забележиме дека (а) се добива од (б) за n=2. ■

Задача 3. (Принцип на производ) *Директен (картезиев) производ на конечни множества е конечно множество и неговиот број на елементи е производ од броевите на елементите на соодветните множества, т.е.*

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|.$$

Решение. Доказот се изведува со математичка индукција по n. За n=1 тврдењето е тривијално. Тврдењето за n=2, т.е. тврдењето дека $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ се докажува со математичка индукција по $|B|$. Затоа, нека $B=C\cup\{a\}$ за $a\notin C$. Тогаш, $A\times B=(A\times C)\cup(A\times\{a\})$, при што $(A\times B)\cap(A\times\{a\})=\emptyset$. Од принципот на збир и индуктивната претпоставка следува дека:

$$|A\times B|=|A\times C|+|A\times\{a\}|=|A|\cdot|C|+|A|\cdot 1=|A|\cdot(|C|+1)=|A|\cdot|B|.\ ■$$

Задача 4. (Принцип на исклучување) *Ако* $A\subseteq M$, *тогаш*

$$|M\setminus A|=|M|-|A|.$$

Решение. Од $M=A\cup(M\setminus A)$ и од $A\cap(M\setminus A)=\emptyset$, според принципот на збир, следува дека $|M|=|A|+|M\setminus A|$, т.е. $|M\setminus A|=|M|-|A|$. ■

Принципот на исклучување ја има и следнава форма:

Задача 5. (Принцип на вклучување) *За произволни множества* A *и* B *важи:*

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

Решение. Нека $M=A\cup B$. Тогаш од принципот на исклучување, следува дека $|M|=|A|+|M\setminus A|$. Но бидејќи $M\setminus A=B\setminus(A\cap B)$, т.е. $B=(M\setminus A)\cup(A\cap B)$, и $(M\setminus A)\cap(A\cap B)=\emptyset$, од принципот на збир следува дека $|B|=|M\setminus A|+|A\cap B|$. Според тоа,

$$|A\cup B|=|A|+|M\setminus A|=|A|+|B|-|A\cap B|. \ \blacksquare$$

Принципот на исклучување го има и следново обопштување.

Задача 6. (Обопштен принцип на исклучување) *Нека* $A_i\subseteq M$, *и нека* $\bar{A}_i=M\setminus A_i$ *за* $i=1,2,\ldots,n$. *Тогаш:*

$$|\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_n|=$$

$$=|M|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap\ldots\cap A_n|. \quad (1)$$

Според Де Моргановото правило (Пресек на комплементи е комплемент на унија) обопштениот принцип на исклучување е еквивалентен со следниов **обопштен принцип на вклучување:**

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=$$

$$=\sum|A_i|-\sum|A_i\cap A_j|+\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|. \quad (2)$$

За попрецизно запишување на горните равенства ги користиме следниве ознаки. За едно подмножество индекси $I=\{i_1,\ldots,i_t\}\subseteq\mathbb{N}_n$, *нека* $A_I=A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_t}$. *Тогаш* (1) *и* (2) *можат да се запишат како:*

$$|\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_n| = |M|-\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|I|}|A_I|, \quad \text{и} \quad (1')$$

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|I|-1}|A_I|. \quad (2')$$

Решение. Доказот на (2), т.е. на (2') се изведува со индукција по n. За n=1 тврдењето е тривијално, а за n=2 тоа е задача 5. Нека (2), т.е. (2') е точно за n. Тогаш:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n\cup A_{n+1}| = |(A_1\cup\ldots\cup A_n)\cup A_{n+1}| =$$

$$= |A_1\cup\ldots\cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1\cup\ldots\cup A_n)\cap A_{n+1}|$$

$$= |A_1\cup\ldots\cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1\cap A_{n+1})\cup\ldots\cup(A_n\cap A_{n+1})|$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|-1}|A_I| - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|-1}|A_{I\cup\{n+1\}}| + |A_{n+1}|$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq \mathbb{N}_{n+1}} (-1)^{|I|-1}|A_I| \; . \; \blacksquare$$

Задача 7. *Во едно одделение има 30 ученици. Од нив, десет ученици имаат оценка пет по математика, 20 ученици имаат оценка пет по историја, додека 27 ученици имаат барем една оценка пет по предметите математика и историја. Колку ученици имаат оценка пет по двата предмети математика и историја?*

Решение. Нека A е множеството ученици што имаат оценка пет по математика и нека B е множеството ученици што имаат оценка пет по историја. Од условите во задачата, $|A|=10$, $|B|=20$ и $|A\cup B|=27$. а се бара $|A\cap B|$. Од принципот на исклучување следува дека:

$$27=|A\cup B|=10+20-|A\cap B|, \text{ т.е. } |A\cap B|=10+20-27=3.$$

Значи, 3 ученици имале оценка пет и по математика и по историја. ∎

Задача 8. *Да се најде бројот на сите броеви $1\leq k<100$ кои не се деливи ни со 2, ни со 3, ни со 7.*

Решение. Нека $M = \mathbb{N}_{99}$, $A_1 = \{k \mid k\in M,\ 2 \text{ е делител на } k\}$, $A_2=\{k\mid k\in M,\ 3 \text{ е делител на } k\}$ и $A_3=\{k\mid k\in M,\ 7 \text{ е делител на } k\}$. Тогаш, бараниот број е

$$|M\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3)|=99-49-33-14+16+7+4-2=28. \; \blacksquare$$

Задача 9. *Во едно одделение има 30 ученици. Секој ученик има оценка пет по географија или по математика. Од нив: 5 ученици имаат пет по математика и по географија; 16 ученици имаат пет по историја и по географија; 20 ученици имаат пет по географија и 25 ученици имаат пет по историја. Колку ученици имаат пет по историја или по географија, а колку ученици имаат пет по математика?*

Решение. Нека М, Г, И се множествата од учениците што имаат соодветно пет по математика, географија, историја. Од условите на задачата: $|Г|=20$, $|И|=25$, $|М\cap Г|=5$, $|И\cap Г|=16$ и $|М\cup Г|=30$, а се бара $|И\cup Г|$ и $|М|$. Од принципот на исклучување, следува дека:

$$|И\cup Г|=|И|+|Г|-|И\cap Г|=25+20-16=29,$$

т.е. 29 ученици имале пет барем по еден од предметите историја и географија. На ист начин, од

$$30=|М\cup Г|=|М|+|Г|-|М\cap Г|=|М|+20-5,$$

следува дека $|М|=15$, т.е. 15 ученици имале оценка пет по математика. ∎

Задача 10. *Во едно училиште на испит по математика биле дадени три задачи од: алгебра, геометрија и тригонометрија. Испитот го полагале 1000 ученици. Задачата по алгебра ја решиле 800 ученици; по геометрија 700 ученици, а по тригонометрија 600 ученици. Двете задачи по алгебра и геометрија ги решиле 600 ученици; по алгебра и тригонометрија ги решиле 500 ученици, а по геометрија и тригонометрија ги решиле 400 ученици. Сите задачи биле решени од 300 ученици. Колку ученици не решиле ни една задача?*

Решение. Нека А, Г, Т се множествата од ученици што ја решиле соодветно задачата од алгебра, геометрија, тригонометрија, а нека М е множеството од сите ученици што биле на испит. Тогаш: $|A|=800$, $|Г|=700$, $|T|=600$, $|A\cap Г|=600$, $|A\cap T|=500$, $|Г\cap T|=400$ и $|A\cap Г\cap T|=300$, а се бара $|M\setminus(A\cup Г\cup T)|$. Од принципот на исклучување:

$$\begin{aligned}|M\setminus(A\cup Г\cup T)|&=|M|-|A|-|Г|-|T|+|A\cap Г|+|A\cap T|+|Г\cap T|-|A\cap Г\cap T|\\&=1000-800-700-600+600+500+400-300=100.\end{aligned}$$

Значи, 100 ученици не решиле ни една задача. ■

Задача 11. *Од 100 ученици: 24 не учат ни еден од јазиците англиски, руски и германски; 48 учат англиски; 8 и англиски и руски; 26 учат германски; 8 учат и германски и англиски; 13 учат и германски и руски; и 28 учат руски. Колку ученици ги учат трите јазици?*

Решение. Нека со A, P, Г се означени множествата на ученици што учат соодветно англиски, руски, германски, а нека со M е означено множеството од сите 100 ученици. Тогаш: $|A|=48$, $|Г|=26$, $|P|=28$, $|A\cap Г|=8$, $|A\cap P|=8$, $|Г\cap P|=13$ и $|M\setminus(A\cup Г\cup P)|=24$, а се бара $|A\cup Г\cup P|$. Од принципот на исклучување следува дека:

$$\begin{aligned}24=|M\setminus(A\cup Г\cup P)|&=|M|-|A|-|Г|-|P|+|A\cap Г|+|A\cap P|+|Г\cap P|-|A\cap Г\cap P|\\&=100-48-26-28+8+8+13-|A\cap Г\cap P|=27-|A\cap Г\cap P|,\end{aligned}$$

т.е. $|A\cap Г\cap P|=27-24=3$. ■

Задача 12. *Во едно одделение учат 25 ученици. Некои од нив се занимаваат со спортовите кошарка, пливање и ракомет. Така, 17 ученици се кошаркари, 13 се пливачи и 8 се ракометари. Ниеден ученик не се занимава со трите спортови. Сите ученици што се занимаваат со овие спортови имаат 3 или 4 по математика, додека 6 ученици имаат 1 по математика. Колку ученици имаат 5 по математика? Колку пливачи се и ракометари?*

Решение. Нека со К, П, Р се означени множествата на ученици што се соодветно кошаркари, пливачи, ракометари, а нека со С е означено множеството од сите ученици што се занимаваат со некоj од тие три спортови. Нека со О, Е се означени множествата на ученици што имаат соодветно 5, 1 по математика, а со Д нека е означено множеството ученици што имаат 2, 3, 4 или 5 по математика. Тогаш: $|К|=17$, $|П|=13$, $|Р|=8$, $|Е|=6$, $|К\cap П\cap Р|=0$, $|О\cap С|=0$, $|Е\cap С|=0$, $С\subseteq Д$, $О\subseteq Д$, а се бара $|О|$ и $|П\cap Р|$. Од принципите на еднаквост, збир и исклучување се добиваат следниве заклучоци:

(1) $|Д|=25-6=19$ и $\{|С|\leq 19$.

(2) $17=|К|\geq|(К\cap П)\cup(К\cap Р)|=|К\cap П|+|К\cap Р|-|К\cap П\cap Р|=|К\cap П|+|К\cap Р|$.

(3) $8=|Р|\geq|(Р\cap П)\cup(К\cap Р)|=|Р\cap П|+|К\cap Р|-|К\cap П\cap Р|=|Р\cap П|+|К\cap Р|$.

(4) $13=|П|\geq|(К\cap П)\cup(П\cap Р)|=|К\cap П|+|П\cap Р|-|К\cap П\cap Р|=|К\cap П|+|П\cap Р|$.

(5) $|С|=|К|+|Р|+|П|-|К\cap Р|-|К\cap П|-|П\cap Р|+|К\cap П\cap Р|$
$=17+8+13-|К\cap П|-|К\cap Р|-|П\cap Р|$.

(6) Од (1), (2) и (5) следува $19\geq 38-17-|П\cap Р|$, т.е. $|П\cap Р|\geq 2$.

(7) Од (1), (3) и (5) следува $19\geq 38-8-|П\cap К|$, т.е. $|П\cap К|\geq 11$.

(8) Од (4), (6) и (7) следува $|К\cap П|+|П\cap Р|=13$, т.е. $|К\cap П|=11$ и $|П\cap Р|=2$. Значи, 2 пливачи се и ракометари.

(9) Од (3), (5) и (8) следува дека $|К\cap Р|=6$.

Од горната дискусиjа следува дека $|С|=19$, што повлекува дека $С=Д$. Од тоа што $О\cap С=\varnothing$ и $О\cup С\subseteq Д$ следува дека .

$$19=|Д|\geq|О|+|С|=|О|+19.$$

Значи, $|О|=0$, т.е. ниеден од учениците нема пет по математика. ∎

Задача 13. *Нека* $|M|=n$. *Тогаш* $|\mathcal{P}(M)|=2^{|M|}=2^n$, *каде што* $\mathcal{P}(M)$ *е партитивното множество (т.е. булеанот* $\mathcal{B}(M)$*) на* M: $\mathcal{P}(M)=\{X\,|\,X\subseteq M\}$.

Решение. Доказот е со математичка индукција.

(1) Ако $M=\emptyset$, т.е. $|M|=0$, тогаш $|\mathcal{P}(M)|=|\{\emptyset\}|=1=2^0$.

(2) Ако $M=\{1\}$, т.е. $|M|=1$, тогаш $|\mathcal{P}(M)|=|\{\emptyset\},M|=2=2^1$.

(3) Нека $|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$ за секое множество A со $|A|=n-1$, нека $|M|=n$ и нека $a\in M$. Ги формираме множествата:

$$\mathcal{P}(M)_1=\{X \mid X\subseteq M,\ a\in X\} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(M)_2=\{X \mid X\subseteq M,\ a\notin X\}.$$

Од дефиницијата на $\mathcal{P}(M)_2$ следува дека

$$|\mathcal{P}(M)_2|=|\mathcal{P}(M\setminus\{a\})|=2^{n-1}.$$

Нека $f:\mathcal{P}(M)_1\to\mathcal{P}(M)_2$ е дефинирано со $f(X)=M\setminus X$. Од тоа што $X\in\mathcal{P}(M)_1$ акко $M\setminus X\in\mathcal{P}(M)_2$, следува дека f е добро дефинирано, и уште повеќе е биекција. Бидејќи $\mathcal{P}(M)_1\cap\mathcal{P}(M)_2=\emptyset$ и $\mathcal{P}(M)=\mathcal{P}(M)_1\cup\mathcal{P}(M)_2$, од принципите на еднаквост и збир следува дека: $|\mathcal{P}(M)|=|\mathcal{P}(M)_1|+|\mathcal{P}(M)_2|=2\cdot|\mathcal{P}(M)_2|=2\cdot 2^{n-1}=2^n$. ∎

Задача 14. *Нека* $|A|=n$ *и нека* $|B|=m$, *за* $n\geq 0$ *и* $m\geq 1$. *Да се докаже дека множеството од сите пресликувања* $B^A=\{f \mid f:A\to B\}$ *од* A *во* B *има* $|B|^{|A|}=m^n$ *елементи, т.е.* $|B^A|=|B|^{|A|}=m^n$.

Решение. Нека $C=B\times\ldots\times B$ е Картезиевиот производ на $n\geq 1$ копии од B, т.е. $C=B^n$. Нека $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$. Нека $\varphi:B^A\to C$ е дефинирано со $\varphi(f)=(f(a_1),\ldots,f(a_n))\in C$ за $f:A\to B$, и нека $\psi:C\to B^A$ е дефинирано со $\psi(b_1,\ldots,b_n)(a_i)=b_i$, за $(b_1,\ldots,b_n)\in C$ и секој $a_i\in A$. Од дефинициите на φ и ψ следува дека тие се добро дефинирани и уште повеќе се биекции инверзни една на друга. Тогаш од принципот на производ следува дека $|B^A|=|B\times\ldots\times B|=|B|^n=m^n$. За $n=0$, т.е. $A=\emptyset$, по договор постои единствено пресликување од A во B, па и во овој случај $|B^A|=1=m^0$. ∎

Задача 15. *Нека* $|A|=n$ *за* $n\geq 0$. *Да се најде бројот на сите биекции од* A *во* A.

Решение. Нека $Per(A)$ е множеството од сите биекции на A, нека $Bi(\mathbb{N}_n,A)$ е множеството од сите биекции од $\mathbb{N}_n$ во A и нека $p(n)=|Per(A)|$. Нека $F:\mathbb{N}_n\to A$ е фиксирана биекција. Тогаш $\zeta:Per(A)\to Bi(\mathbb{N}_n,A)$ дефинирано со $\zeta(g)=g\circ F$ е биекција, па $|Per(A)|=|Bi(\mathbb{N}_n,A)|$.

За $n=0$, како во претходната задача, постои единствена биекција од $\emptyset$ во $\emptyset$, па во тој случај бараниот број е $p(0)=1$. Нека понатаму $n\geq 1$.

За $n=1$ постои единствена биекција од $\{1\}$ во $\{a\}$, па значи $|Per(A)|=p(1)=1$.

За $n=2$ постојат две биекции: $f,g:\{1,2\}\to\{a,b\}$ дефинирани со $f(1)=g(2)=a$ и $f(2)=g(1)=b$. Значи $|Per(A)|=p(2)=2$.

Нека $n\geq 2$. За секој $x\in A$, нека $A_x=A\setminus\{x\}$ и нека $Bi(A,x)=\{f\,|\,f\in Bi(\mathbb{N}_n,A),\ f(n)=x\}$. Тогаш $\varphi:Bi(\mathbb{N}_{n-1},A_x)\to Bi(A,x)$ дефинирано со $\varphi(g)(i)=g(i)$ за $1\leq i\leq n-1$ и $\varphi(g)(n)=x$ е биекција, па според тоа $|Bi(A,x)|=|Bi(\mathbb{N}_{n-1},A_x)|=p(n-1)$. Бидејќи секоја биекција f од $\mathbb{N}_n$ во A мора да го испрати n во некој елемент $x\in A$, следува дека $f\in Bi(A,x)$, што значи дека $Bi(\mathbb{N}_n,A)\subseteq\cup Bi(A,x)$ каде што унијата е по сите $x\in A$. Бидејќи секое $Bi(A,x)\subseteq Bi(\mathbb{N}_n,A)$, следува дека $Bi(\mathbb{N}_n,A)=\cup Bi(A,x)$. Од друга страна, за $x\neq y$ од A, $Bi(A,x)$ и $Bi(A,y)$ се дисјунктни, па според принципот на збир, $|Bi(\mathbb{N}_n,A)|=\sum|Bi(A,x)|$ каде што сумата е по сите $x\in A$. Бидејќи за секој $x\in A$, $|Bi(A,x)|=p(n-1)$ и бидејќи такви x има точно n, следува дека $p(n)=n\cdot p(n-1)$.

Понатаму, со едноставна индукција се докажува дека за $n\geq 1$, $p(n)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Бројот $p(n)$ се означува со $n!$ и се чита n-факториел. Од горната дискусија, бидејќи $p(0)=1$, се пишува $0!=1$. ∎

Задача 16. *Нека* $|A|=n$ *и нека* $m\in\mathbb{N}$. *Да се најде бројот на сите* m*-пермутации на* A, *каде што* m*-пермутација на* A *е подредена* m*-торка* $(a_1,\dots,a_m)\in A^m$ *составена од различни елементи, т.е.* $a_i\neq a_j$ *за* $i\neq j$.

Решение. Бараниот број се означува со $P(n,m)$, при што по дефиниција, $P(n,0)=1$ и $P(n,m)=0$ за $n<m$. Нека $(a_1,\dots,a_m)$ е m-пермутација на A. Тогаш a_1 може да се избере на n-начини; бидејќи $a_2\neq a_1$, a_2 може да се избере на $(n-1)$-начини и така натаму; ако е избрана r-тата компонента a_r, тогаш $(r+1)$-та компонента може да се избере на $(n-r)$-начини. Според принципот на производ,

$$P(n,m)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+2)\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\ . \ ■$$

Задача 17. *Колку има непарни броеви помеѓу 100 и 1000 со различни цифри.*

Решение. Секој број помеѓу 100 и 1000 е подредена тројка броеви (a_1,a_2,a_3), при што

$$a_3\in A=\{1,3,5,7,9\},\ a_2\in B=\{0,1,2,\dots,9\} \text{ и } a_1\in C=\{1,2,\dots,9\}.$$

Бидејќи сите броеви a_1,a_2,a_3 треба да се различни, следува дека a_3 може да се избере на 5 начини, потоа a_1 може да се избере на 8 начини, и на крајот a_2 може да се избере на 8 начини. Според тоа, бараниот број е еднаков на $5\cdot8\cdot8=320$. ■

Задача 18. *Да се докаже дека бројот на сите инјекции од* $\mathbb{N}_n$ *во множество* A *со* m *елементи е еднаков на бројот* $P(m,n)$ *на сите* n*-пермутации на* A..

Решение. За $n>m$, бараниот број е 0, а $P(m,n)=0$ по дефиниција. Затоа нека $0\leq n\leq m$. Нека $In(\mathbb{N}_n,A)$ е множеството од сите инјекции од $\mathbb{N}_n$ во A и нека $Per(n,A)$ е множеството на сите n-пермутации на A. Тогаш $Per(A,n)\subseteq A^n$, и слично како во задача 14, се докажува дека

$$\varphi: In(\mathbb{N}_n, A) \to Per(A, n) \quad \text{и } \psi: Per(A, n) \to In(\mathbb{N}_n, A)$$

дефинирани со:

$$\varphi(f) = (f(1), \ldots, f(n)) \quad \text{и } \psi(a_1, \ldots, a_n)(i) = a_i$$

се добро дефинирани биекции инверзни една на друга. Значи

$$|In(\mathbb{N}_n, A)| = P(m, n).$$

Ова дава уште едно решение на задача 15, бидејќи за $n=m$, $In(\mathbb{N}_n, A) = Bi(\mathbb{N}_n, A)$, па $p(n) = P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$. ■

1.2. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Нека A *е множество со* n *елементи и нека* $m\in\mathbb{N}^0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. *Со* $\mathcal{P}_m(A)$ *се оначува множеството од сите* m-*елементни подмножества од* A, *т.е.* $\mathcal{P}_m(A)=\{X \mid X\subseteq A,\ |X|=m\}$. *Со други зборови,* $\mathcal{P}_m(A)$ *е множеството од сите* m-*комбинации на* A. *Бројот* $|\mathcal{P}_m(A)|$ *се означува со* $\binom{n}{m}$, *и најчесто се нарекува биномен коефициент. Јасно дека за* $m>n$, $\mathcal{P}_m(A)=\emptyset$, *па* $\binom{n}{m}=0$. *Исто така,* $\binom{0}{m}=0$.

Задача 1. *Да се докаже дека за биномните коефициенти* $\binom{n}{m}$, $0\le m\le n$, *важат следниве равенства:*

(1) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$;

(2) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$;

(3) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ *и*

(4) $\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}$ *(Паскалово правило).*

Решение. Равенствата (1) и (2) следуваат директно од дефиницијата на $\binom{n}{m}$. Фактот дека $X\in\mathcal{P}_m(A)$ акко $A\setminus X\in\mathcal{P}_{n-m}(A)$, повлекува дека постои биекција помеѓу $\mathcal{P}_m(A)$ и $\mathcal{P}_{n-m}(A)$, што значи дека важи (3). За доказ на (4), нека $A=C\cup\{a\}$, $|C|=n$ и $a\notin C$. Нека:

$$\mathcal{P}_m(A)_1=\{X \mid X\in\mathcal{P}(A),\ |X|=m,\ a\notin X\}, \quad \text{и}$$

$$\mathcal{P}_m(A)_2=\{X \mid X\in\mathcal{P}(A),\ |X|=m,\ a\in X\} .$$

Од дефиницијата на $\binom{n}{m}$ следува дека:

$$|\mathcal{P}_m(A)_1|=|\mathcal{P}_m(C)|=\binom{n}{m} \quad \text{и} \quad |\mathcal{P}_m(A)_2|=|\mathcal{P}_{m-1}(C)|=\binom{n}{m-1}.$$

Од дефиницијата на $\mathcal{P}_m(A)_i$ следува дека:

$$\mathcal{P}_m(A)=\mathcal{P}_m(A)_1\cup\mathcal{P}_m(A)_2 \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_m(A)_1\cap\mathcal{P}_m(A)_2=\varnothing.$$

Според тоа,

$$\binom{n+1}{m}=|\mathcal{P}_m(A)|=|\mathcal{P}_m(A)_1|+|\mathcal{P}_m(A)_2|=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}. \blacksquare$$

Задача 2. *Да се докаже дека за* $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^0$, $m\le n$,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}.$$

Решение. Нека A има n елементи и нека $A_1,\ldots,A_t$ се сите различни m-подмножества од A. Нека за секој $1\le i\le t$, C_i е множеството од сите пермутации на A_i. Тогаш сите множества C_i помеѓу себе се дисјунктни; нивната унија $C_1\cup\ldots\cup C_t$ е множеството од сите m-пермутации на A; за секој i, $|C_i|=m!$ и $t=\binom{n}{m}$. Според тоа:

$$\frac{n!}{(n-m)!}=|C_1\cup\ldots\cup C_t|=t\cdot m! \text{ , т.е. } \binom{n}{m} = t = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}. \blacksquare$$

Задача 3. *Во рамнина се дадени* m *точки од кои никои три не се колинеарни. Да се најде бројот на сите:*

(а) отсечки со краеви во дадените точки и

(б) триаголници со врвови во дадените точки.

Решение. Бидејќи ниедни три точки не се колинеарни, бараниот број на отсечки е еднаков со бројот на двоелементните подмножества, додека бараниот број на триаголници е еднаков со бројот на триелементните подмножества од даденото множество точки.

Значи, бараниот број на отсечките е $\binom{n}{2}$, додека на триаголниците е $\binom{n}{3}$. $\blacksquare$

Задача 4. *На колку различни начини можат да се наредат* n *нули и* k *единици така што да нема две последователни единици.*

Решение. Може да се воспостави биекција помеѓу k-елементните подмножества $S \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ и таквите редења на цифрите 0 и 1 на следниов начин:

$$p \in S \iff \text{после } p\text{-тата нула стои цифрата } 1.$$

На пример,

$$101001000101 \quad \leftrightarrow \quad \{0, 1, 3, 6, 7\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Затоа бараниот број е $\binom{n+1}{k}$. ■

Задача 5. *Колку има природни броеви помали од* 10^6, *деливи со 5 и во чиј декаден запис нема исти цифри?*

Решение. Постои само еден едноцифрен број со наведените својства и тоа е бројот 5. Постојат седумнаесет двоцифрени броеви со наведените својства од кои осум завршуваат на 5, а девет завршуваат на 0. Броевите кои имаат k $(3 \leq k \leq 6)$ различни цифри и завршуваат на 5 ги има $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdots (11-k)$, бидејќи првата цифра може да се избира на 8, втората на 8, третата на 7, ..., претпоследната цифра на $11-k$ независни начини. Аналогно броевите кои завршуваат на 0 и имаат k $(3 \leq k \leq 6)$ меѓусебно различни цифри ги има $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots (11-k)$. Вкупно такви броеви има

$$1+(8+9)+(8+9) \cdot 8+(8+9) \cdot 8 \cdot 7+(8+9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6+(8+9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5=35378. \ ■$$

Задача 6. *Од 8 жени и 5 мажи се избира делегација. На колку начини може да се избере делегација:*

(а) од 5 луѓе од кои 2 се жени и 3 се мажи?

(б) од 5 луѓе од кои барем 2 се жени?

(в) од 5 луѓе од кои 1 е однапред определена жена?

Решение. (а) Две жени можат да се изберат на $\binom{8}{2}$ начини а три мажи на $\binom{5}{3}$ начини. Значи, бараниот број е $28\cdot 10=280$.

(б) Може да има 2 жени; 3 жени; 4 жени; или 5 жени. Според тоа бараниот број е

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{8}{4}\cdot\binom{5}{1}+\binom{8}{5}\cdot\binom{5}{0}=1246.$$

(в) Еден член во делегацијата да биде однапред определена жена, значи преостанатите 4 членови да се изберат од множество од 8+5-1 луѓе. Значи бараниот број е $\binom{12}{4}=495$. ■

Задача 7. *Да се докаже дека за секој* $n\geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Решение. Нека M е множество со n елементи. Тогаш.

$$|\mathcal{P}(M)|=2^n,\quad \mathcal{P}(M)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k(M) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_k(M)\cap\mathcal{P}_t(M)=\emptyset \text{ за } k\neq t.$$

Според тоа,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}|\mathcal{P}_k(M)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ .\ ■$$

Задача 8. *Да се докаже дека за секој* $n>0$, *важи:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Решение. Нека M е множество со n елементи и нека:

$$\mathcal{P}_{пар}(M)=\{X|\ X\subseteq M,\ |X| \text{ е парен број}\};$$

$$\mathcal{P}_{непар}(M)=\{X|\ X\subseteq M,\ |X| \text{ е непарен број}\}.$$

Нека $a\in M$ е некој фиксиран елемент и нека $f:\mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(M)$ е дефинирано со $f(X)=(X\cup\{a\})\setminus(X\cap\{a\})$. Со други зборови, ако $a\in X$, тогаш $f(X)=X\setminus\{a\}$, додека ако $a\notin X$, тогаш $f(X)=X\cup\{a\}$. Од дефиницијата на f следува дека: $f(f(X))=X$, $X\in\mathcal{P}_{пар}(M)$ акко $f(X)\in\mathcal{P}_{непар}(M)$ и $X\in\mathcal{P}_{непар}(M)$ акко $f(X)\in\mathcal{P}_{пар}(M)$. Според тоа, f определува биекција $g:\mathcal{P}_{пар}(M)\to\mathcal{P}_{непар}(M)$, што значи дека $|\mathcal{P}_{пар}(M)|=|\mathcal{P}_{непар}(M)|$. Од друга страна: $\mathcal{P}_{пар}(M) = \bigcup\limits_{k=0}^{n}\mathcal{P}_{2k}(M)$;

$\mathcal{P}_{\text{непар}}(M) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_{2k+1}(M)$ и $\mathcal{P}_k(M)\cap\mathcal{P}_t(M)=\emptyset$ за $k\neq t$. Значи,

$$|\mathcal{P}_{\text{пар}}(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} \quad \text{и} \quad |\mathcal{P}_{\text{непар}}(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1}.$$

Според тоа:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k+1} = |\mathcal{P}_{\text{пар}}(M)|-|\mathcal{P}_{\text{непар}}(M)|=0. \blacksquare$$

Задача 9. *Да се докаже дека за секој* $1\leq k\leq n$,

$$\binom{n}{k}= \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}.$$

Решение. Математичка индукција и Паскалово правило. ■

Задача 10. *Да се докаже дека за секој* $0\leq k<n$,

$$\binom{n}{k}= \sum_{m=0}^{k} \binom{n-1-m}{k-m}.$$

Решение. Математичка индукција и Паскалово правило. ■

Задача 11. *Нека* $f:\mathbb{N}^0\times\mathbb{N}^0\to\mathbb{N}^0$ *е пресликување за кое важи:*

(1) $f(n,0)=f(n,n)=1$;

(2) $f(n,m)=0$ *за* $n<m$ *и*

(3) $f(n+1,k) = f(n,k) + f(n,k-1)$.

Да се докаже дека за секој $n,k\in\mathbb{N}^0$, $f(n,k)=\binom{n}{k}$.

Решение. Доказот е со двојна индукција по n и k, Паскаловото правило и следните две импликации.

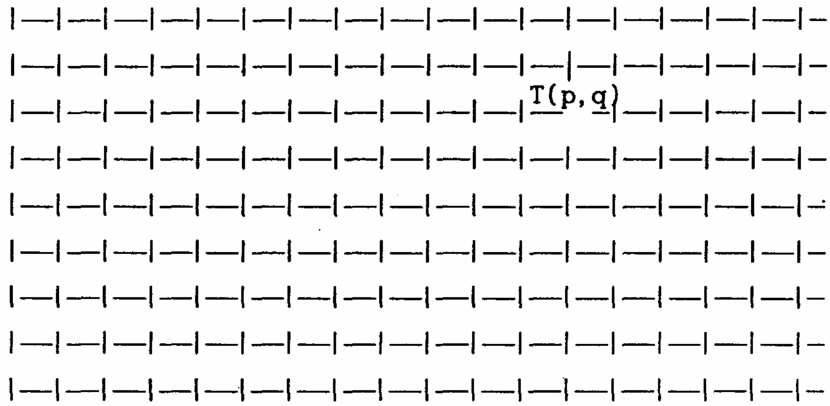
Нека за даден N, $f(n,k)=\binom{n}{k}$ за секој $n<N$ и секој $k\leq n$.
Тогаш: $f(N,0)=1=\binom{N}{0}$

Сега нека за $K<N$, за секој $k\leq K$, $f(N,k)=\binom{N}{k}$. Тогаш,

$$f(N,K+1)=f(N-1,K+1)+f(N-1,K)=\binom{N-1}{K+1}+\binom{N-1}{K}=\binom{N}{K+1}.$$

Според тоа, за секој $k\leq N$, $f(N,k)=\binom{N}{k}$. ■

Задача 12. *Тлоцртот на улиците во еден град е даден на следниов цртеж:*



$T(0,0)$

при што сите улици се еднонасочни, и тоа: хоризонталните се насочени од лево кон десно, а вертикалните оддолу нагоре. Раскрсниците се означени со $T(p,q)$. *По колку различни патишта може да се стигне од* $T(0,0)$ *до* $T(p,q)$?

Решение I. Бараниот број да го означиме со $h(p,q)$. Бидејќи до раскрсницата $T(p,q)$ може да се стигне само од раскрсниците $T(p-1,q)$ и $T(p,q-1)$, следува дека

$$h(p,q)=h(p-1,q)+h(p,q-1).$$

Ова личи на Паскаловото правило, но со мали разлики во бројките. Но, за $f(p+q,q)=h(p,q)$, важи:

$$f(p+q+1,q)=h(p+1,q)=h(p,q)+h(p+1,q-1)=f(p+q,p)+f(p+q,q-1).$$

Од друга страна: бидејќи до $T(p,0)$ и $T(0,q)$ може да се стигне само по еден пат од $T(0,0)$, следува дека

$$f(p,0)=f(q,q)=1.$$

Според тоа, f ги задоволува условите од претходната задача , па:

$$f(p+q,q)=h(p,q)=\binom{p+q}{q}.$$

Значи, бараниот број е:

$$\binom{p+q}{q} = \binom{p+q}{p}.$$

Решение II. За да се стигне од $T(0,0)$ до $T(p,q)$ треба да се поминат $p+q$ раскрсници од кои p се по хоризонтални, а q се по вертикални единични патишта. Затоа од овие $p+q$ раскрсници треба на произволен начин да ќе изберат p вертикални (или q хоризонтални) единични патишта, а тоа може да се направи на $\binom{p+q}{p}$, т.е. на $\binom{p+q}{q}$ начини . ∎

Задача 13. *Да се докаже дека за секој* $n \ge 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Решение. Да разгледаме град со $2\cdot(n+1)$ еднонасочни улици како во претходната задача, така што во левиот долен ќош е $T(0,0)$, а во десниот горен ќош е $T(n,n)$, т.е. тлоцртот на улиците е една квадратна шема. На споредната дијагонала од таа квадратна шема се наоѓаат раскрсници $T(n-p,p)$. Бројот на сите патишта од $T(0,0)$ до $T(n,n)$ е $\binom{2n}{n}$. Од друга страна, за да се стигне од $T(0,0)$ до $T(n,n)$ мора да се помине низ некоја од раскрсниците $T(n-k,k)$ за некое $0 \le k \le n$. Бројот на сите патишта од $T(0,0)$ до $T(n,n)$ што минуваат низ $T(n-k,k)$ е $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$, од што следува заклучокот, т.е. дека $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. ∎

Задача 14. *Ѕидовите на коцка со страна* n $(n \in \mathbb{N})$ *се покриени со целобројна мрежа со прави паралелни на нејзините рабови, така што секој ѕид е поделен на* n^2 *квадратчиња. Точките од мрежата се означени со* $T(p,q,r)$, *за* $0 \le p,q,r \le n$, *со тоа што барем еден од броевите* p, q, r *е* 0 *или* n. *На колку начини од точката* $T(0,0,0)$ *може да се стигне до точката* $T(n,n,n)$ *движејќи се по мрежата и притоа приближувајќи се кон точката* $T(n,n,n)$?

Решение. За да се стигне од точката $T(0,0,0)$ до точката $T(n,n,n)$ на бараниот начин треба да се помине преку два соседни ѕида. Фиксирајќи два такви соседни ѕида, тие можат да се развијат во правоаголна шема користејќи го нивниот заеднички раб, па движењето од $T(0,0,0)$ до $T(n,n,n)$ е како движењето во задача 12 од $T(0,0)$ до $T(n,2n)$. Значи од $T(0,0,0)$ до $T(n,n,n)$ може да се стигне на $\binom{3\cdot n}{n}$ начини. Но такви соседни парови ѕидови има 6. Меѓу овие $6\cdot\binom{3\cdot n}{n}$ патишта има некои кои се броени два пати. Една пат е броен два пати ако и само ако на едниот ѕид на коцката патот ги поврзува дијагонално спротивните точки, а пред тоа или после тоа се движи по еден од рабовите на коцката. Според задача 12, такви патишта има $6\cdot\binom{2\cdot n}{n}$. Затоа од $T(0,0,0)$ до $T(n,n,n)$ може да се стигне на

$$6\cdot\left\{\binom{3\cdot n}{n}-\binom{2\cdot n}{n}\right\}$$

начини. ■

Задача 15. *Коцка со страна* n $(n\in\mathbb{N})$ *е разделена со целобројна мрежа паралелна со нејзините страни на* n^3 *единични коцки. Точките од мрежата се означени со* $T(p,q,r)$, *за* $0\le p,q,r\le n$. *Во коцката е дозволено движење во насока од помали кон поголеми координати, аналогно на движењето во градот од задача 12. На колку начини од точката* $T(0,0,0)$ *може да се стигне до точката* $T(p,q,r)$? *Колкав е тој број за* $p=q=r=n$?

Решение. При движењето од $T(0,0,0)$ до $T(p,q,r)$, проекцијата на тоа движење врз рамнината од првите две координати е движење како во задача 12, од $T(0,0)$ до $T(p,q)$, од што следува дека такви можни проекции има $\binom{p+q}{p}$. Проекцијата на едно такво движење, заедно со вертикалните патишта е мрежа како во задача 12 од тип $(p+q)\times r$, што значи дека за една иста проекција врз првите две координати, постојат, според задача 12, $\binom{p+q+r}{p+q}$ можни патишта. Значи бројот на патиштата од $T(0,0,0)$ до $T(p,q,r)$ е

$$\binom{p+q}{p}\cdot\binom{p+q+r}{p+q} = \frac{(p+q+r)!}{p!\cdot q!\cdot r!}.$$

Специјално, за $p=q=r=n$, тој број е

$$\binom{2\cdot n}{n}\cdot\binom{3n}{2n} = (3n)!/(n!)^3 \ . \ ■$$

Задача 16. *Да се докаже дека за секои* $0\le k\le n,m$, *важи*

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\cdot\binom{n}{k-i} \ .$$

Решение. Нека A има m елементи, нека B има n елементи и нека $A\cap B=\emptyset$. Дефинираме релација $\approx$ на множеството $\mathcal{P}_k(A\cup B)$ со:

$$X \approx Y \text{ акко } X\cap A=Y\cap A.$$

Се покажува дека $\approx$ е еквивалентност на $\mathcal{P}_k(A\cup B)$. Според тоа, $\mathcal{P}_k(A\cup B)$ е еднакво на унијата од класите на таа еквивалентност, т.е. $\mathcal{P}_k(A\cup B) = \cup X^{\approx}$. Бидејќи класите на еквивалентност се дисјунктни, следува дека $|\mathcal{P}_k(A\cup B)|=\Sigma|X^{\approx}|$. За произволно $X\in\mathcal{P}_k(A\cup B)$, $X^{\approx} = Z^{\approx}$, каде што $Z=X\cap A$, од што следува дека $|\mathcal{P}_k(A\cup B)| = \Sigma\ |Z^{\approx}|$ каде што сумата е по сите $Z\in\mathcal{P}(A)$, при што е искористен и фактот дека $Z^{\approx}\ne W^{\approx}$ за секои $Z,W\in\mathcal{P}(A)$ за кои $Z\ne W$. За секој $Z\in\mathcal{P}(A)$, постои i, така што $Z\in\mathcal{P}_i(A)$, па во тој случај, $X\in Z^{\approx}$ акко $X\in\mathcal{P}_{k-i}(B)$, од што следува дека $|Z^{\approx}|=\binom{n}{k-i}$. На крајот се добива дека

$$\binom{m+n}{k}=|\mathcal{P}_k(A\cup B)|= \Sigma\ |Z^{\approx}| = \sum_{i=0}^{k}\ \sum_{|Z|=i} |Z^{\approx}| = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}\cdot\binom{m}{i}. \ ■$$

Задача 17. *Да се докаже дека за секој* $n\ge1$ *важи:*

(а) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot2^{n-1}$; (б) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k\cdot\binom{n}{k}=0$ *и*

(в) $\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot\binom{n}{k}=n\cdot(n+1)\cdot2^{n-2}$.

Решение. Од Паскаловото правило следува дека за $k\le n$,

$$k\cdot\binom{n}{k}= \frac{k\cdot n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} =n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

(а) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\cdot\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\cdot\binom{n-1}{k} = n\cdot 2^{n-1}$.

(б) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k}\cdot k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k}\cdot n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

$$= -n\cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1}\cdot\binom{n-1}{k} = 0.$$

(в) $\sum_{k=1}^{n} k^{2}\cdot\binom{n}{k} = n\cdot \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n-1}{k-1}$

$$= n\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n} (k-1)\cdot\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\Big)$$

$$= n\cdot\Big(\sum_{t=0}^{n-1} t\cdot\binom{n-1}{t} + \sum_{t=0}^{n-1}\binom{n-1}{t}\Big)$$

$$= n\cdot\big((n-1)\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\big)$$

$$= n\cdot 2^{n-2}\cdot(2+n-1) = n\cdot(n+1)\cdot 2^{n-2} \ . \ \blacksquare$$

Задача 18. *Да се докаже дека за секој* $n\geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k}\cdot\binom{n}{k} = 3^{n}.$$

Решение. Со индукција по n и следната еднаквост:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^{k}\cdot\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^{k}\cdot\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k}\cdot\binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k}\cdot\binom{n}{k} + \sum_{j=0}^{n} 2^{j+1}\cdot\binom{n}{j}$$

$$= 3^{n} + 2\cdot 3^{n} = 3^{n+1} \ . \ \blacksquare$$

Задача 19. *Да се докаже дека за секој* $n\geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} = 4^{n}.$$

Решение. Нека $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}$ и нека $B = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}$. Тогаш:

$A+B = 2^{2n+1}$ и $A-B = 0$. Значи, $A = B = \frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^{n}$. $\blacksquare$

Задача 20. *Нека* $n, r \in \mathbb{N}$. *Колку решенија има Диофантовата равенка*

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r = n \;, \quad (x_i \in \mathbb{N}) \;, \qquad (1)$$

т.е. на колку различни начини може n *да се запише како збир од* r *природни броеви.*

Решение. Бараниот број да го означиме со $a(n,r)$. Знаеме дека n може да се запише како збир од n единици, т.е.

$$1+1+1+\ldots+1=n.$$

При ова запишување, употребени се $n-1$ знаци +, додека во равенката (1), употребени се $r-1$ знаци +. Можеме на знаците + во претставувањето на n како збир од единици да им дадеме имиња, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. За да добиеме некое решение на равенката (1), потребно и доволно е да се изберат $r-1$ знаци $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{r-1}}$ помеѓу знаците $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Тие избрани знаци ќе бидат знаци и во равенката (1), додека: збирот на единците што се лево од знакот p_{i_1} го даваат бројот x_1; збирот на единците што се лево од знакот p_{i_s} а се десно од знакот $p_{i_{s-1}}$ го даваат бројот x_s, за $s=2,\ldots,r-1$, и збирот на единците десно од знакот $p_{i_{r-1}}$ го даваат бројот x_r. Оваа дискусија покажува дека $a(n,r)$ е еднаков на бројот на $r-1$ елементните подмножества од $n-1$ елементно множество, т.е.

$$a(n,r)=\binom{n-1}{r-1}. \;\blacksquare$$

Задача 21. *Да се најде бројот од сите различни запишувања на природен број* n *како збир од природни броеви.*

Решение. Нека бараниот број е означен со $A(n)$. Според задача 20 и задача 7,

$$A(n) = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1} \;. \;\blacksquare$$

1.3. РАЗБИВАЊА НА МНОЖЕСТВА

Нека M *има* n *елементи. Претставувањето на* M *како дисјунктна унија од* k *непразни подмножества се вика* **k-разбивање** *на* M. *Со други зборови,* k*-разбивање на множество* M *е фамилија* $\{A_1, \dots, A_k\}$ *од* k *непразни, по парови дисјунктни подмножества од* M *чија унија е* M, *т.е. за секој* i, $\emptyset \neq A_i \subseteq M$; *за секои* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *и* $M = A_1 \cup \dots \cup A_k$. *Бројот на сите* k*-разбивања на* M *се означува со* $S(n,k)$ *и се вика* **Стирлингов број од втор вид.** *Едно* k*-разбивање на* M *се вика и* **разбивање** *на* M. *Бројот на сите разбивања на* M *се означува со* P_n *и се вика* **Белов број**. *Од дефинициите на* P_n *и* $S(n,k)$ *веднаш следува дека* $P_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$; $S(n,k)=0$ *за* $k>n$ *и* $S(n,0)=0=S(0,k)$. *По дефиниција,* $S(0,0)=1$.

Задача 1. *Да се најде бројот на сите сурјекции од* $\mathbb{N}_n$ *во* $\mathbb{N}_m$ *за* $n \geq m$.

Решение. Нека $\Sigma(n,m)$ е множеството од сите сурјекции од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_m$ и нека бараниот број е $\sigma(n,m)=|\Sigma(n,m)|$. Нека C е множеството од сите пресликувања од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_m$. Тогаш C има m^n елементи, т.е. $|C|=m^n$. Нека за секое $X \subseteq \mathbb{N}_m$,

$$E(X)=\{f \mid f:\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m ,\ f(\mathbb{N}_n) \cap X = \emptyset\},$$

т.е. E(X) е множеството од сите пресликувања од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_m$ коишто го промашуваат X. Ако $X=\{i\}$, се пишува E(i) наместо

$E(\{i\})$. Тогаш $\Sigma(n,m)=C\setminus(\bigcup_{i=1}^{m} E(i))$. Според принципот на исклучување,

$$\sigma(n,m)=|S|-\sum_i|E(i)| + \sum_{i\neq j}|E(i)\cap E(j)|-\ldots+(-1)^m|E(1)\cap\ldots\cap E(m)|$$

$$=m^n-\sum_{\emptyset\neq X\subseteq \mathbb{N}_m}(-1)^{|X|}\cdot|\bigcap_{x\in X}E(x)|=m^n-\sum_{\emptyset\neq X\subseteq \mathbb{N}_m}(-1)^{|X|}\cdot|E(X)|.$$

За $X\subseteq\mathbb{N}_m$, $E(X)$ е множеството од сите пресликувања од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_m\setminus X$, па според тоа, $|E(X)|=(m-|X|)^n$, т.е. $E(X)$ зависи само од бројот $|X|$, т.е. $|E(X)|=|E(Y)|$ за $X\neq Y$ за кои $|X|=|Y|$. Бидејќи за секој $1\le k\le m$ има $\binom{m}{k}$ подмножества X од $\mathbb{N}_m$ за кои $|X|=k$, следува дека:

$$\sigma(n,m) = m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot(m-k)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot(m-k)^n .$$

Со трансформацијата $\binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$ и замената $m-k = i$, се добива:

$$\sigma(n,m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\cdot\binom{m}{i}\cdot i^n . \blacksquare$$

Задача 2. *Да се најде* $S(n,k)$ *за* $1\le k\le n$.

Решение. Нека R е множеството од сите подредени k-разбивања на $\mathbb{N}_n$, т.е. на сите низи $(A_1,\ldots,A_k)$ за кои $\{A_1,\ldots,A_k\}$ е k-разбивање на $\mathbb{N}_n$. Директно од дефиницијата следува дека едно k-разбивање определува $k!$ подредени k-разбивања, па според тоа, $|R| = k!\cdot S(n,k)$. Нека $\Sigma(n,k)$ е множеството на сите сурјекции од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_k$. Секоја сурјекција f од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_k$ дефинира точно едно подредено k-разбивање со: $A_i = f^{-1}(i)$, т.е. $A_i=\{x\in\mathbb{N}_n|\ f(x)=i\}$, и обратно, секое подредено k-разбивање $(A_1,\ldots,A_k)$ дефинира точно една сурјекција f од $\mathbb{N}_n$ во $\mathbb{N}_k$ со $f(A_i)=i$. Според тоа, постои биекција од R во $\Sigma(n,k)$. Значи:

$$k!\cdot S(n,k) = |R| = |\Sigma(n,k)| = \sigma(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\cdot\binom{k}{i}\cdot i^n, \text{ т.е.}$$

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\cdot\binom{k}{i}\cdot i^n \ . \ \blacksquare$$

Задача 3. *Да се најде бројот на сите еквивалентности на множеството* $\mathbb{N}_n$.

Решение. Секоја еквивалентност на $\mathbb{N}_n$ определува на единствен начин едно разбивање на $\mathbb{N}_n$ со класите на еквивалентност, а и обратно, секое разбивање определува на единствен начин еквивалентност на $\mathbb{N}_n$. Според тоа бараниот број е еднаков со бројот P_n од сите разбивања на $\mathbb{N}_n$. Значи, бројот на сите еквивалентности на $\mathbb{N}_n$ е

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\cdot \frac{1}{k!}\cdot\binom{k}{i}\cdot i^n \ . \ \blacksquare$$

Задача 4. *Да се најде бројот на сите пермутации на* $\mathbb{N}_n$ *без фиксни точки.*

Решение. Фиксна точка за пресликување $f:M\to M$ е елемент $x\in M$ за кој $f(x)=x$. Множеството од сите фиксни точки за пресликување f се означува со $Fix(f)$, т.е.

$$Fix(f)=\{x\in M|\ f(x)=x\}.$$

Едно пресликување е без фиксни точки ако $Fix(f)=\emptyset$. Нека $D(n)$ е множеството од сите биекции на $\mathbb{N}_n$ без фиксни точки, и за секое $X\subseteq\mathbb{N}_n$ нека $E(X)$ е множеството од сите пермутации f за кои $X\subseteq Fix(f)$. Наместо $E(\{i\})$ пишуваме $E(i)$. Од дефиницијата на $E(X)$ следува дека постои биекција помеѓу $E(X)$ и множеството од сите пермутации на $\mathbb{N}_n\setminus X$, па $|E(X)| = (n-|X|)!$. Исто така, од дефиницијата на $E(X)$ следува дека $E(X)\cap E(Y)=E(X\cup Y)$. Нека $Per(\mathbb{N}_n)$ е множеството на сите биекции од $\mathbb{N}_n$ во себе.

Тогаш $D(n)=Per(\mathbb{N}_n)\setminus(\bigcup_{i=1}^{n} E(i))$ и од принципот на исклучување,

$$|D(n)|=|Rer(\mathbb{N}_n)|-\sum_i|E(i)| + \sum_{i\neq j}|E(i)\cap E(j)|-\dots$$
$$\dots\dots+(-1)^m|E(1)\cap\dots\cap E(m)|$$

$$= n!+\sum_{\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|X|}\cdot|\bigcap_{x\in X}E(x)| = n!+\sum_{\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{N}_n}(-1)^{|X|}\cdot|E(X)|$$

$$= n!+\sum_{1\le i\le n}(-1)^i\cdot\binom{n}{i}\cdot(n-i)! = \sum_{0\le i\le n}(-1)^i\cdot\binom{n}{i}\cdot(n-i)!$$

$$= n!\cdot\sum_{0\le i\le n}\frac{(-1)^i}{i!}\ .\ \blacksquare$$

Задача 5. *Нека* $D(n,m)$ *е множеството на сите пермутации на* $\mathbb{N}_n$ *што имаат точно* m *фиксни точки. Да се најдат броевите:* $|D(n,m)|$; $|D(n,0)|$; $|D(4,2)|$; $|D(4,3)|$ *и* $|D(n,n-1)|$.

Решение. Нека $Per(\mathbb{N}_n)$ е множеството на сите биекции од $\mathbb{N}_n$ во себе и за секое $X\subseteq\mathbb{N}_n$ нека $F(X)$ е множеството од сите пермутации f за кои $X=Fix(f)$. Ако $X\neq Y$, тогаш $F(X)\cap F(Y)=\emptyset$, па според задачата 4, $|F(X)|=k!\cdot\sum_{0\le i\le k}\frac{(-1)^i}{i!}$, каде што $k = n-|X|$. Тогаш $D(n,m) = \bigcup_{X\in\mathcal{P}_m(\mathbb{N}_n)} F(X))$, од што според принципот на збир следува дека

$$|D(n,m)| = \sum_{|X|=m}|F(X)| = \binom{n}{m}\cdot(n-m)!\cdot\sum_{0\le i\le n-m}\frac{(-1)^i}{i!}$$
$$= \frac{n!}{m!}\cdot\sum_{0\le i\le n-m}\frac{(-1)^i}{i!}\ .$$

За $m=0$, $D(n,m)=D(n,0)=D(n)$.

За $m=n-1$, $D(n,n-1) = \frac{n!}{(n-1)!}\cdot(\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!})=n\cdot(1-1)=0$, што значи дека не постои пермутација на $\mathbb{N}_n$ што има точно $n-1$ фиксни точки. Тоа е од друга страна очигледно, бидејќи ако f

е пермутација на $\mathbb{N}_n$ што има n-1 фиксни точки, тогаш преостанатиот n-ти елемент од $\mathbb{N}_n$ мора исто така да биде фиксен. Според тоа и $D(4,3)=0$.

За $n=4$, $m=2$, $D(4,2)=\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}\right)=12\cdot\frac{1}{2}=6$. ■

Задача 6. *Нека* $D^*(n,m)$ *е множеството на сите пермутации на* $\mathbb{N}_n$ *што имаат барем* m *фиксни точки. Да се најдат броевите:* $|D^*(n,m)|$; $|D^*(n,0)|$; $|D^*(4,2)|$; $|D^*(4,3)|$ i $|D^*(n,n-1)|$.

Решение. Од дефинициите на $D^*(n,m)$ и $D(n,m)$ следува дека $D^*(n,m) = \bigcup_{m\le i\le n} D(n,i)$. Бидејќи $D(n,m)\cap D(n,t)=\emptyset$ за $m\neq t$, според принципот за збир, следува дека

$$|D^*(n,m)| = \sum_{m\le t\le n} |D(n,t)| = \sum_{m\le t\le n} \frac{n!}{t!}\cdot \sum_{0\le i\le n-t} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

За $m=0$, $D^*(n,0) = n!$, за $m=n-1$, $D^*(n,n-1)=1$, па $D^*(4,3)=1$ и на крајот, $D^*(4,2)=6+1=7$. ■

Задача 7. *На колку начини можат да се сместат 8 топови на шаховска табла, така што ниедни два од нив не се напаѓаат и белата дијагонала е празна? (Два топа се напаѓаат ако и само ако се наоѓаат во иста колона или иста редица.)*

Решение. Топовите треба да се во различни редици. Нека T_i е топот што се наоѓа во i-тата редица, за $1\le i\le 8$. Редиците се означени од лево кон десно, а колоните оддолу нагоре, со што едно поле се наоѓа во белата дијагонала ако тоа се наоѓа во i-та колона и во i-та редица за некое i. За топовите да не се напаѓаат треба топовите да бидат сместени и во различни колони. Нека K_i е i-тата колона. Тогаш едно од бараните сместувања е наполно определено со една биекција од множеството $\{T_1,T_2,\ldots,T_8\}$ во множеството $\{K_1,K_2,\ldots,K_8\}$

која не испраќа T_i во K_i, што значи дека бараниот број е еднаков на бројот од сите пермутации на множество со 8 елементи без фиксни точки, кој според задачата.4 е еднаков на $|D(8)| = 14841$. ∎

Задача 8. *Нека* S *е множество со* n *елементи. Да се најде бројот на паровите* (A,B) *од дисјунктни подмножества на* S.

Решение. Нека бараниот број е означен со $T(n)$. За $n=1$, $T(1)=3$ бидејќи единствени парови дисјунктни подмножества од $S=\{1\}$ се: $(\emptyset,\emptyset)$, $(\emptyset,S)$ и $(S,\emptyset)$. Да разгледаме множество S со $n+1$ елементи, т.е. $S=\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. Паровите (A,B) од дисјунктни подмножества од S ќе ги разделиме во три множества: α, β и γ. Еден пар (A,B) е: во α ако $n+1\in A$; во β ако $n+1\in B$ и во γ ако $n+1\notin A\cup B$. Од дефинициите на α, β, γ следува дека тие се дисјунктни и дека $T(n+1)=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$. На секој пар $(A,V)\in\alpha$ му е придружен парот $(A\setminus\{n+1\},V)$, од што следува дека $|\alpha|=T(n)$. Слично, $|\beta|=T(n)$ и $|\gamma|=T(n)$. Значи, $T(n+1)=3\cdot T(n)$. На крајот, со едноставна индукција, се докажува дека $T(n)=3^n$. ∎

Задача 9. *Да се докаже дека множеството* $S=\mathbb{N}_9=\{1,2,..,9\}$ *не може да се разбие на две множества, така што ниедно од нив не содржи три броеви кои прават аритметичка прогресија. Такво разбивање е можно за* $S=\mathbb{N}_8$.

Решение. Нека $A\cup B=S$, нека $A\cap B=\emptyset$ и нека ниедно од тие множества не содржи три броја што прават аритметичка прогресија. Бројот 5 е во $A\cup B$, па без губење на општост можеме да претпоставиме дека $5\in A$. Тогаш, можни се два случаја: $4\in A$ и $4\notin A$.

Случај 1: Нека $4\in A$. Тогаш $6\notin A$ и $3\notin A$, т.е. $3,6\in B$. Од тоа пак, следува дека $9\notin B$, т.е. $9\in A$. Од тоа што $5,9\in A$, следува дека $1 \notin A$ и $7 \notin A$, т.е. $1,7 \in B$. Од $7,9 \in B$, следува дека $8 \notin B$, т.е. $8 \in A$, а од $1,3 \in B$ следува дека $2 \notin B$, т.е. $2 \in A$. Но тогаш, 2,5 и 8 формираат аритметичка прогресија.

Случај 2: Нека $4 \in B$. Ако $6 \in B$, тогаш $2 \notin B$ и $8 \notin B$, т.е. $2,8 \in A$, од што следува дека $2,5,8 \in A$ формираат аритметичка прогресија. Значи $6 \in A$. Тогаш од $5,6 \in A$, следува дека $7 \in B$. Од $4,7 \in B$, следува дека $1 \in A$. Од $1,5 \in A$, следува дека $3 \in B$ и $9 \in B$. Од $3,4 \in B$, следува дека $2 \in A$, а од $7,9 \in B$ следува дека $8 \in A$. Но тогаш, $2,5,8 \in A$ формираат аритметичка прогресија.

Едно од бараните разделувања на $\mathbb{N}_8$ е $A=\{1,2,5,6\}$ и $B=\{3,4,7,8\}$. ∎

Задача 10. *Да се најде бројот на сите пермутации* $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *на броевите* $1,2,\dots,n$ *такви што за секој* $k \in \{2,3,\dots,n\}$, *меѓу броевите* $a_1,a_2,\dots,a_{k-1}$ *постои барем еден кој од бројот* a_k *се разликува за 1.*

Решение. Нека бројот на бараните пермутации е S_n. Со индукција по n ќе докажиме дека $S_n = 2^{n-1}$. За $n=1$ и $n=2$ тврдењето е тривијално. Нека за бројот n важи $S_n=2^{n-1}$. Со цел да ги најдеме сите пермутации на броевите $1,\dots,n+1$ кои го имаат даденото својство, прво ќе докажеме дека во секоја таква пермутација последниот број не може да биде некој од броевите $2,3,\dots,n$.

Нека е дадена произволна пермутација $(a_1,\dots,a_{n+1})$ на броевите $1,\dots,n+1$ така што $a_{n+1}\neq 1$ и $a_{n+1}\neq n+1$. Бројот $a_{n+1}+1$ се наоѓа пред a_{n+1}. Според бараното својство на таа низа заклучуваме дека $a_{n+1}+2$ се наоѓа пред $a_{n+1}+1$, итн. Значи бројот $n+1$ се наоѓа пред n и освен тоа бројот $n+1$ мора да биде прв. Од друга страна пак, јасно е дека бројот $a_{n+1}-1$ се наоѓа пред a_{n+1}. Според бараното својство на таа пермутација воочуваме дека $a_{n+1}-2$ се наоѓа пред $a_{n+1}-1$,

$a_{n+1}-3$ се наоѓа пред $a_{n+1}-2$ итн. Значи бројот 1 се наоѓа пред 2 и затоа бројот 1 мора да биде прв, што значи, добиваме противречност: на прво место стои бројот 1 и бројот $n+1$.

Значи, на последно место мора да стои бројот $n+1$ или бројот 1. Ако на последно место стои бројот $n+1$, тогаш пермутацијата $(a_1,\dots,a_n,n+1)$ го задоволува бараното својство ако и само ако пермутацијата $(a_1,\dots,a_n)$ на броевите $1,\dots,n$ го задоволува тоа својство, а такви пермутации има 2^{n-1} според индуктивната претпоставка. Ако на последно место стои бројот 1, тогаш пермутацијата $(a_1,\dots,a_n,1)$ го задоволува бараното својство ако и само ако тоа својство го задоволува пермутацијата $(a_1-1,\dots,a_n-1)$ на броевите $1,\dots,n$, а такви пермутации има 2^{n-1}. Значи, $S_{n+1}=2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$, со што задачата е решена. ■

1. 4. ИГРИ И СТРАТЕГИИ

Задача 1. *Дадени се два купа од 1992 топчиња. Два играча наизменично играат потези на следниот начин: во секој потег играчот го отстранува едниот куп, а останатиот куп по свој избор го дели на два непразни купа. Играта ја губи оној играч кој не може да одигра исправен потег. Одреди кој играч со сигурност може да победи и на кој начин.*

Решение. Играта ја губи оној играч кој пред својот потег ќе затекне два купа со по едно топче. Играта ја добива оној играч кој е во состојба после својот потег да остави два купа со непарен број топчиња. Нека е тоа играчот A. Тогаш играчот B било како да игра ќе остави еден куп со непарен број топчиња, и еден куп со парен број топчиња. Играчот A, пак, го отстранува купот со непарен број топчиња, а купот со парен број топчиња го дели на два купа со непарен број топчиња. Играјќи со оваа стратегија, играчот A по конечен број на чекори ќе го остави играчот B, така што пред него има два купа со по едно топче и затоа A е победник.

Имајќи ја горната стратегија во предвид, добиваме дека играчот што прв ја почнува играта, тој и ја добива играта според горната стратегија. ∎

Задача 2. *Множество од 2^n предмети е поделено на неколку дисјунктни подмножества. Со еден потег може од едно под-*

множество да се префрлат во некое друго подмножество толку предмети колку што во второто множество веќе има. Докажи дека после конечно многу потези сите предмети може да се префрлат во едно подмножество.

Решение. Задачата ќе ја решиме со индукција по n. Ако n=1, тврдењето е тривијално. Нека постои алгоритам со кој по конечно многу чекори сите 2^{n-1} предмети од множество разбиено на подможества, се префрлаат во едно од подмножествата според даденото правило. Ќе покажиме дека таков алгоритам постои и за множество од 2^n предмети. Јасно е дека бројот на подмножества со непарен број на предмети е парен број. Затоа можеме таквите подмножества да ги групираме во парови. За секој таков пар префрламе предмети од побројното подмножество во помалубројното подмножество. Тогаш доаѓаме во состојба сите подмножества да имаат парен број на предмети. На подмножествата да им придружиме нови подмножества земајќи во нив половина од предметите. Тогаш вкупниот број на предмети е двојно помал, односно 2^{n-1}. Според индуктивната претпоставка постои алгоритам на бараното префрлање на предмети во овој случај. На овој алгоритам му придружуваме алгоритам за проблем со 2^n предмети префрлајќи секогаш двојно повеќе предмети отколку во алгоритамот за 2^{n-1} предмети. ∎

Задача 3. *На една 3x3 квадратна табла поставени се два сини жетони, два црвени и три жолти жетони, а две полиња се празни како што е тоа покажано на цртеж 1. Секој жетон може да се помести за едно поле по хоризонтала или вертикала ако соседното поле е празно. Дали може по 1992 такви потега да се добие состојбата покажана на цртеж 2.*

с	/	ж
ж	ц	с
ц	ж	/

Цртеж 1

ж	с	/
с	ж	ц
/	ц	ж

Цртеж 2

A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{31}	A_{31}	A_{33}

Цртеж 3

Решение. Да ги означиме сите 9 полиња со A_{ij} како што тоа е покажано на цртеж 3. Нека по n-тиот потег празните места се A_{ij} и A_{kr}. Да ја разгледаме сумата:

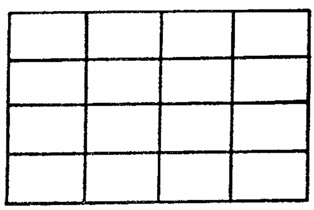
$$S(n) = i + j + k + r.$$

Забележуваме дека за секое $n \in \mathbb{N}_0$ важи $|S(n)-S(n+1)|=1$, па $S(n+1)$ и $S(n)$ имаат различна парност. Ако одговорот на задачата е позитивен, тогаш мора $S(0)$ и $S(1992)$ да имаат иста парност. Но ова не е задоволено бидејќи:

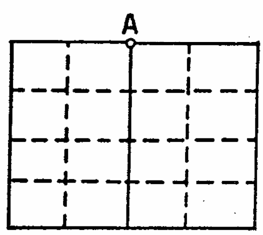
$$S(0) = 1+2+3+3 = 9 \quad \text{и} \quad S(1992) = 3+1+1+3 = 8 .$$

Значи одговорот на задачата е "не". ■

Задача 4. *Да се најде најмалиот број потези, така што да може да се нацрта фигурата на цртеж 1, а притоа да не дојде до повторување на некои линии.*



Цртеж 1



Цртеж 2

Решение. Почнувајќи од точката A, со еден потег може да се нацрта фигурата на цртеж 2, а потоа уште со пет потези може да се нацрта дадената фигура. Значи, бараниот број е помал или еднаков на 6. Ќе покажиме дека бараниот број е ≥ 6.

Да забележиме дека бројот на темињата на дадената фигура од кои излегуваат непарен број на линии е 12. Каков било да е првиот потег, после тоа бројот на таквите темиња од кои излегуваат непарен број неисцртани линии може најмногу да се смали за 2, т.е. ќе биде ≥ 10. По вториот потег тој број ќе биде ≥ 8 итн. На крај добиваме дека тој број може да биде еднаков на нула дури после шестиот потег. Значи потребни се барем 6 потези. ∎

Задача 5. *Секоја страна на рамностран триаголник е поделена на* k *еднакви делови. Низ точките на страните се повлечени прави паралелни со страните. Низ триаголниците е повлечена искршена линија при што:*

(1) Ниеден триаголник не е пресечен два пати со искршената линија;

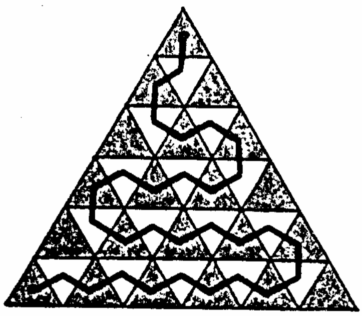
(2) Ако два триаголника се пресечени со искршената линија, тогаш или тие се дисјунктни или имаат заедничка страна.

Колкав е максималниот број на триаголници низ кои може да поминува искршената линија ?

Решение. Да забележиме дека триаголникот е разбиен на k^2 мали триаголници. Да го обоиме триаголникот во две бои При тоа црни триаголници има k повеќе од бели. Бројот на белите триаголници е $\frac{k(k-1)}{2}$, а на црните $\frac{k(k+1)}{2}$. Притоа два триаголника со иста боја немаат заедничка страна, па затоа при поминување на искршената линија наизменично се менува бојата на триаголникот. Ако тргнеме од триаголник со црна боја, тогаш може да опфатиме $\frac{k(k-1)}{2}$ бели и уште $\frac{k(k-1)}{2}$ + 1 црни триаголници. Значи сите опфатени триаголници се:

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + 1 = k^2 - k + 1 .$$

Случајот k=6 е прикажан на цртежот 1. ■



Цртеж 1.

Задача 6. *Шаховска табла со димензија 6x6 е покриена со 18 клетки со димензија 2x1 (секоја клетка покрива два квадрати со димензија 1×1 што имаат зедничка страна). Да се покаже дека при секое такво покривање може таблата да се подели на два дела по хоризонтала или вертикала, при што не е пресечена ниедна од 2x1 клетките.*

Решение. Да претпоставиме дека клетките се така распоредени, што секоја од хоризонталите и вертикалите дели барем една клетка на два дела. Постојат 5 хоризонтали и 5 вертикали и секоја од нив ја дели таблата на два дела, секој од тие делови со парен број 1×1 квадрати. Клетките покриваат парен број квадрати, па затоа во секој од деловите влегуваат парен број, и тоа најмалку два квадрати од поделени клетки. Според тоа, секоја хоризонтала и вертикала сече барем две клетки.

Ако се има предвид дека секоја 2x1 клетка може да е пресечена само од една хоризонтала или вертикала, тогаш следува дека барем 10x2 = 20 различни клетки се поделени со хоризонталите и вертикалите. Но, тоа противречи на вкупниот број клетки. ■

Задача 7. *Во квадрат со 7x7 (13x13) полиња треба да се сместат k 1x1 клетки, така што центрите на ниедна четворка од сместените клетки не се јавува како четворка темиња на правоаголник со страни паралелни со страните на квадратот. Да се определи најголемата вредност за k.*

Решение. Ако x_i е бројот на клетките во i-тата колона, тогаш

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = k, \text{ каде } m=7 \ (m=13) .$$

Ако во некоја колона се сместени две клетки, тогаш во ниедна друга колона не смеат да се сместат клетки на истите места. Во i-тата колона има $\frac{x_i(x_i-1)}{2}$ неподредени парови клетки. Бидејќи сите сместени парови се различни, нивниот збир не е поголем од бројот на сите парови клетки, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \le \frac{m(m-1)}{2} .$$

Според тоа, $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le m(m-1) + \sum_{i=1}^{m} x_i = m(m-1) + k$, од

што заедно со $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \ge \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_m)^2}{m} = \frac{k^2}{m}$ следува дека

$$k \le \frac{m+m\sqrt{4m-3}}{2} .$$

Значи, за $m = 7$, $k \leq 21$, додека за $m = 13$, $k \leq 52$. ■

	*	*	*			
*	*					*
*		*			*	
*			*	*		
			*		*	*
		*		*		*
	*			*	*	

Едно сместување за $m=7$ и $k=21$.

Задача 8. *На една кружница се наоѓаат* n *различни точки означени на произволен начин со броевите* $1,2,..,n$ $(n\geq3)$. *Две несоседни точки* A *и* B *се нарекуваат* **споиви** *ако на барем еден од двата лака одредени со точките* A *и* B, *сите точки се означени со броеви кои се помали од броевите во* A *и* B. *Да се докаже дека бројот на споивите парови точки е еднаков на* $n-3$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=3$ тврдењето е очигледно. Нека тоа важи за $n\geq3$. Да претпоставиме дека на кружницата се дадени $n+1$ точки означени со броевите $1,2,...,n+1$. Да го означиме тој систем со S. Под систем подразбираме множество од точки заедно со ознаките кои им се придружени. Да формираме нов систем од точки S', така што ја отфрламе точката 1 и останатите точки ги означуваме со j' наместо со $j+1$, за $1\leq j\leq n$. Точката 1 во системот S не е споива со ниедна друга точка. Освен тоа, двете соседни точки на 1 во системот S се споиви. Лесно се забележува дека две точки од останатите точки во S се споиви ако и само ако тие се споиви во системот S'. Меѓутоа, според индуктивната претпоставка во S' има n-3 споиви парови од точки. Значи во S има $n-3+1=(n+1)-3$ споиви парови од точки. ■

Задача 9. *Дали множеството* $S=\{1,2,\dots,40\}$ *може да се разбие на 4 дисјунктни подмножества, така што разликата на кои било два броја од некое подмножество не припаѓа на тоа подмножество?*

Решение. Одговорот е **да**, а постапката е следнава. Нека $S_1=\{1\}$ и $S_2=\{2,3\}$. На S_1 му го додаваме бројот 4, така што сега $S_1=\{1,4\}$. Формираме множество $S_3=\{5,6,7,8,9\}$. На секое од множествата S_1 и S_2 ги додаваме сите броеви кои се еднакви на броевите што ги содржат зголемени за 9, т.е.

$$S_1=\{1,4,10,13\} \text{ и } S_2=\{2,3,11,12\}.$$

Формираме множество S_4 кое се состои од броевите 14, 15, 16, ..., 27 (т.е. од $13+1,\dots,2\cdot13+1$). На секое од множествата S_1, S_2 и S_3 ги додаваме сите броеви што ги содржат зголемени за 27. Значи

$$S_1 = \{1,4,10,28,31,37,40\}, \quad S_2 = \{2,3,11,12,29,30,38,39\},$$

$$S_3 = \{5,6,7,8,9,32,33,34,35,36\} \quad \text{и} \quad S_4 = \{14,15,\dots,27\}.$$

Од самата конструкција се гледа дека ако $a,b\in S_i$ тогаш $a-b\notin S_i$ за $1\le i\le 4$. Освен тоа $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ и $S_i\cap S_j=\emptyset$ за $i\neq j$.

Забалешка. Претходно опишаниот алгоритам овозможува множеството $S=\{1,2,\dots,(3^n-1)/2\}$ да се разбие на n дисјунктни подмножества ço даденото својство. ■

1.5. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е еден од наједноставните елементарни комбинаторни принципи, но тој многу често се користи во решавање на разни комбинаторни задачи, така што ќе го обработиме во овој посебен дел. Наједноставно кажано, тој принцип тврди дека ако, на пример, три папагали се сместени во два кафеза, тогаш барем во еден од кафезите ќе има барем два папагала.

Задача 1. **(Принцип на Дирихле - специјална форма)** *Нека* n *е природен број. Ако* $n+1$ *предмети се распоредени на произволен начин во* n *кутии, тогаш барем во една кутија има барем два предмета.*

Решение. Решението е едноставно и се спроведува со спротивност. Ако претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет, бидејќи има само n кутии, би следувало дека во кутиите се распоредени најмногу n предмети, што е спротивно со претпоставката дека во кутиите се распоредени $n+1$ предмети. ■

Забелешка: Принципот на Дирихле кажува дека постои кутија во која има барем два предмета, но не дава начин, т.е. алгоритам како таа кутија да се најде.

Принципот на Дирихле се искажува и во форма како во следните две задачи чии решенија се исти како решението на задача 1.

Задача 2. *Нека* S *е множество со* $n+1$ *елементи, т.е. нека* $|S|\geq n+1$, *и нека* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *е едно* k *разбивање на* S, *за* $k\leq n$. *Тогаш постои* i, *така што* $|A_i|\geq 2$. ■

Задача 3. *Нека* S *и* T *се две конечни множества за кои* $|S|>|T|$, *и нека* $f:S\to T$ *е пресликување. Тогаш* f *не е инјекција, т.е. постојат* $x,y\in S$, $x\neq y$ *за кои* $f(x)=f(y)$. ■

Задача 4. *Нека* S *и* T *се две конечни множества за кои* $|S|=|T|=n$ *и нека* $f:S\to T$ *е пресликување. Тогаш:*

$$f \text{ е инјекција} \Leftrightarrow f \text{ е сурјекција.}$$

Решение. $\Rightarrow$: Бидејќи пресликувањето f е инјекција, следува дека $|f(S)|=|S|$. Од друга страна, бидејќи $f(S)\subseteq T$, следува дека $|f(S)|\leq|T|$. Значи $|f(S)|=|T|$, од што следува дека f е сурјекција.

$\Leftarrow$: Бидејќи f е сурјекција, следува дека $|f(S)|=|T|$, а бидејќи f е пресликување, следува дека $|f(S)|\leq|S|$. Нека $x,y\in S$, $x\neq y$. Ако $f(x)=f(y)$, тогаш рестрикцијата $f':S\setminus\{x\}\to T$ од f е исто така сурјекција, па според тоа,

$$n=|T|=|f'(S\setminus\{x\})|\leq|S\setminus\{x\}|=n-1$$

што е спротивност. ■

Задача 5. *Да се докаже дека меѓу 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат заеднички роденден.*

Решение. Нека S е даденото множество од 367 луѓе, нека T е множеството денови во годината и нека $f:S\to T$ е пресликување кое на секој член од S му го придружува неговиот роденден. Бидејќи во годината има помалку од 367 денови, т.е. $|S|>|T|$, според принципот на Дирихле, следува дека f не е инјекција, што значи дека постојат барем два члена од S што имаат заеднички роденден.■

Задача 6. *Нека* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *се цели броеви. Тогаш постојат* $r,q\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, $r<q$, *така што збирот*

$$a_{r+1}+a_{r+2}+\ldots+a_q$$

е делив со n.

Решение. Ги формираме збировите: $b_1=a_1$, $b_2=a_1+a_2$, ..., $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Ако еден од овие броеви, на пример b_i е делив со n, тогаш решение на задачата е p=0, q=i. Нека ниеден од тие броеви не е делив со n и нека за секој $1\le i\le n$, $b_i=c_i\cdot n+r_i$ при што $0<r_i<n$. Бидејќи се јавуваат n остатоци $r_1,r_2,\ldots,r_n$, а тие можат да примат само некоја од следните n-1 вредности $1,2,\ldots,n-1$, од принципот на Дирихле, следува дека барем два од тие остатоци се еднакви, т.е. постојат $p<q$ такви што $r_p=r_q$, а тоа е и бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_q = b_q-b_p = (c_q-c_p)\cdot n\ .\ ■$$

Задача 7. *Да се покаже дека меѓу произволни* n+1 *цели броеви можат да се изберат два чија разлика е делива со* n.

Решение. Нека $b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}$ се произволни цели броеви. Нека за секој $1\le i\le n+1$, $b_i=c_i\cdot n+r_i$ при што $0\le r_i<n$. Бидејќи има n+1 остатоци $r_1,r_2,\ldots,r_{n+1}$, а тие можат да примат n вредности $0,1,2,\ldots,n-1$, според принципот на Дирихле, следува дека барем два од тие остатоци се еднакви, т.е. постојат $p<q$ такви што $r_p=r_q$. Според тоа, $b_q-b_p=(c_q-c_p)\cdot n$, па значи b_q-b_p е делив со n . ■

Задача 8. *Да се докаже дека постои природен број кој е делив со 1992, а првите десет цифри му се 1234567890.*

Решение. Нека a_1 е бројот 1234567890. Нека за секој $i\geq 1$ a_i е бројот 12345678901234567890...1234567890, при што низата цифри 1234567890 е повторена i пати. Според претходната задача, меѓу броевите $a_1, a_2, \dots, a_{1993}$ постојат два $a_p>a_q$, такви што a_p-a_q е делив со 1992. Но, првите десет цифри на a_p-a_q се 1234567890. ■

Задача 9. *Да се докаже дека за секој природен број* n *постои барем еден број од обликот 111...111000...000 делив со* n.

Решение. Нека за секој $1\leq i\leq n+1$, a_i е бројот запишан во декаден систем со i единици, т.е. $a_i=111\dots111$. Тогаш, според задачата 7, постојат $a_p>a_q$, такви што

$$a_p-a_q = 111\dots111000\dots000 \text{ е делив со } n. \ ■$$

Задача 10. *Да се докаже дека постои степен на бројот 3 чиј запис во декаден систем завршува на 0001.*

Решение. Нека за секој i, $a_i=3^i$. Тогаш, според задачата 7, постојат $p<q$, така што 3^q-3^p е делив со 10^4, т.е. $3^p\cdot(3^{q-p} - 1)$ е делив со 10^4. Бидејќи 3^p е релативно прост со 10^4, следува дека 10^4 е делител на $3^{p-q}-1$. Значи $3^{p-q}-1=10^4\cdot n$ за некој n, т.е. 3^{p-q} завршува на 0001. ■

Задача 11. (Принцип на Дирихле) *Нека* $k\cdot n+r$ *предмети, за* $r\geq 1$, *се сместени во* n *кутии. Тогаш барем во една кутија има барем* k+1 *предмети.*

Решение. Исто како во задача 1, со спротивност. ■

Задача 12. *Познато е дека луѓето можат да имаат најмногу 600 000 влакна на главата, а во Македонија живеат повеќе од 2 000 000 луѓе. Да се докаже дека во Македонија има барем четворица луѓе што имаат ист број влакна на главата.*

Решение. Бидејќи 2 000 000 = 3·600 000 + 200 000, решението следува од принципот на Дирихле. ∎

Задача 13. **(Општ принцип на Дирихле)** *Нека* $n, s, r_1, r_2, \dots, r_n$ *се природни броеви, и нека* $r_1+r_2+\dots+r_n+s$ *предмети се сместени во* n *кутии* $K_1, K_2, \dots, K_n$. *Тогаш барем во една кутија* K_i *има барем* r_i+1 *предмети.*

Решение. Исто како во здача 1 со спротивност. ∎

Задача 14. *Да се докаже дека во произволно множество луѓе, постојат барем двајца кои меѓу членовите од тоа множество имаат ист број познати. Познанството е симетрична релација, т.е. ако А го познава Б, тогаш и Б го познава А.*

Решение. Нека $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е множество од n луѓе. Нека за секој $0 \le i \le n-1$, подмножеството од S составено од оние луѓе што имаат точно i познати, е означено со A_i. Ако постои некој кој нема ниеден познат, т.е. $A_0 \neq \emptyset$, тогаш нема ниеден од нив кој има $n-1$ познати, т.е. $A_{n-1}=\emptyset$. Точно е и обратното тврдење, т.е. дека ако $A_{n-1} \neq \emptyset$ тогаш $A_0=\emptyset$. Според тоа најмногу $n-1$ од множествата $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ се непразни. Бидејќи во S има n членови, според принципот на Дирихле, барем во едно од тие множества има барем два члена од множеството, а тоа се бараше да се докаже. ∎

Задача 15. *На почетокот на декември еден ученик почнал да се подготвува за натпреварот по математика закажан за по-*

четокот на март. Тој секој ден решавал барем по една задача, но за да не се премори, во текот на една недела (=7 дена) решавал најмногу 12 задачи. Да се докаже дека во текот на неговото подготвување за натпревар, постојат неколку последователни денови во кои ученикот решил точно 21 задачи.

Решение. Нека a_i е бројот на задачите што ученикот ги решил од почетокот до i-тиот ден, вклучувајќи го и тој ден. За низата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ важи својството: $a_{i+1} \geq a_i + 1$ за секој i. Бидејќи од почетокот на декември до почетокот на март има барем 90 денови, горната низа има барем 77 членови. Бидејќи во секоја недела ученикот решава најмногу по 12 задачи, следува дека $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$. Низата a_1+21, $a_2+21, \ldots$, $a_{77}+21$, ги има истите својства како и низата $a_1, a_2, \ldots, a_{77}$. Двете низи заедно имаат 154 членови, кои можат да бидат некои од броевите $1, 2, 3, \ldots, 132$, $133, \ldots$, $153=132+21$, а такви броеви има 153. Според принципот на Дирихле, постојат два члена од тие две низи што имаат еднакви вредности. Бидејќи двете низи се строго монотоно растечки, следува дека постојат $p \leq q$, такви што $a_p + 21 = a_q$. Јасно дека $p \neq q$, па според тоа, во деновите $p+1$, $p+2, \ldots, q$, ученикот решил точно 21 задача. ■

Задача 16. *Во множеството* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *избрано е подмножество* S *со* n+1 *елементи. Да се покаже дека постојат* $a, b \in S$, *така што* a *е делив со* b, *т.е.* $b \mid a$.

Решение. Секој природен број може да се запише на единствен начин како $2^k \cdot a$, каде што $k \geq 0$ и a е непарен број. Бидејќи има точно n непарни броеви помеѓу 1 и 2n, заклучуваме дека меѓу броевите во множеството S, постојат барем два броја од облик $p \cdot 2^t$ и $p \cdot 2^k$. Затоа едниот од овие два броја го дели другиот. ■

Задача 17. *Од првите 1992 природни броеви одбрани се 997 меѓусебно различни броеви. Докажи дека меѓу одбраните броеви постојат два броја такви што едниот го дели другиот број.*

Решение. Исто како претходната задача. ■

Задача 18. *Дадено е множество S од 10 произволни двоцифрени различни природни броеви. Да се докаже дека постојат две дисјунктни непразни подмножества A и B од S, за кои збирот на броевите од A е еднаков на збирот на броевите од B.*

Решение. Множеството S има $2^{10}-1=1023$ непразни подмножества. Најголема можна вредност на збирот на броевите во едно од тие множества е $99+98+97+...+92+91+90=945$, додека најмалата можна вредност е 10. Според тоа постојат вкупно 936 можни збирови. Бидејќи $936<1023$, според принципот на Дирихле, постојат две различни подмножества X, Y, со еднакви збирови. Ако $X\cap Y=\emptyset$, тогаш множествата $A=X$ и $B=Y$ се решение на задачата, додека ако $X\cap Y\neq\emptyset$, тогаш решение на задачата се множествата $A=X\setminus(X\cap Y)$ и $B=Y\setminus(X\cap Y)$. ■

Задача 19. *Да се докаже дека од n+1 различни природни броеви помали од 2n, може да се изберат три, такви што еден од нив биде еднаков на збирот на останатите два.*

Решение. Нека дадените броеви се $0<a_1<a_2<...<a_{n+1}<2n$. Тогаш, и $0<a_2-a_1<a_3-a_1<...<a_{n+1}-a_1<2n$, и овие n разлики заедно со броевите $a_2,a_3,...,a_{n+1}$ се 2n природни броеви помали од 2n. Според тоа, барем два од нив се еднакви, т.е. постојат $p\neq q$, $p,q>1$, така што $a_p=a_q-a_1$. Бараните броеви се a_1,a_p,a_q. ■

Задача 20. *Во круг со плоштина 1 се наоѓаат 1992 различни точки, од кои никои три не се колинеарни. Покажи дека некои три меѓу нив образуваат триаголник чија плоштина е помала од 0,0011.*

Решение. Да го исечеме кругот на 995 складни исечоци. Барем еден од нив содржи барем три од дадените 1992 точки. Плоштината на триаголникот кои го формираат тие три точки е помала од плоштината на еден исечок, т.е. од $\frac{1}{995} < 0,0011$. ∎

Задача 21. *Дадени се шест подредени тројки од реални броеви. Покажи дека постојат барем две тројки* (a,b,c) *и* (x,y,z) *така што*

$$a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z \geq 0.$$

Решение. Ако меѓу шесте подредени тројки се наоѓа тројката $(0,0,0)$ тогаш тврдењето е тривијално. Во спротивно, секоја тројка (p,q,r) определува ненулти вектор во однос на произволно избран правоаголен Декартов координатен систем, а бројот $a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z$ е скаларниот производ на векторите (a,b,c) и (x,y,z). Според тоа, условот $a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z \geq 0$ е еквивалентен со условот векторите (a,b,c) и (x,y,z) да градат остар или прав агол меѓу себе. Ќе покажеме дека аголот помеѓу некои два од тие шест вектори е остар или прав. Избираме произволен вектор меѓу шесте вектори. Да претпоставиме дека тој гради тапи агли со останатите шест вектори (во спротивно нема што да се докажува). Тогаш тие пет вектори лежат во еден полупростор. Тој полупростор може да се подели на четири правоаголни октанти. Затоа ќе постојат два вектора во ист октант и тие два вектора градат меѓу себе прав или остар агол. ∎

Задача 22. *Нека A е дел од единична сфера и нека плоштината на A е поголема од 2π. Да се докажи дека A содржи две дијаметрално спротивни точки.*

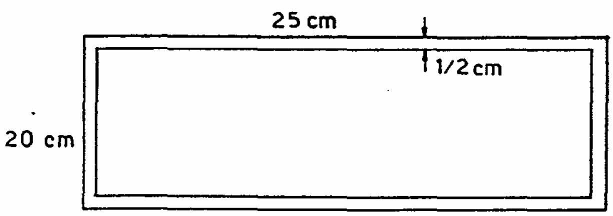
Решение. Да претпоставиме обратно, дека A не содржи ниеден пар дијаметрално спротивни точки. Со A' да го означиме множеството од дијаметрално спротивните точки на точките од A. Тогаш A и A' имаат исти плоштини, т.е. $P_A=P_{A'}$. Но множествата A и A' се дисјунктни, па $P_{A\cup A'}=P_A+P_{A'}$. Со S да ја означиме единичната сфера. Бидејќи $A\cup A'\subseteq S$, добиваме

$$P_S\geq P_{A\cup A'} = P_A + P_{A'} = 2\cdot P_A > 2\cdot 2\pi = P_S$$

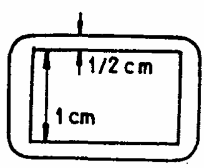
а ова претставува противречност. Со тоа тврдењето е докажано. ■

Задача 23. *Во правоаголник со страни 20cm и 25cm сместени се 120 квадрати со страна 1cm без нивно преклопување. Да се докаже дека во правоаголникот може да се впише круг со дијаметар 1cm кој не се сече со ниеден од квадратите.*

Решение. Центарот на кругот со дијаметар 1cm сместен во правоаголникот, мора да се наоѓа на растојание поголемо од $\frac{1}{2}$cm од секоја од страните на правоаголникот, т.е. внатре во рамката на цртеж 1а. Плоштината на рамката е еднаква на $19\cdot 24 = 456$.



Цртеж 1а



Цртеж 1б

Освен тоа центарот на кругот мора да е на растојание поголемо од $\frac{1}{2}$cm од контурата на секој од квадратите, т.е. надвор од секоја фигура како на цртежот 1б, чија плоштина е $3+\frac{\pi}{4}$. Максимална можна плоштина на сите овие фигури под услов да не се сечат е:

$$120\cdot(3+\frac{\pi}{4}) = 360+30\pi < 360+30\cdot 3,2 = 456 = 19\cdot 24,$$

при што 456cm е плоштината на впишаната рамка во правоаголникот.

Според тоа, овие фигури не ја покриваат впишаната рамка, па значи постои точка која не лежи во ниедна од фигурите од цртеж 1б, и таа е центар на бараниот круг. ■

Задача 24. *Во квадрат со страна 5cm нацртани се на произволен начин 51 точка. Да се докаже дека помеѓу нив постојат барем три точки кои можат да се покријат со круг со радиус 5/7cm.*

Решение. Квадратот ќе го поделиме на 25 квадратчиња со страна 1cm. Според принципот на Дирихле, постои барем едно квадратче во кое има барем три точки. Опишаниот круг околу тоа квадратче има радиус $\sqrt{2}/2$. Бидејќи $\sqrt{2}/2$ е помало од 0,71, што од друга страна е помало од 5/7, следува дека квадратчето може да се покрие со круг со радиус 5/7. ■

Задача 25. *Во рамнина се дадени* n *точки,* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *така што растојанието* $d(A_i, A_j)$ *помеѓу* A_i *и* A_j *е поголемо од* 2cm, *за* $i\neq j$. *Еден дел од рамнината чија плоштина е помала од* πcm^2 *е избоен со црвена боја, а останатиот со бела боја. Да се докаже дека постои вектор* $\vec{v}$, *таков што: 1) должината* $|\vec{v}|$ *на* $\vec{v}$ *не е поголема од* 1cm *и 2) точките* $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ *се во делот од рамнината обоен со бела боја, каде што* A'_i *е* *единствената точка од рамнината за која векторот* $\overrightarrow{A_iA_i'}$ *е еднаков со векторот* $\vec{v}$.

Решение. Нека за секоj $i=1,2,..,n$, B_i е круг со центар во A_i и радиус 1cm. Од условот во задачата следува дека овие кругови се по парови дисјунктни. Секоj од круговите B_2, B_3, ..., B_n го сместуваме на кругот B_1 со поместување на рамнината (транслациjа) за вектор $\overrightarrow{A_iA_i'}$. Овие n-1 транслации го поместуваат и делот од рамнината обоен со црвена боjа. Бидејќи делот обоен со црвена боjа има плоштина помала од πcm^2, следува дека и по поместувањата на рамнината, постои точка X од B_1 што е обоена со бела боjа. Бараниот вектор е $\vec{v} = \overrightarrow{A_1X}$. ■

2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

2.1. ДЕЛИВОСТ

Во многу прашања од секојдневниот живот, а и од математиката, во кои се врши делење, суштествен поим е поимот за остаток при делењето со даден број.

Методот на конгруенции во множеството на цели броеви е формален аритметички метод заснован на разгледувањето на својствата на целите броеви кои имаат еднакви остатоци при делење со еден ист број. Овој метод, прв го разработил Гаус, иако многу резултати во врска со конгруенциите биле познати и порано.

Нека $\mathbb{Z}$ *е множеството цели броеви, а нека* $\mathbb{N}$ *е можеството природни броеви. За* $m \in \mathbb{N}$ *и* $n \in \mathbb{Z}$, *се вели дека* n **е делив со** m, *т.е. дека* m **е делител на** n, *и се пишува* $m|n$, *ако постои цел број* к, *така што* $n=m\cdot к$. *Нека* $m \in \mathbb{N}$ *и* $a,b \in \mathbb{Z}$. *Ако* m *е делител на разликата* a-b, *т.е.* $m|(a-b)$, *тогаш се вели дека* **бројот** a **е конгруентен** *со бројот* b *по модул* m, *и се пишува:* $a \equiv b(\text{мод } m)$.

Исто така, се пишува $a\not\equiv b$(мод m), *кога се сака да се каже дека бројот* a *не е конгруентен со бројот* b *по модул* m, *што значи дека* $m\nmid(a-b)$.

Задача 1. *Нека* $m\in\mathbb{N}$ *и* $a,b\in\mathbb{Z}$. *Тогаш:*

(1) $a\equiv b$(мод m) *акко постои* $k\in\mathbb{Z}$, *така што* $a=b+k\cdot m$.

(2) $a\equiv b$(мод m) *акко при делењето со* m *броевите* a *и* b *имаат еднакви остатоци.*

Решение. (1) Од дефиницијата на релацијата $\equiv$ следува дека $a\equiv b$(мод m) акко $m|a-b$. Понатаму, $m|a-b$ акко постои $k\in\mathbb{Z}$, така што $a-b=k\cdot m$.

(2) Нека $a=m\cdot p+r$ и $b=m\cdot q+s$, каде што $p,q,r,s\in\mathbb{Z}$, $0\le r<m$ и $0\le s<m$. Тогаш: $a\equiv b$(мод m) акко $m|a-b$ акко $m|(m\cdot p+r)-(m\cdot q+s)$ акко $m|m\cdot(p+q)+(r-s)$ акко $m|(r-s)$. Бидејќи $-m<r-s<m$, следува дека $m|r-s$ акко $r-s=0$. Значи $a\equiv b$(мод m) акко $r=s$. ∎

Задача 2. *Нека* $m\in\mathbb{N}$ *и* $a\in\mathbb{Z}$. *Да се докаже дека* $m|a$ *ако и само ако* $a\equiv 0$(мод m).

Решение. $a\equiv 0$(мод m), акко постои $k\in\mathbb{Z}$ така што $a=m\cdot k+0$, акко постои $k\in\mathbb{Z}$ така што $a=m\cdot k$, акко $m|a$. ∎

Задача 3. *Нека* $m,n\in\mathbb{Z}$. *Тогаш:*

а) $n|n$; *б)* $m|n$ *и* $n|m \Rightarrow m=\pm n$ *и в)* $k|m$ *и* $m|n \Rightarrow k|n$.

Решение. а) Од $n=n\cdot 1$ следува дека $n|n$.

б) Нека $m|n$ и $n|m$. Тогаш постојат $p,q\in\mathbb{Z}$, така што $n=m\cdot p$ и $m=n\cdot q$. Со заменување, се добива $m=m\cdot(p\cdot q)$. Бидејќи по услов $m|n$, следува дека $m\neq 0$, па по делење со m се добива $p\cdot q=1$. Производот на два цели броја е еднаков на 1, акко тие или двата се 1 или двата се -1. Според тоа или $p=q=1$ или $p=q=-1$. Значи $n=\pm m$.

в) Нека $k|m$ и $m|n$. Тогаш постојат $p,q\in\mathbb{Z}$, така што $m=k\cdot p$

и $n=m\cdot q$. Со замена, се добива $n=k\cdot(p\cdot q)$, од што следува дека $k|m$. ■

Задача 4. *Нека* $m\in\mathbb{N}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$. *Да се докаже дека:*

(1) $a\equiv a$(мод m);

(2) $a\equiv b$(мод m) $\Rightarrow$ $b\equiv a$(мод m) *и*

(3) $a\equiv b$(мод m) *и* $b\equiv c$(мод m) $\Rightarrow$ $a\equiv c$(мод m).

Решение. (1) Од $a-a=0$ и $m|0$, следува дека $a\equiv a$(мод m).

(2) Ако $a\equiv b$(мод m), тогаш $m|(a-b)$. Од $(b-a)=(-1)(a-b)$, следува дека $m|(b-a)$, па значи $b\equiv a$(мод m).

(3) Ако $a\equiv b$(мод m) и $b\equiv c$(мод m), тогаш $m|a-b$ и $m|b-c$. Според тоа, $m|(a-b)+(b-c)$, т.е. $m|a-c$. Значи, $a\equiv c$(мод m). ■

Задача 5. *Ако* $a\equiv b$(*мод* m) *и* $c\equiv d$(*мод* m), *тогаш*

$a+c\equiv b+d$(*мод* m), $a-c\equiv b-d$(*мод* m) *и* $a\cdot c\equiv b\cdot d$(*мод* m).

Решение. Од $m|(a-b)$, $m|(c-d)$, $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$, $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)$ и $a\cdot c-b\cdot d=c\cdot(a-b)+b\cdot(c-d)$ следува дека $m|(a+c)-(b+d)$, $m|(a-c)-(b-d)$ и $m|a\cdot c-b\cdot d$.

Според тоа, $(a+c)\equiv(b+d)$(мод m), $(a-c)\equiv(b-d)$(мод m) и $a\cdot c\equiv b\cdot d$(мод m). ■

Задача 6. *Нека* $a\equiv b$(*мод* m). *Тогаш за секој* $c\in\mathbb{Z}$ *важи:* $(a+c)\equiv(b+c)$(*мод* m), $(a-c)\equiv(b-c)$(*мод* m) *и* $a\cdot c\equiv b\cdot c$(*мод* m).

Решение. Следува од задача 5 и задача 4. ■

Задача 7. *Ако* $a\equiv b$(*мод* m), *тогаш за* $n\in\mathbb{N}$: $a^n\equiv b^n$(*мод* m).

Решение. Следува од задача 5. ■

Задача 8. *На еден човек му било речено да се јавува на лекарска контрола на секои седум месеци по еднаш, почнувајќи од октомври. Така, човекот отишол втор пат на контрола во* *месец мај. Кое по ред било првото одење на контрола во месец јануари?*

Решение. Нека месеците јануари, февруари, .., декември, се означени со $1,2,\ldots,12$, соодветно. Нека човекот отишол на контрола прв пат во месец јануари при x-тото одење на контрола. Бидејќи годината има 12 месеци, прашањето од задачата се сведува на тоа да се најде $x\in\mathbb{N}$, така што $10+7\cdot(x-1)\equiv1(\text{мод } 12)$, т.е да се реши равенката:

$$7\cdot x\equiv-2(\text{мод } 12). \tag{1}$$

Не е ставено $10+7\cdot x$, бидејќи првото одење на контрола е за $x=1$, а $10+7\cdot x\equiv5(\text{мод } 12)$. Бидејќи $12\cdot x\equiv0(\text{мод } 12)$, со одземање, се добива

$$5\cdot x\equiv2(\text{мод } 12). \tag{2}$$

Со одземање на (2) од (1), се добива

$$2\cdot x\equiv-4\equiv8(\text{мод } 12). \tag{3}$$

Со множење на (3) со 2 и одземање на резултатот од (2), се добива

$$x\equiv-2(\text{мод } m),\ \text{т.е. } x\equiv10(\text{мод } 12). \tag{4}$$

Од овде следува дека најмалиот ненегативен број x за кој ажи (4), т.е (1) е 10. Значи, човекот ќе отиде прв пат на контрола во месец јануари, во десеттото одење на контрола. ■

Задача 9. *Ако* $НЗД(a,m)=1$ *и* $a\cdot b\equiv a\cdot c$*(мод* m*), тогаш* $b\equiv c$*(мод* m*). Поопшто, ако* $НЗД(a,m)=d$ *и* $a\cdot b\equiv a\cdot c$*(мод* m*), тогаш* $b\equiv c$*(мод* n*), каде што* $n=m/d$. $НЗД(a,m)$ *е ознака за најголемиот заеднички делител на* a *и* m.

Решение. Нека $НЗД(a,m)=d$ и $a\cdot b\equiv a\cdot c(\text{мод } m)$. Нека $n=m/d$ и $p=a/d$. Тогаш n и p се цели броеви и $НЗД(n,p)=1$. Од $a\cdot b\equiv a\cdot c(\text{мод } m)$ следува дека постои цел број k, таков што $a\cdot b=a\cdot c+k\cdot m$. Со делење на ова равенство со d, се добива дека $p\cdot b=p\cdot c+k\cdot n$, од што следува дека $p\cdot(b-c)=k\cdot n$. Бидејќи

НЗД$(n,p)=1$, т.е. n и p немаат заеднички фактори и бидејќи n е делител на $p\cdot(b-c)$ следува дека n е делител на $(b-c)$. Значи, $n|b-c$, од што следува дека $b\equiv c$(мод n). ■

Задача 10. *Нека* $a\equiv b$*(мод* n*)* *и* $a\equiv b$*(мод* m*). Тогаш* $a\equiv b$*(мод* k*), каде што* $k=$*НЗС*(m,n) *е најмалиот заеднички содржател на* n *и* m.

Решение. Нека НЗД$(n,m)=t$. Тогаш $n=t\cdot p$ и $m=t\cdot q$, каде што НЗД$(p,q)=1$. Тогаш НЗС$(n,m)=t\cdot p\cdot q$. Од $n|a-b$ и $m|a-b$, следува дека $t\cdot p|a-b$ и $t\cdot q|a-b$. Нека $a-b=r\cdot t\cdot p$ и нека $a-b=s\cdot t\cdot q$. Бидејќи $r\cdot p=s\cdot q$ и НЗД$(p,q)=1$, следува дека $q|s$. Според тоа $t\cdot p\cdot q|a-b$, т.е. $a\equiv b$(мод k). ■

Задача 11. *Да се најде остатокот при делењето на*

а) $(5^{100}+55)^{100}$ *со* 24; *б)* $(3^{10}+2)^{77}$ *со* 9 *и*

в) $(116+17^{17})^{21}$ *со* 8.

Решение. а) Од тоа што $5^2=25\equiv1$(мод 24), следува дека $5^{100}\equiv1$(мод 24). Според тоа, $5^{100}+55\equiv56\equiv8$(мод 24). Од тоа што $8^2\equiv(-8)$(мод 24) следува дека за секој природен број k, $8^{2k}\equiv(-8)$(мод 24), па $(5^{100}+55)^{100}\equiv(-8)\equiv16$(мод 24). Значи, остатокот при делењето на $(5^{100}+55)^{100}$ со 24 е 16.

б) Од $3^2\equiv0$(мод 9), следува дека $(3^{10}+2)\equiv2$(мод 9). Од $2^7\equiv1$(мод 9), следува дека $(3^{10}+2)^{77}\equiv1$(мод 9).

в) Од $17\equiv1$(мод 8) следува дека $17^{17}\equiv1$(мод 8), од што заедно со $116\equiv4$(мод 8) следува дека $(116+17^{17})\equiv5$(мод 8). Понатаму, $5^2\equiv1$(мод 8), па $(116+17^{17})^{21}\equiv1\cdot5$(мод 8). Значи, при делење ма $(116+17^{17})^{21}$ со 8 се добива остаток 5. ■

Задача 12. *Провери дали броевите* $13^{101}-13^{95}$ *и* $3^{103}+5^{105}$ *се деливи со* 7.

Решение. Да се провери дали некој број a е делив со некој број m, доволно е да се провери дали $a\equiv 0$(мод m). Од тоа што $13\equiv(-1)$(мод 7) следува дека $13^{101}\equiv(-1)$(мод 7) и $13^{95}\equiv(-1)$(мод 7). Значи, $(13^{101}-13^{95})\equiv(-1)-(-1)\equiv 0$(мод 7), т.е. $13^{101}-13^{95}$ е делив со 7. На сличен начин се проверува дека $3^{103}+5^{105}$ не е делив со 7. ■

Задача 13. *Да се докаже дека бројот* $2222^{5555}+5555^{2222}$ *е делив со 7.*

Решение. При делење на 2222 со 7 се добива остаток 3, а при делење на 5555 со 7 се добива остаток 4. Значи, $2222\equiv 3$(мод 7) и $5555\equiv 4$(мод 7). Бидејќи $3^3\equiv(-1)$(мод 7) следува дека $3^6\equiv 1$(мод 7), па според тоа

$2222^{5555}\equiv 3^{5555}\equiv 3^{6\cdot 925+5}\equiv 1^{925}\cdot 3^5\equiv 3^3\cdot 3^2\equiv(-1)\cdot 9\equiv(-2)\equiv$ 5(мод 7).
На сличен начин, $4^3\equiv 1$(мод 7) и $5555^{22222}\equiv 2$(мод 7). На крајот, следува дека $(2222^{5555}+5555^{2222})\equiv 5+2\equiv 0$(мод 7), што значи дека тој број е делив со 7. ■

Задача 14. *На која цифра завршува бројот:*

а) 6^{811}*;* *б)* 2^{1000}*;* *в)* 3^{9999}.

Решение. а) Од $6^2\equiv 6$(мод 10), следува дека за секој природен број k, $6^k\equiv 6$(мод 10). Според тоа и $6^{811}\equiv 6$(мод 10), т.е. 6^{811} завршува на 6.

б) Бидејќи $2^5=32\equiv 2$(мод 10), следува дека за секој природен број k, $2^{5k}\equiv 2^k$(мод 10). Според тоа,

$$2^{1000}\equiv 2^{200}\equiv 2^{40}\equiv 2^8\equiv 2^5\cdot 2^3\equiv 2^1\cdot 2^3\equiv 2^4\equiv 16(\text{мод } 10),$$

што значи дека 2^{1000} завршува на 6.

в) Бидејќи $3^4=81\equiv 1$(мод 10), следува дека

$$3^{9999}\equiv 3^{4\cdot 2499+3}\equiv 1\cdot 3^3\equiv 64(\text{мод } 10).$$

Значи, 3^{9999} завршува на 7. ■

Задача 15. *Да се докаже дека за секој природен број* k *и секои цели броеви* $a\neq b$, a^k-b^k *е делив со* $a-b$.

Решение. Од $a\equiv b(\text{мод }(a-b))$, следува $a^k\equiv b^k(\text{мод }(a-b))$. Според тоа, a^k-b^k е делив со $a-b$. ■

Задача 16. *Да се покаже дека за секој* $n\geq 0$:

а) $17|(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1})$ *и* *б)* $25|(72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1})$.

Решение. а) Од тоа што $5^2=25\equiv 8(\text{мод }17)$ и $2^3=8$, следува

$$3\cdot 5^{2n+1}=3\cdot 5\cdot (5^2)^n\equiv 3\cdot 5\cdot 8^n\equiv(-2)\cdot 8^n(\text{мод }17).$$

Од друга страна, од $2^{3n+1}=2\cdot 8^n$ следува дека

$$(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1})\equiv((-2)\cdot 8^n+2\cdot 8^n)\equiv 0(\text{мод }17).$$

Значи, $17|(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1})$.

б) Од $72\equiv(-3)(\text{мод }25)$, $47\equiv(-3)(\text{мод }25)$ и $28\equiv 3(\text{мод }25)$, следува дека

$$(72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1})\equiv((-3)^{2n+2}-(-3)^{2n}+3^{2n-1})(\text{мод }25).$$

Од $(-1)^{2n}=1$, т.е. $(-3)^{2n}=3^{2n}$, со едноставни замени, следува

$$(-3)^{2n+2}-(-3)^{2n}+3^{2n-1}=3^3\cdot 3^{2n-1}-3\cdot 3^{2n-1}+3^{2n-1}=25\cdot 3^{2n-1}.$$

Од ова равенство се добива $(72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1})\equiv 0(\text{мод }25)$, т.е. $25|(72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1})$. ■

Задача 17. *Нека* $f(x)$ *е полином со целобројни коефициенти. Ако* $a\equiv b(\text{мод }m)$, *тогаш и* $f(a)\equiv f(b)(\text{мод }m)$.

Решение. Нека $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0$, каде што $a_k,a_{k-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{Z}$. Тогаш од задачата 4 следува дека

$$a_ka^k+a_{k-1}a^{k-1}+\ldots+a_0\equiv a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+\ldots+a_0(\text{мод }m),$$

т.е дека $f(a)\equiv f(b)(\text{мод }m)$. ■

Задача 18. *Не постои полином* $f(x)$ *со целобројни коефициенти и степен* ≥ 1, *таков што* $f(c)$ *е прост број за секој цел број* c.

Решение. Нека $f(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ \ldots\ +a_1x+a_0$, каде што $a_k, a_{k-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{Z}$ и $a_k\neq 0$. Ако $a_k>0$, тогаш по некоја вредност на x, со зголемувањето на x се зголемува и f(x), додека ако $a_k<0$, тогаш после некоја вредност на x, со зголемувањето на x, f(x) се намалува. Бидејќи во дефиницијата на поимот "прост број" е вклучено тој да биде позитивен број, претпоставуваме дека $a_k>0$. Истиот доказ покажува дека ако $a_k<0$, тогаш не се добиваат секогаш негативни прости броеви. Бидејќи кога x се зголемува и f(x) се зголемува, можеме да го избереме бројот c доволно голем, така што $f(c)>1$. Да го означиме бројот f(c) со n, т.е. нека $f(c)=n$. Нека, понатаму, j е доволно голем број за кој $f(c+jn)>n$. Но тогаш, од $c+jn\equiv c(\text{мод } n)$ и задача 4 следува дека $f(c+jn)\equiv f(c)\equiv n(\text{мод } n)$. Според тоа, n е делител на $f(c+jn)$ и бидејќи $1<n<f(c+jn)$, следува дека $f(c+jn)$ не е прост број. ∎

Задача 19. *Секој природен број е конгруентен со збирот на неговите цифри по модул 9.*

Решение. Нека n е природен број чии цифри на единици, десетки, стотки, ... итн, се соодветно $a_0, a_1, a_2, \ldots$ итн, т.е. во декаден запис $n=a_k 10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\ \ldots\ +a_1 10+a_0$, каде што $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ се цели броеви помеѓу 0 и 9, т.е. за секој j, $0\leq a_j\leq 9$. Нека, понатаму,

$$f(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ \ldots\ +a_1x+a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10\equiv 1(\text{мод } 9)$, од задачата 17 следува дека $f(10)\equiv f(1)(\text{мод } 9)$, т.е. $n\equiv a_k+a_{k-1}+\ \ldots\ +a_1+a_0(\text{мод } 9)$, што и требаше да се докаже. ∎

Задача 20. *Еден природен број* n *е делив со 9 акко збирот на неговите цифри е делив со 9.*

Решение. Следува од задачата 19 и фактот дека еден број е делив со 9 акко тој е конгруентен со 0 по модул 9. ∎

Задача 21. *Еден природен број е делив со 3 акко збирот на неговите цифри е делив со 3.*

Решение. Нека $n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\dots+a_110+a_0$, и нека $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0$. Тогаш, бидејќи $10\equiv1(\text{мод }3)$, од задачата 17 следува дека $f(10)\equiv f(1)(\text{мод }3)$, што значи дека

$$n\equiv a_k+a_{k-1}+\dots+a_3+a_2+a_1+a_0(\text{мод }3).$$ ∎

Задача 22. *Еден природен број*

$$n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\dots+a_110+a_0,$$

е делив со 11 *акко* $a_0-a_1+a_2-a_3+\dots(-1)^ka_k$ *е делив со* 11.

Решение. Нека

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10\equiv(-1)(\text{мод }11)$, од задачата 17 следува дека $f(10)\equiv f(-1)(\text{мод }11)$, што значи дека

$$n\equiv(-1)^ka_k+(-1)^{k-1}a_{k-1}+\dots+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0(\text{мод }11).$$ ∎

Задача 23. *Еден природен број*

$$n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\dots+a_110+a_0,$$

е делив со 7 *акко збирот*

$$\{(a_0+3a_1+2a_2)+(a_5+3a_7+2a_8)+\dots\dots\}$$
$$-\{(a_3+3a_4+2a_5)+(a_9+a_{10}+a_{11})+\dots\dots\}$$

е делив со 7.

Решение. Од: $10^0\equiv1(\text{мод }7)$, $10^1\equiv3(\text{мод }7)$, $10^2\equiv2(\text{мод }7)$,

$10^3\equiv6\equiv(-1)$(мод 7), $10^4\equiv4\equiv(-3)$(мод 7), $10^5\equiv5\equiv(-2)$(мод 7) и $10^6\equiv1$(мод 7), следува дека за секој $k\geq0$, $10^{6k}\equiv1$(мод 7), $10^{6k+1}\equiv3$(мод 7), $10^{6k+2}\equiv2$(мод 7), $10^{6k+3}\equiv(-1)$(мод 7), $10^{6k+4}\equiv(-3)$(мод 7) и $10^{6k+5}\equiv(-2)$(мод 7). Според тоа,

$$n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0$$
$$=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+10^4a_4+10^5a_5+10^6a_6+10^7a_7+10^8a_8+\ldots$$
$$\equiv a_0+3a_1+2a_2+(-1)a_3+(-3)a_4+(-2)a_5+a_6+3a_7+2a_8+\ \ldots\ (\text{мод } 7).\ ■$$

Задача 24. *Нека* n *е непарен број. Докажи дека бројот*

$$1^{1991}+2^{1991}+\ldots+n^{1991}$$

не е делив со n+2.

Решение. Од

$$2(1^{1991}+2^{1991}+\ \ldots\ +n^{1991}) =$$
$$=2+\{2^{1991}+n^{1991}\}+\{3^{1991}+(n-1)^{1991}\}+\ldots$$
$$\ldots+\{(n-1)^{1991}+3^{1991}\}+\{n^{1991}+2^{1991}\}\equiv2\ (\text{mod } n+2),$$

следува дека:

$$1^{1991}+2^{1991}+\ldots+n^{1991}\not\equiv0\ (\text{mod } n+2).\ ■$$

Задача 25. *Дефинирана е низа* $\{a_i\}$ *со* $a_1=3$, $a_{i+1}=3^{a_i}$, *за* $i>1$. *Кои од броевите помеѓу* 0 *и* 99 *се јавуваат како последни две цифри за бесконечно многу членови на низата.*

Решение. Очигледно $a_3\equiv87(\text{mod } 100)$. Ако $a_i\equiv87(\text{mod } 100)$, тогаш $a_{i+1}\equiv3^{87+100t}(\text{mod } 100)$. Обратно, $3^{20}\equiv1(\text{mod } 100)$, од што следува дека $3^{87+100t}\equiv3^7(\text{mod } 100)$ и $a_{i+1}\equiv3^7(\text{mod } 100)$. Тогаш, од $3^7\equiv87(\text{mod } 100)$ следува дека $a_i\equiv87\ (\text{mod } 100)$. Според тоа, бараниот број е 87. ■

Задача 26. *Да се докаже дека бројот*

$$A = 199101991001991000\ \dots\ 199\underbrace{100\dots0}_{1991}1991$$

е делив со 363.

Решение. Збирот на цифрите на бројот A е:

$$(1 + 9 + 9 + 1)\cdot 1992 \equiv 0 \pmod 3).$$

Затоа $3|A$. Потоа:

$$A=1991(1+10^{1991+4}+10^{1991+1990+2\cdot 4}+\dots+10^{1+2+\dots+1991+4\cdot 1991})$$

$=1991K.$

Бројот 1991 е делив со 11, а освен тоа и:

$$K\equiv 1+(-1)^{1991}+(-1)^{1991+1990}+(-1)^{1991+1990+1989}+\dots$$

$$+\ (-1)^{1991+1990+\dots+2+1}$$

$$\equiv 1-1-1+1+1-1-1+1+1-1-1+1+\dots+1-1-1+1\equiv 0 \pmod{11}.$$

Затоа, бројот A е делив со $3\cdot 11^2=363$. ∎

Задача 27. *Нека* a,b *се цели броеви не едновремено еднакви на* 0. *Тогаш постојат цели броеви* p,q, *такви што*

$$a\cdot p+b\cdot q=\text{НЗД}(a,b).$$

Решение. Ако $b=0$, тогаш $\text{НЗД}(a,0)=a$, па $a=a\cdot 1+0\cdot 1$. Затоа, нека $a\neq 0\neq b$. Нека $|a|$, $|b|$ се апсолутните вредности на a и b соодветно. Тогаш, од Евклидскиот алгоритам за наоѓање НЗД на природни броеви, следува дека постојат цели броеви p и q такви што $|a|\cdot p+|b|\cdot q=\text{НЗД}(|a|,|b|)=\text{НЗД}(a,b)$. Бидејќи $a=\pm|a|$ и $b=\pm|b|$, седува дека $a\cdot(\pm p)+b\cdot(\pm q)=\text{НЗД}(a,b)$. ∎

Задача 28. *Ако* $\text{НЗД}(a,n)=1$ *и ако* $n|ab$, *тогаш* $n|b$.
(Ако $\text{НЗД}(a,b)=1$, a *и* b *се викаат* **заемно прости**, *т.е.* **релативно прости.***)*

Решение. Од $\text{НЗД}(a,b)=1$, следува дека постојат $p,q\in\mathbb{Z}$, така што $a\cdot p+n\cdot q=1$. Тогаш, $b=a\cdot b\cdot p+n\cdot b\cdot q$. Бидејќи $n|n$ и $n|ab$, следува дека $n|b$. ∎

Задача 29. *Нека* $a,b,c\in\mathbb{Z}$. *Најголем заеднички делител на* a,b,c *означен со НЗД*(a,b,c) *е најголемиот цел број кој е делител на* a, b *и* c. *Да се докаже дека ако НЗД*$(a,b,c)=1$, *тогаш:*

$$НЗД(a,b\cdot c)=НЗД(a,b)\cdot НЗД(a,c).$$

Специјално, ако НЗД$(a,b)=$*НЗД*$(a,c)=1$, *тогаш НЗД*$(a,b\cdot c)=1$.

Решение. Нека НЗД$(a,b)=n$, НЗД$(a,c)=m$ и НЗД$(a,b\cdot c)=k$. Тогаш, $n|k$, $m|k$ и постојат броеви r,p,q,t, така што $n=r\cdot a+p\cdot b$ и $m=q\cdot a+t\cdot c$, па:

$$n\cdot m=a\cdot(a\cdot r\cdot q+c\cdot r\cdot t+b\cdot p\cdot q)+(c\cdot b)\cdot(p\cdot t),$$

од што следува дека $k|n\cdot m$. Значи, $k\leq n\cdot m$.

Нека НЗД$(n,m)=s$. Бидејќи $n|a$, $n|b$, $m|a$, $m|c$, $s|n$ и $s|m$, следува дека $s|a$, $s|b$ и $s|c$. Значи, $s|$НЗД(a,b,c), па од условот НЗД$(a,b,c)=1$, следува дека $s=1$. Од тоа што $m|k$, НЗД$(n,m)=1$ и $k=n\cdot u$, каде што $u=k/n$, според задачата 26, следува дека $m|k$. Слично, се добива дека $n|k$. Според тоа, $n\cdot m|k$, т.е. $n\cdot m\leq k$. Од ова неравенство, заедно со неравенството $k\leq n\cdot m$, следува дека $k=n\cdot m$. ■

Задача 30. *Цел број поголем од 1 чии единствени позитивни делители се 1 и самиот број, се вика прост број, а во спротивно, се вика сложен број. Да се докаже дека секој цел број поголем од 1 или е прост број, или е производ од конечно многу прости броеви.*

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето не е точно. Тогаш ќе постојат сложени броеви што не се производ на прости броеви. Бидејќи секое множество од природни броеви има најмал елемент, следува дека постои најмал сложен број што не е производ на прости броеви; нека тоа е бројот N. Бидејќи N е сложен, постои прост број p кој е делител на N. Нека $N=k\cdot p$, при што k е природен број поголем од 1, а помал од N.

Ако k е прост, тогаш N би бил производ на два прости броеви. Затоа, k е сложен број, но бидејќи е помал од N, тој може да се претстави како производ на конечно многу прости броеви, од што пак ќе следува дека N може да се запише како производ на конечно многу прости броеви, што е спротивност. ∎

Задача 31. *Ако* p *е прост број и* $p|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, *тогаш постои* $1 \le j \le k$, *така што* $p|a_j$.

Решение. За секој цел број a,

$$НЗД(a,p)=1 \quad \text{или} \quad НЗД(a,p)=p,$$

при што во вториот случај, $p|a$.

Затоа, нека p не е делител ни на еден од броевите a_j. Тогаш за секој $1 \le j \le k$, $НЗД(a_j,p)=1$, *па со* $(к-1)$ *примени на* задача 27, се добива дека $НЗД(p, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)=1$, што е спротивно на претпоставката $p|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. ∎

Задача 32. (Основна теорема на Аритметика за единственост на факторизација на природни броеви). *Нека* $n>1$ *и нека*

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t,$$

каде што $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_s$, $q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_t$ *се прости броеви. Тогаш* $s=t$ *и за секој* $1 \le i \le s$, $p_i = q_i$.

Решение. Од претходната задача 31, следува дека p_s е *делител на некој од* броевите q_i, но бидејќи тие се прости, следува дека $p_s=q_j$ за некој j, па $p_s \le q_t$. Симетрично, $q_t \le p_s$. Значи $p_s=q_t$. По кратење со p_s, потребно е да се докаже тврдењето од задачата за помал број n/p_s. Заклучокот од задачата следува по s примени на оваа постапка. ∎

2.2. ОЈЛЕРОВА ФУНКЦИЈА И ПРОСТИ БРОЕВИ

Задача 1. *Нека* $m\in\mathbb{N}$ *и* $n\in\mathbb{Z}$. *Да се докаже дека* n *е конгруентен по модул* m *со еден и само еден, т.е. со точно еден од броевите* 0, 1, 2, ..., $m-1$. *Со други зборови, постојат* $k,r\in\mathbb{Z}$ *такви што:* $n=m\cdot k+r$; $0\leq r\leq m-1$; *и* k *и* r *се единствени со тие својства.*

Решение. Бидејќи релацијата за конгруенција по модул m е релација за еквивалентност, таа го разбива множеството $\mathbb{Z}$ на по парови дисјунктни подмножества, наречени класи на конгруенција по модул m. Класата на конгруенција по модул m што содржи даден број p ќе ја означуваме со $C(m,p)$. Според тоа, $n\in C(m,n)$. Бидејќи $C(m,n)$ содржи бесконечно многу броеви, и уште повеќе, бесконечно многу ненегативни броеви, $C(m,n)$ има најмал ненегативен број, и нека тоа е r. Значи, $n\equiv r(\text{мод } m)$ и $r\geq 0$. Ако $r>m$, тогаш од $m|(n-r)$ следува дека $m|(n-r+m)$, т.е. $n\equiv(r-m)(\text{мод } m)$, при што $r-m\geq 0$. Ова противречи на условот r да биде најмал ненегативен број во $C(m,n)$, што значи дека $0\leq r\leq m-1$. За најдениот број r, постои $k\in\mathbb{Z}$ таков што $n=m\cdot k+r$. За доказ на единственоста, нека $n = m\cdot k+r = m\cdot t+s$, при што $0\leq r,s<m-1$. Тогаш, од $n\equiv r(\text{мод } m)$, $n\equiv s(\text{мод } m)$ и $0\leq r,s<m-1$, следува дека $r\equiv s(\text{мод } m)$, што значи дека $m|r-s$. Бидејќи $-m<r-s<m$, следува дека $r-s=0$, т.е. $r=s$. На крајот, од $n = m\cdot k+r = m\cdot t+r$, веднаш следува дека $k=t$. ∎

Задача 2. *Едно множество броеви* $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$ *такво што* $a_0 \in C(m,0)$, $a_1 \in C(m,1)$, $\ldots$, $a_{m-1} \in C(m,m-1)$, *се нарекува* **комплетен систем на остатоци по модул** m. *Да се докаже дека секое множество од* m *последователни цели броеви е комплетен систем на остатоци по модул* m.

Решение. Нека $\{a, a+1, a+2, \ldots, a+m-1\}$ е множество од m последователни броеви. Според задача 1, $a \equiv r(\text{мод } m)$ за некој цел број r, за кој $0 \le r < m$, т.е. $a \in C(m,r)$. Тогаш, за секој t, за кој $0 \le t < m$, важи $(a+t) \equiv (r+t)(\text{мод } m)$. Значи, за $0 \le t \le m-r-1$, $(a+t) \in C(m,r+t)$, бидејќи $0 \le r+t < m$, додека за $m-r-1 < t \le m-1$, $(a+t) \in C(m,r+t-m)$, бидејќи во овој случај $(a+t) \equiv (r+t) \equiv (r+t-m)(\text{мод } m)$ и $0 \le r+t-m < m$.

Според тоа:

$$a \in C(m,r), (a+1) \in C(m,r+1), \ldots, (a+m-r-1) \in C(m,m-1),$$

$$(a+m-r) \in C(m,0), (a+m-r+1) \in C(m,1), \ldots, (a+m-1) \in C(m,r-1),$$

од што следува дека множеството $\{a, a+1, \ldots, a+n-1\}$ е комплетен систем на остатоци по модул m. ∎

Задача 3. *Да се докаже дека за секој природен број* n, $4^n+15n-1$ *е делив со* 9.

Решение. Треба да се докаже дека $4^n+15n-1 \equiv 0(\text{мод } 9)$, за секој n. Комплетен систем на остатоци по модул 9 е множеството $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Бидејќи $4^2=16\equiv 7(\text{мод } 9)$ и $4^3 \equiv 28 \equiv 1(\text{мод } 9)$, следува дека $4^9 \equiv 1(\text{мод } 9)$. Според тоа, доволно е да се испита дали $4^n+15n-1 \equiv 0(\text{мод } 9)$ за $n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8. За $n=0$, $4^n+15n-1=0$ е делив со 9. За $n=1$, $4^n+15n-1=18$ е делив со 9. За $n=2$, $4^n+15n-1 \equiv 36 \equiv 0(\text{мод } 9)$. За $n=3$, $4^n+15n-1 \equiv 45 \equiv 0(\text{мод } 9)$. За $n=4$, $4^n+15n-1 \equiv 63 \equiv 0(\text{мод } 9)$. За $n=5$, $4^n+15n-1 \equiv 81 \equiv 0(\text{мод } 9)$. За $n=6$, $4^n+15n-1 \equiv 90 \equiv 0(\text{мод } 9)$. За $n=7$, $4^n+15n-1 \equiv 108 \equiv 0(\text{мод } 9)$. И на крајот, за $n=8$, $4^n+15n-1 \equiv 126 \equiv 0(\text{мод } 9)$. ∎

Задача 4. *Да се докаже дека за секој природен број* n, n^3+5n *е делив со* 6.

Решение. Комплетен систем на остатоци по модул 6 е 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Според тоа, доволно е да се испита дали n^3+5n е делив со 6 за $n=0,1,2,3,4$ и 5. Бидејќи $0^3\equiv 0$, $1^3\equiv 1$, $2^3\equiv 2$, $3^3\equiv 3$, $4^3\equiv 4$ и $5^3\equiv 5$ (мод 6), добиваме дека

$n^3+5n\equiv n+5n\equiv 6n\equiv 0$(мод 6), т.е. n^3+5n е делив со 6. ∎

Задача 5. *Нека* НЗД$(a,n)=1$ *и нека* $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *е комплетен систем на остатоци по модул* n. *Да се докаже дека за секој* b, *и множеството* $T=\{a\cdot a_1+b,\ a\cdot a_2+b,\ldots,a\cdot a_n+b\}$ *е комплетен систем на остатоци по модул* n.

Решение. Бидејќи НЗД$(a,n)=1$, постојат $c,k\in\mathbb{Z}$, такви што $a\cdot c+n\cdot k=1$, од што следува дека $a\cdot c\equiv 1$(мод n). Ако $d\in\mathbb{Z}$, тогаш постои единствен t, така што $c\cdot(d-b)\equiv a_t$(мод n). Но тогаш, $(d-b)\equiv a\cdot c\cdot(d-b)\equiv a\cdot a_t$(мод n), т.е. $d\equiv(a\cdot a_t+b)$(мод n). Ако $d\equiv(a\cdot a_t+b)$(мод n), тогаш $a_t\equiv a\cdot c\cdot a_t\equiv c\cdot(d-b)\equiv a\cdot c\cdot a_i\equiv a_i$(мод n) што за $t\neq i$ е во спротивност со условот S да е комплетен систем на остатоци по модул n. ∎

Задача 6. *Нека* S *е комплетен систем на остатоци по модул* m, *и нека* $S'\subseteq S$ *се состои од сите броеви во* S, *релативно прости со* m. *Множеството* S' *се вика редуциран систем на остатоци по модул* m. *Да се докаже дека ако* НЗД$(a,m)=1$, *тогаш* a *е конгруентен со единствен број од* S'. *Ако* S'' *е друг редуциран систем на остатоци по модул* m, *тогаш* S' *и* S'' *имаат ист број елементи.*

Решение. Бидејќи S е комплетен систем на остатоци по модул m, постои единствен број $b\in S$, така што $a\equiv b$(мод m). Бидејќи НЗД$(a,m)=1$, следува дека и НЗД$(b,m)=1$, па значи, $b\in S'$. Бидејќи b е единствен таков во S, тој е единствен таков и во S'. Нека S'' е друг редуциран систем на остатоци по модул m. Секој елемент од S'' е конгруентен со точно еден елемент од S', а бидејќи два различни елементи од S' не се конгруентни, следува дека $|S'|\geq|S''|$. Бидејќи S' и S'' можат да си ги сменат местата, следува дека и $|S''|\leq|S'|$. Значи, $|S'|=|S''|$. ■

Задача 7. *Нека* $n\geq1$ *и нека* S' *е редуциран систем на остатоци по модул* n. *Да се покаже дека бројот на сите природни броеви помали или еднакви од* n *и релативно прости со* n, *е еднаков на* $|S'|$. *Овој број се означува со* $\varphi(m)$, *а пресликувањето* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *се вика Ојлерова функција.*

Решение. Нека $S=\{1,2,3,\ldots,m\}$ е комплетен систем на остатоци по модул n. Тогаш, следува дека

$$S'' = \{k \mid k\in S,\ НЗД(m,k)=1\}$$

е редуциран систем на остатоци по модул n, па значи бараниот број е $|S''|=|S'|$. ■

Задача 8. *Да се покаже дека за прост број* p, $\varphi(p)=p-1$.

Решение. Бидејќи за секој $n>1$, $НЗД(n,n)\neq1$, следува дека $\varphi(n)$ е еднаков на бројот од сите позитивни броеви помали од n и релативно прости со n. Ако p е прост број, тогаш сите позитивни броеви помали од p се релативно прости со p. Значи

$$\varphi(p)=p-1.\ ■$$

Задача 9. *Нека* $НЗД(a,n)=1$ *и нека* $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{\varphi(n)}\}$ *е редуциран систем на остатоци по модул* n. *Да се докаже дека и множеството* $T=\{a\cdot a_1,\ a\cdot a_2,\ldots,a\cdot a_{\varphi(n)}\}$ *е редуциран систем на остатоци по модул* n.

Решение. Нека $S'=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ е комплетен систем на остатоци по модул n. Според задачата 5, и множеството

$T'=\{a\cdot a_1, a\cdot a_2, \dots, a\cdot a_n\}$ е комлетен систем на остатоци по модул n, при што $b=0$. Сите од броевите $a\cdot a_j$ се различни меѓу себе. Затоа, доволно е да се докаже дека сите броеви од T се релативно прости. Бидејќи НЗД$(a,n)=1$ и НЗД$(a_j,n)=1$ за секој $a_j\in S$, од задача 1. 25, следува дека НЗД$(a\cdot a_j,n)=1$. ∎

Задача 10. (Ојлерова теорема) *Ако НЗД*$(a,n)=1$, *тогаш*

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\textit{мод}\ n).$$

Решение. Нека $S=\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул n. Според задачата 9, и множеството $T=\{a\cdot a_1,\ a\cdot a_2, \dots, a\cdot a_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул n. Притоа, броевите од T се конгруентни со броевите од S по модул n, па T може да се разгледува и како едно разместување на S по модул n. Затоа, производот на сите броеви од T е конгруентен со произодот на сите броеви од S по модул n, т.е.

$$(a\cdot a_1)\cdot(a\cdot a_2)\cdot\ldots\cdot(a\cdot a_{\varphi(n)})\equiv a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{\varphi(n)}(\text{мод}\ n).$$

Бидејќи за секој i, НЗД$(a_i,n)=1$, според задачата 1. 9, може да се крати со a_i по модул n, од што се добива дека

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\text{мод}\ n). \quad ∎$$

Задача 11. (Мала теорема на Ферма) *Нека* p *е прост број. Тогаш за секој* a, $a^p\equiv a(\textit{мод}\ p)$. *Ако* $p\nmid a$, *тогаш* $a^{p-1}\equiv 1(\textit{мод}\ p)$.

Решение. Кога $p|a$, тогаш $a^p\equiv 0(\text{мод}\ p)$ и $a\equiv 0(\text{мод}\ p)$, па $a^p\equiv a(\text{мод}\ p)$. Ако $p\nmid a$, тогаш по множење на втората конгруенција со a, се добива првата конгруенција. Кога $p\nmid a$, втората конгруенција следува од задача 10 и задача 8. ∎

Задача 12. *Да се докаже дека* $2^{341}-2$ *е делив со* 2, 13 *и* 31.

Решение. Јасно е дека $2|2^{341}-2$.

Од Ојлеровата теорема, т.е. задачата 10, следува дека $2^{10}\equiv 1(\text{мод } 11)$. Тогаш: $2^{341}=2(2^{10})^{34}\equiv 2(1)^{34}\equiv 2(\text{мод } 11)$, што значи дека $11|2^{341}-2$.

Слично се докажува дека $31|2^{341}-2$. ■

Задача 13. *Да се докаже дека функцијата* φ *е мултипликативна, т.е. ако* $НЗД(n,m)=1$, *тогаш* $\varphi(n\cdot m)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$.

Решение. Природните броеви од 1 до $n\cdot m$ ги запишуваме во следнава табела:

1	2	...	m
m+1	m+2	...	m+m
2m+1	2m+2	...	2m+m
...	...	...	...
...	...	...	...
(n−1)·m+1	(n−1)·m+2	...	(n−1)·m+m

Бидејќи $НЗД(m\cdot a+j,m)=НЗД(j,m)$, следува дека или сите броеви од една колона од горната табела се релативно прости со m, или сите не се релативно прости со m. Значи, точно $\varphi(m)$ колони содржат броеви што се релативно прости со m и сите броеви во тие колони се релативно прости со m. Бидејќи $НЗД(n,m)=1$, n-те броеви во j-тата колона формираат комплетен систем на остатоци по модул n. Според дефиницијата на $\varphi(n)$, секоја колона содржи точно $\varphi(n)$ броеви релативно прости со n. Според тоа, во секоја од $\varphi(m)$-те колони има по точно $\varphi(n)$ броеви што се релативно прости и со n и со m. Од тоа што еден број е релативно прост со $n\cdot m$ акко тој е релативно прост со двата од тие броеви, следува дека:

$$\varphi(n\cdot m) = \varphi(n)\cdot\varphi(m). \ ■$$

Задача 14. *Нека* $n=r_1^{\alpha_1}\cdot r_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot r_k^{\alpha_k}$, *е факторизација на природен број* n *на прости фактори. Да се докаже дека*

$$\varphi(n)=n\cdot(1-1/r_1)\cdot(1-1/r_2)\cdot\ldots\cdot(1-1/r_k).$$

Решение. Нека $n=p^{\alpha}$, каде што p е прост број. Единствени броеви меѓу 1 и p^{α} што не се релативно прости со p се оние броеви што се деливи со p, а такви се броевите $1\cdot p$, $2\cdot p,\ldots,$ $p^{\alpha-1}\cdot p$. Нив ги има вкупно $p^{\alpha-1}$, што значи дека:

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha}(1-1/p).$$

Понатаму, заклучокот следува од задача 13. ∎

Задача 15. *Да се најдат последните три цифри на бројот* 1991^{1991}.

Решение. Според Ојлеровата теорема, т.е. задачата 10:

$$1991^{\varphi(1000)}\equiv 1\ (\text{мод } 1000).$$

Бидејќи

$$\varphi(1000)=\varphi(8\cdot 125)=\varphi(2^3)\cdot\varphi(5^3)=1000\cdot(1-1/2)\cdot(1-1/5)$$
$$=1000\cdot 2/5=400,$$

се добива дека:

$$1991^{1991}\equiv 991^{391}\ (\text{мод } 1000).$$

Бидејќи $391=1+2+2^2+2^7+2^8$, од следните конгруенции:

$991^2\equiv 81$, $991^4\equiv 561$, $991^8\equiv 721$, $991^{16}\equiv 841$, $991^{32}\equiv 281$, $991^{64}\equiv 961$, $991^{128}\equiv 521$ и $991^{256}\equiv 441$ (мод 1000),

следува дека:

$$1991^{1991}\equiv 991\cdot 81\cdot 561\cdot 521\cdot 441\equiv 591\ (\text{мод } 1000)\ .$$ ∎

Задача 16. *Нека* $n\geq 1$. *Да се докаже дека* $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$.

Решение. Нека $f(n)=\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$. На почеток ќе покажеме дека ако $n,m>0$ и НЗД$(n,m)=1$, тогаш $f(n\cdot m)=f(n)\cdot f(m)$. Од дефиницијата на $f(n)$, следува дека:

$$f(n)\cdot f(m)=\sum_{d_1|n}\varphi(d_1)\cdot\sum_{d_2|m}\varphi(d_2)=\sum_{d_1|n;\ d_2|m}\varphi(d_1)\cdot\varphi(d_2).$$

Ако $d_1|n$, $d_2|m$ и НЗД$(n,m)=1$, тогаш НЗД$(d_1,d_2)=1$, па според задачата 13, $\varphi(d_1)\cdot\varphi(d_2)=\varphi(d_1\cdot d_2)$. Од тоа што $d|n\cdot m$ акко постојат единствени $d_1|n$ и $d_2|m$ за кои $d=d_1\cdot d_2$, следува дека $f(n)\cdot f(m)=\sum_{d|n\cdot m}\varphi(d)=f(n\cdot m)$.

Нека p е прост и $\alpha\geq1$. Тогаш

$$\begin{aligned}f(p^\alpha)&=\sum_{d|p^\alpha}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^\alpha)\\&=1+p\cdot(1-1/p)+p^2(1-1/p)+\ldots+p^\alpha\cdot(1-1/p)\\&=1+(p-1)+(p^2-p)+(p^3-p^2)+\ldots+(p^\alpha-p^{\alpha-1})\\&=p^\alpha.\end{aligned}$$

Според тоа, ако $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{\alpha_t}$, тогаш

$$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})\cdot f(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot f(p_t^{\alpha_t})=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{\alpha_t}=n\ .\ \blacksquare$$

Задача 17. *Да се докаже дека секој цел број од облик* $6k-1$ *за* $k\in\mathbb{Z}$, *има прост делител од ист облик.*

Решение. Нека $6k-1=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_t$, каде што r_i се прости броеви. Еден прост број различен од 2 и 3 може да е конгруентен по модул 6 само со 1 или −1, бидејќи ако еден цел број е конгруентен по модул 6 со ±2, тогаш тој е делив со 2, а ако е конгруентен по модул 6 со 0 или 3, тогаш е делив со 3. Бидејќи $6k-1\neq2$ и $6k-1\neq3$, следува дека секој од броевите r_i е од облик $6t+1$ или $6t-1$. Ако сите r_i се од облик $6k+1$, тогаш и нивниот производ ќе биде од облик $6k+1$, што е во спротивност со препоставката тој да биде од обликот $6k-1$. $\blacksquare$

Задача 18. *(а) Да се покаже дека постојат бесконечно многу прости броеви.*

(б) Да се докаже дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик $6k-1$.

Решение. Ќе го докажеме тврдењето под (б) од што ќе следува и тврдењето под (а), иако тврдењето под (а) може да се докаже и директно, т.е. независно од (б).

Доказот на тврдењето под (б) ќе го изведеме со контрадикција. Да претпоставиме дека постојат само конечно многу прости броеви од обликот $6k-1$ и тоа нека се $r_1, r_2, \ldots, r_t$. Нека $n=6\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_t-1$. Тогаш, според претходната задача, постои прост делител на n од обликот $6k-1$. Затоа, нека $n=q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot\ldots\cdot q_t$, каде што q_j се прости броеви. Некој од броевите q_j е од облик $6k-1$, па според тоа е еднаков на некој од броевите r_i, но тоа не е можно, бидејќи r_i треба да е делител на n, а бидејќи е делител на $6\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_t$, тој би бил делител и на 1. ∎

Задача 19. *Да се докаже дека за* $n>2$, *броевите* 2^n-1 *и* 2^n+1 *не можат да бидат двата прости.*

Решение. Ако n е непарен, тогаш

$$2^n+1=(2+1)\cdot(2^{n-1}-2^{n-2}+\ldots+1).$$

од што следува дека 3 е делител на 2^n+1. Од $n>2$ следува дека $2^n+1\neq 3$ и $2^n+1>3$. Значи, 2^n+1 не е прост.

Ако n е парен, т.е. $n=2k$, за $k>1$, тогаш

$$2^n-1=(2^k-1)\cdot(2^k+1).$$

Бидејќи $k>1$, следува дека $2^k-1\neq 1\neq 2^k+1$, што значи дека 2^n-1 не е прост. ∎

Задача 20. *Да се докаже дека ако* $(m-1)!+1$ *се дели со* m, *тогаш* m *е прост.*

Решение. Нека m не е прост, т.е. нека $m=k\cdot s$ за $1<k<m$. Тогаш, k е делител и на $(m-1)!$, а од тоа што $1<k$, т.е. k не е делител на 1, следува дека k не е делител на $(m-1)!+1$, што е спротивно со условот m да е делител на $(m-1)!+1$. ■

Задача 21. *Да се докаже дека за секој прост број* $p>3$,

$$p^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24).$$

Решение. Ќе покажеме дека: $8|p^2-1$ и $3|p^2-1$. Бидејќи p е прост и $p>3$, следува дека p е непарен број. Тогаш $p-1$ и $p+1$ се два последователни парни броеви, па едниот од нив е делив со 4. Според тоа производот $(p-1)\cdot(p+1)=p^2-1$ е делив со 8. Од друга страна, броевите $p-1$, p, $p+1$ се три последователни броеви, па еден од нив е делив со 3. Тоа не е бројот p, бидејќи тој е прост број поголем од 3. Значи, еден од броевите $p-1$, $p+1$ е делив со 3, па и нивниот производ $(p-1)\cdot(p+1)=p^2-1$ е делив со 3. ■

Задача 22. *Да се најдат сите прости броеви* p *за кои и* $8p^2+1$ *е прост број.*

Решение. Ако p е прост број, тогаш $p\equiv\pm1(\text{мод } 3)$ или $p=3$. За $p=3$, $8p^2+1=73$ е прост број. За $p>3$ важи $p\equiv\pm1(\text{мод } 3)$, па $(8p^2+1)\equiv(8+1)\equiv0(\text{мод } 3)$, т.е. $8p^2+1$ не е прост број. Значи единствен таков број е $p=3$. ■

Задача 23. *Да се најдат сите прости броеви* p *за кои бројот* $2p+1$ *е куб од некој број.*

Решение. Нека p е прост број и нека постои $k\in\mathbb{Z}$, така што $2p+1=k^3$. Бидејќи $2p+1$ е непарен број, следува дека и k е непарен број. Нека $k=2s+1$. Тогаш,

$$2p=k^3-1=(k-1)\cdot(k^2+k+1)=2s\cdot(4s^2+6s+3).$$

За да p биде прост, треба s да биде 1. Тогаш $k=3$, а $p=13$. ■

Задача 24. *Докажи дека равенката*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

има единствено решение во $\mathbb{N}$ *ако и само ако* n *е прост број.*

Решение. Имаме $y=nx/(n-x)$. Ако n е прост број, тогаш $(n-x)|x$ или $(n-x)|n$ само ако е $x=n-1$. Ако е $n=pq$ и $p,q>1$, тогаш освен $x=n-1$ и $y=n(n-1)$ го имаме и следново решение: $x=n-p$, $y=q(n-p)$. ∎

Задача 25. *Познато е дека има само два прости броја такви што нивната реципрочна вредност запишана како децимален број има период 7. Еден од нив е 4649, бидејќи*

$$\frac{1}{4649} = 0{,}00021510002151\ldots \quad .$$

Да се најде вториот број.

Решение. Од $\dfrac{1}{4649} = \dfrac{251}{10^7} + \dfrac{251}{10^{14}} + \dfrac{251}{10^{21}} + \ldots$ т.е. од

$$\frac{1}{4649} = 251\cdot\left(\frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^{14}} + \frac{1}{10^{21}} + \ldots\ldots\right) = \frac{251}{10^7-1},$$

се добива дека:

$$\frac{10^7-1}{4649} = 2151 = 9\cdot 239.$$

Од горното равенство се добива дека:

$$\frac{1}{239} = \frac{41841}{10^7-1} = 0{,}0041841004184100\ldots \quad ,$$

а бидејќи 239 е прост број, следува дека бараниот прост број е 239. ∎

Задача 26. *Да се најдат сите прости броеви* p,q *и* r *за кои важи* $r = p^q + q^p$.

Решение. Забележуваме дека барем еден од броевите p,q и r е парен, и дека $r\neq 2$. Не се губи од општоста (поради симетријата на p и q) ако се претпостави дека $q=2$. Тогаш:

$$r = p^2 + 2^p \; .$$

Да разгледаме деливост со 3.

Бидејќи p е непарен број, ако $p\neq 3$, тогаш:

$$r = p^2 + 2^p \equiv (\pm 1)^2 + (-1)^p \equiv 0 \pmod 3.$$

Од тоа што r е прост број, следува дека мора да е $r=3$. Но тогаш $p=1$, па p не е прост број.

Значи, мора да е $p=3$, и во тој случај $r=17$ е прост број. Затоа бараните тројки броеви се $(p,q,r)=(3,2,17)$ и $(p,q,r)=(2,3,17)$. ■

2.3. ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Задача 1. *Да се докаже дека последна цифра на квадрат на цел број може да биде само* 0, 1, 4, 5, 6 *и* 9.

Решение. Нека целиот број n завршува на цифра k, каде што $k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Тогаш k^2 завршува на 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 соодветно, па и n^2 мора да завршува на некој од броевите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. ∎

·Задача 2. *Да се докаже дека збирот од квадратите на пет последователни природни броеви не е кадрат на цел број.*

Решение. Збирот од квадратитет на пет последователни броеви може да се запише како:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2).$$

Ако $5(n^2+2)=k^2$ за некој $k\in\mathbb{Z}$, тогаш $5|k$, па $k=5s$, од што следува дека $5(n^2+2)=25s^2$, т.е. $5|(n^2+2)$. Од претходната задача следува дека n^2 може да завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 и 9, па n^2+2 може да завршува на една од цифрите 1, 2, 3, 6, 7 и 8. Но еден број е делив со 5 акко тој завршува на цифра 0 или 5. ∎

Задача 3. *Докажи дека производот на три последователни природни броја не може да биде еднаков на* n*-ти степен* ($n>1$, $n\in\mathbb{N}$) *на некој природен број.*

Решение. Нека $k(k+1)(k+2)=a^n$. Бидејќи $k+1$ е заемно прост со k и $k+2$, мора да е:

$$k+1=b^n \quad \text{и} \quad k(k+2)=c^n, \quad (b,c\in\mathbb{N}).$$

Но тогаш:

$$1 = (k+1)^2 - k(k+2) = b^{2n} - c^n \neq 1. \ ■$$

Задача 4. *Дали постојат природни броеви* m *и* n *така што:*

$$4n\cdot(n+1) = m\cdot(m+1) \ ?$$

Решение. Да претпоставиме дека постојат природни броеви m и n така што $4n\cdot(n+1)=m\cdot(m+1)$. Тогаш,

$$m^2+m+1 = 4n\cdot(n+1)+1 = (2n+1)^2$$

е полн квадрат што не е можно бидејќи:

$$m^2 < m^2+m+1 < (m+1)^2. \ ■$$

Задача 5. *Да се докаже дека ни за еден природен број* n, *бројот* n^2+3n+5 *не е делив со* 121.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$, $n^2+3n+5=(n+7)\cdot(n-4)+33$. Разликата на броевите $n+7$ и $n-4$ е делива со 11, па тие броеви или двата се деливи со 11 или двата не се деливи со 11. Во првиот случај $(n+7)\cdot(n-4)$ е делив со 121, па бидејќи $121\nmid 33$, следува дека 121 не е делител на n^2+3n+5. Во вториот случај, $(n+7)\cdot(n-4)$ не е делив со 11, а бидејќи 33 е делив со 11, следува дека 11, па значи и 121 не е делител на n^2+3n+5. ■

Задача 6. *Да се докаже дека производот на* k *последователни природни броеви е делив со* $k!$.

Решение. Нека се даени k последователни броеви $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$. Бидејќи $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)=\binom{n+k}{k}\cdot k!$ и бидејќи $\binom{n+k}{k}$ е цел број, следува дека $k!$ е делител на $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$. ■

Задача 7. *Да се најдат сите парови на природни броеви* m *и* n ($m \neq n$) *за кои важи:*

i) *аритметичката средина на* m *и* n *е двоцифрен број, и*

ii) *ако цифрите на тој број си ги заменат местата се добива геометриска средина на броевите* m *и* n.

Решение. Од условот на задачата важи:

$$(m+n)/2 = 10p+q \quad \text{и} \quad \sqrt{mn} = 10q+p$$

каде што $0<p,q<10$. Од овде,

$$(m-n)^2 = (m+n)^2-4mn = (20p+2q)^2-4(10q+p)^2= 4\cdot 99\cdot (p^2-q^2)>0.$$

Значи, $4\cdot 9\cdot 11\cdot (p-q)(p+q)$ е полн квадрат, односно $11\cdot (p-q)(p+q)$ е полн квадрат. Затоа $11|(p-q)$ или $11|(p+q)$. Бидејќи $p-q<9$ мора $11|(p+q)$, а уште повеќе $p+q=11$ бидејќи $p+q<20$. Но $11\cdot (p-q)\cdot (p+q)=11^2\cdot (p-q)$ е полн квадрат, па мора да е $p-q=1$. Затоа $p=6$, $q=5$, а од овде е $m+n=130$ и $|m-n|=66$. Значи, $(m,n)=(98,32)$ или $(m,n)=(32,98)$. ■

Задача 8. *На табла биле напишани броевите* 1, 2, 3, 4, ..., 1989, 1990. *Еден ученик избришал два од тие броеви и на нивно место ја напишал нивната разлика. Оваа постапка ја повторувал и по одреден број повторувања на таблата биле напишани само нули. Да се докаже дека ученикот направил некоја грешка при собирањето.*

Решение. При бришење на два броја и запишување на нивната разлика, парноста на бројот на непарните броеви на таблата не се менува, бидејќи ако се избришат два непарни броја или два парни броја, тогаш се допишува парен број, а ако се брише еден парен и еден непарен број, тогаш се дописува непарен број. За да може да се добијат само нули, на почетокот требало на таблата да има парен број непарни броеви, додека помеѓу броевите 1, 2, 3, ..., 1989, 1990 има непарен број непарни броеви. ■

Задача 9. *Докажи дека за секој* $n\in\mathbb{N}$, *НЗД*$(14n+3,21n+4)=1$.

Решение. Нека $d\,|\,14n+3$ и $d\,|\,21n+4$, за $d>0$. Тогаш $14n+3=a\cdot d$ и $21n+4=b\cdot d$, од што после множење на првото равенство со 3, а на второто со 2 и со нивно одземање, се добива $1=(3a-2b)\cdot d$, што е можно само за $d=1$. Значи, НЗД$(14n+3,21n+4)=1$. ∎

Задача 10. *Да се реши во* $\mathbb{N}$ *равенката:*

$$\frac{1}{x\cdot y}+\frac{1}{y\cdot z}+\frac{1}{z\cdot x}=1\ .$$

Решение. Бидејќи $a,b,c\geq1$, следува дека трите броеви $\frac{1}{x\cdot y}, \frac{1}{x\cdot z}, \frac{1}{y\cdot z}$ се поголеми од нула. Бидејќи нивниот збир е 1, според принципот на Дирихле, следува дека барем еден од нив е поголем или еднаков од 1/3. Заради симетрија, не се губи од општоста ако се претпостави дека $\frac{1}{x\cdot y}\geq\frac{1}{3}$, т.е. $x\cdot y\leq3$. Од тоа што $\frac{1}{x\cdot y}<1$, следува дека $1<x\cdot y\leq3$. Значи, можни се следниве решенија: $x=1$, $y=2$; $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=3$; и $x=3$, $y=1$. Во првите два случаја се добива равенката:

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{2\cdot z}=\frac{1}{2}\ ,$$

чие решение е $z=3$. Во вторите два случаја, се добива равенката:

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{3\cdot z}=\frac{2}{3},$$

чие решение е $z=2$. Според тоа, решение на равенката во $\mathbb{N}$ се сите пермутации на тројката $(1,2,3)$. ∎

Задача 11. *Да се реши во* $\mathbb{N}$ *равенката*

$$n\cdot m+m\cdot k+k\cdot n-n\cdot m\cdot k=2\ .$$

Решение. Со смените $x=n-1$, $y=m-1$ и $z=k-1$, дадената равенка се сведува на равенката $x+y+z=x\cdot y\cdot z$, за која се бараат решенија ≥0. Ако некој од x, y, z е еднаков на 0, тогаш сите мора да се 0, па едно решение е тројката

$(0,0,0)$. Ако сите x,y,z се позитивни, тогаш со делење со $x \cdot y \cdot z$ дадената равенка се сведува на равенката од задачата 10, па нејзини решенија се сите пермутации на тројката $(1,2,3)$. Според тоа, бараните решенија се тројката $(1,1,1)$ и сите пермутации на тројката $(2,3,4)$. ∎

Задача 12. *Да се реши во* $\mathbb{N}$ *равенката*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 .$$

Решение. Бидејќи равенката е симетрична по x,y,z, не се губи од општост ако се претпостави дека $x \le y \le z$. Тогаш:

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x},$$

од што следува дека $x \le 3$. Бидејќи $x,y,z \in \mathbb{N}$, следува дека трите броеви $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ се помали од 1. Според тоа, $1<x \le 3$. Значи, можно е $x=2$ и $x=3$.

Во првиот случај, т.е. за $x=2$, се добива $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Од претпоставката $y \le z$, следува дека $\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{y}$, т.е. $2<y \le 4$. За $y=3$, оваа равенка има решение $z=6$, додека за $y=4$ има решение $z=4$.

Во вториот случај, т.е. за $x=3$, се добива $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Од претпоставката $y \le z$, следува дека $\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{y}$, т.е. $3 \le y \le 3$. За $y=3$, равенката има решение $z=3$.

Од горната дискусија следува дека решенија на дадената равенка во $\mathbb{N}$ се сите пермутации на тројките $(2,3,6)$, $(2,4,4)$ и $(3,3,3)$. ∎

Задача 13. *Равенката* $x^2 - y^2 = 105$ *да се реши во множеството на природни броеви.*

Решение. Имаме $(x-y)\cdot(x+y)=105$. Бидејќи x и y се природни броеви, мора да е $x-y>0$ и $x-y < x+y$. Според тоа, бројот 105 треба да се разложи на два множители, при што помалиот од нив е помал од $\sqrt{105}$ односно помал од 10. Значи, $x-y$ може да биде еднаков на еден од броевите 1,3,5 или 7.

Така добиваме четири системи равенки:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=105 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=35 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=21 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=7 \\ x+y=15 \end{cases}$$

чии решенија се :

$$\begin{cases} x_1=53 \\ y_1=52 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2=19 \\ y_2=16 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3=13 \\ y_3=8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_4=11 \\ y_4=4 \end{cases}. \blacksquare$$

Задача 14. *Да се реши во* $\mathbb{N}$ *равенката*:

$$x^2 - xy + y^2 = z^2$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик:

$$x(x-y) = z^2-y^2 .$$

Ако $x=y$, тогаш $y=z$, т.е. за секој $k\in\mathbb{N}$, имаме решение:

$$x = y = z = k . \tag{1}$$

Ако $x\neq y$, тогаш $y\neq z$ и равенката е еквивалентна со:

$$\frac{x}{z+y} = \frac{z-y}{x-y} .$$

Да ставиме $\frac{x}{z+y} = \frac{z-y}{x-y} = \frac{n}{m}$, каде m и n се цели позитивни броеви. Тогаш $mx=n(z+y)$ и $n(x-y)=m(z-y)$, т.е.

$$m\cdot x-n\cdot y-n\cdot z=0 \quad \text{и} \quad n\cdot x+(m-n)\cdot y-m\cdot z=0.$$

Со елиминација на x од последните две равенки се добива следната равенка:

$$(m^2 - mn + n^2)y = (m^2 - n^2)z, \tag{2}$$

додека со елиминација на z се добива равенката:

$$(2mn-n^2)y = (m^2- n^2)x. \tag{3}$$

При $m=n$ добиваме $m^2y = 0$, т.е. $y=0$ што е невозможно бидејќи решението се бара во множеството на природни броеви.

Според тоа $m\neq n$, т.е. $m^2-n^2\neq 0$. Исто така $n=2m$ (т.е. $2mn-n^2=0$) дава $(m^2- n^2)x = 0$, т.е. $x=0$, што повторно не е можно. Според тоа, $m^2- n^2 \neq 0$ и $2mn - n^2 \neq 0$ и затоа (2) и (3) можеме да ги запишеме во облик:

$$\frac{x}{2mn-n^2} = \frac{y}{m^2-n^2} = \frac{z}{m^2-mn+n^2},$$

т.е. за бараните броеви x,y и z треба да важи пропорцијата:

$$x:y:z = (2mn-n^2):(m^2-n^2):(m^2-mn+n^2). \tag{4}$$

Бидејќи $m^2-mn+n^2>0$, следува дека и $m^2-n^2>0$ т.е. $m>n$.

Да забележиме дека при $m = 2n$ во десниот дел на (4) добиваме три еднакви броеви, што значи дека (4) го вклучува веќе најденото решение (1). Така, формулата (4) при $m>n$ ги дава сите решенија на дадената равенка. ∎

Задача 15. *Да се покаже, дека равенката* $x^4-2y^2=1$ *нема решение во множеството природни броеви.*

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$2y^2=(x-1)(x+1)(x^2+1). \tag{1}$$

Од (1) следува дека x е непарен број, а y е парен број, т.е. $x=2p+1$, $y=2q$, каде p и q се природни броеви. Сега равенството (1) го запишуваме во обликот:

$$q^2=(p^2+p)(2(p^2+p)+1).$$

Множителите p^2+p и $2(p^2+p)+1$ се заемно прости, бидејќи нивниот заеднички делител е делител и на разликата

$$2(p^2+p)+1-2(p^2+p).$$

Значи, секој од овие множители мора да е полн квадрат. Ако $p(p+1)=z^2$, тогаш секој од овие множители мора да е точен квадрат, т.е. $p=a^2$ и $p+1=b^2$. Но тогаш $b^2-a^2=1$. Од друга страна,

$$b^2-a^2\geq(a+1)^2-a^2=2a+1\geq1.$$

Значи, единствено возможно е $a=0$ и $b=1$, т.е. $p=0$ и затоа $x=1$ и $y=0$. Но, бидејќи $0\notin\mathbb{N}$ заклучуваме дека дадената равенка нема решение во множеството природни броеви. ∎

Задача 16. *Нека* p *и* q *се заемно прости природни броеви. Интервалот* $[0,1]$ *е поделен на* $p+q$ *еднакви интервали. Да се покаже дека во секој од овие интервали, освен крајните, лежи точно по еден од броевите:*

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots,\ \frac{p-1}{p};\ \frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots,\ \frac{q-1}{q}.$$

Решение. Бидејќи p и q се заемно прости, секој од нив е заемно прост со $p+q$. Според тоа броевите:

$$\frac{i}{p},\ \frac{j}{q},\ \frac{i+j}{p+q}\ (\ i = 1,2,\ldots,p-1 \text{ и } j = 1,2,\ldots q-1)$$

се различни помеѓу себе, и секој од броевите $\frac{i+j}{p+q}$ лежи помеѓу $\frac{i}{p}$ и $\frac{j}{q}$, што значи дека сите дропки лежат во различни интервали

$$\left[\frac{k}{p+q},\ \frac{k+1}{p+q}\right],\quad k = 1,2,\ldots,p+q-2\ .\ \blacksquare$$

Задача 17. *Да се докаже дека постојат бесконечно многу природни броеви* n, *кои се содржат во* 2^n+1.

Решение. Со математичка индукција ќе докажиме дека за секој природен број k, важи $3^k|(2^{3^k}+1)$.

За $k=1$ тврдењето е важи, бидејќи $3|(2^3+1)$.

Да претпоставиме дека за k важи $3^k|(2^{3^k}+1)$. Тогаш:

$$\begin{aligned}2^{3^{k+1}}+1 &= (2^{3^k})^3 + 1^3 = (2^{3^k}+1)\{(2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1\}\\ &= (2^{3^k}+1)\{(2^{3^k})^2 - 1 - (2^{3^k}+1) + 3\}\\ &= (2^{3^k}+1)\{(2^{3^k}-2)(2^{3^k}+1) + 3\}.\end{aligned}$$

Според индуктивната претпоставка имаме

$$3^k|(2^{3^k}+1) \quad \text{и} \quad 3|(2^{3^k}-2)(2^{3^k}+1)+3,$$

па затоа $3^{k+1}|(2^{3^{k+1}}+1)$. $\blacksquare$

Задача 18. *За дадени броеви* n, m, s, *да се најде најмал природен број кој при делење со* $n, n+1, \dots, n+m$, *дава остатоци* $s, s+1, \dots, s+m$ *соодветно.*

Решение. Нека N е бараниот број. Тогаш постојат цели броеви $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m$, такви што $N=a_i\cdot(n+i)+s+i$, за секој $0\le i\le m$. Да го разгледаме бројот $N+n-s$. За секој $0\le i\le m$,

$$N+n-s = a_i\cdot(n+i)+i+n = (a_i+1)\cdot(n+i),$$

од што следува дека бројот $N+n-s$ е делив со секој од броевите $n, n+1, n+2, \dots, n+m$. Според тоа, бараниот број е еднаков на $M-n+s$, каде што $M=НЗС(n, n+1, \dots, n+m)$. ∎

Задача 19. *Тројката броеви* $(2,3,7)$ *го задоволува следново својство: Производот на произволни два од тие три броеви е конгруентен со* -1 *по модул третиот број, т.е.* $z\mid(x\cdot y+1)$ *за која било пермутација* (x,y,z) *на* $(2,3,7)$. *Да се докаже дека тоа е единствена тројка природни броеви поголеми од* 1 *што го задоволува тоа својство.*

Решение. Нека $x, y, z\in\mathbb{N}$ ги задоволуат условите:

$$x\mid(y\cdot z+1),\quad y\mid(x\cdot z+1)\quad \text{и}\quad z\mid(y\cdot x+1)\ . \tag{1}$$

Да забележиме дека броевите x, y, z по парови се заемно прости, бидејќи ако $НЗД(x,y)>1$, тогаш $НЗД(x\cdot z, y)=u>1$, па бројот $x\cdot z+1$ не е делив со u, од што следува дека не е делив ни со y. Според тоа, овие броеви се и различни меѓу себе.

Од (1), следува дека бројот $s=y\cdot z+x\cdot z+y\cdot x+1$, е делив со секој од броевите x, y и z, а бидејќи тие се по парови заемно прости, s е делив и со производот $x\cdot y\cdot z$. Затоа, $s\ge x\cdot y\cdot z$. Без губење на општоста, може да се претпостави дека $2\le x<y<z$.

Ако $y\ge 4$, тогаш $z\ge 5$, па $x\cdot y\cdot z\ge 40$ и:

$$s = y\cdot z + x\cdot z + y\cdot x + 1 \le \frac{x\cdot y\cdot z}{5} + \frac{x\cdot y\cdot z}{4} + \frac{x\cdot y\cdot z}{2} + 1$$

$$= x\cdot y\cdot z - \frac{x\cdot y\cdot z}{20} + 1 \le x\cdot y\cdot z - \frac{40}{20} + 1 < x\cdot y\cdot z\ .$$

Од горната контрадикција, следува дека мора $y<4$, па значи $x=2$ и $y=3$. Бидејќи бројот $x\cdot y+1=7$ е делив со z, следува дека $z=7$. ∎

Задача 20. *Да се најдат сите природни броеви* $n>1$, *такви што секој прост делител на* n^6-1 *е делител на барем еден од броевите* n^3-1, n^2-1.

Решение. Бројот n^6-1 се разложува на множители на следниов начин:

$$n^6-1=(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+n+1)\cdot(n^2-n+1).$$

Ако p е прост делител на n^6-1, а е делител и на некој од множителите $n-1, n+1, n^2+n+1$, тогаш тој е делител и на барем еден од броевите:

$$n^3-1=(n-1)\cdot(n^2+n+1) \quad \text{или} \quad n^2-1=(n-1)\cdot(n+1).$$

Затоа, е доволно да се испитаат простите делители на n^2-n+1, со што задачата се сведува на следнава задача:

Да се најдат сите природни броеви $n>1$, *такви што секој прост делител на* n^2-n+1 *е делител на барем еден од броевите* n^3-1, n^2-1 .

Од $n^2-n+1=n\cdot(n-1)+1$, следува дека НЗД$(n^2-n+1,n-1)=1$. Ако d е заеднички делител на n^3-1 и на n^2-n+1, тогаш d е делител и на $(n^3-1)+n\cdot(n^2-n+1)=n^2-n-1$. Со собирање, се добива дека $d|2$, а бидејќи n^2-n+1 не е парен, следува дека d е непарен, т.е. $d=1$. Значи и НЗД$(n^2-n+1,n^3-1)=1$. Според тоа, ако n е еден од бараните броеви, т.е. за секој прост делител $p>1$ на n^2-n+1 важи дека p е делител и на еден од бровите n^3-1 или n^2-1, тогаш p мора да е делител на $n+1$. Ако p е прост број, ако $p|n^2-n+1$ и $p|n+1$, тогаш $p|(n+1)^2$, па според тоа $p|(n+1)^2-(n^2-n+1)$, т.е. $p|3n$.

Бидејќи $p>1$ и $p|n+1$, следува дека $p\nmid n$, па значи $p|3$, т.е. $p=3$. Значи, $n^2-n+1=3^t$ за некој $t\geq 1$. Од друга страна, $p|(n^2-n+1)-(n+1)$, т.е. $p|n\cdot(n-2)$, од што следува дека $3|n-2$, т.е. $n=3k+2$ за некој k. Според тоа,

$$3^t = n^2-n+1 = 9k^2+12k+4-3k-2+1 = 9k^2+9k+3 = 3\cdot(3k^2+3k+1)$$

од што следува дека $t=1$ и $k=0$.

Значи, само $n=2$ може да биде бараниот број, а дека тој навистина е решение, следува од следниве пресметки:

$$2^6-1 = 63 = 3\cdot 3\cdot 7; \quad 2^3-1 = 7; \quad и \quad 2^2-1 = 3. \quad \blacksquare$$

2.4. ЦЕЛИ БРОЕВИ

Задача 1. *Нека* $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0\neq b$ *и нека НЗД*$(a,b)=d$. *Ако* $d\nmid c$, *тогаш равенката:*

$$a\cdot x + b\cdot y = c \tag{1}$$

нема целобројни решенија. Ако $d|c$, *тогаш равенката* (1) *има бесконечно многу целобројни решенија. Ако* $x=x_0$, $y=y_0$ *е едно целобројно решение на равенката* (1), *тогаш сите целобројни решенија на* (1) *се дадени со:*

$$x = x_0 + t\cdot(b/d) \quad \text{i} \quad y = y_0 - t\cdot(a/d)\ , \tag{2}$$

каде што $t\in\mathbb{Z}$.

Решение. Ако $d|a$ и $d|b$, тогаш $d|(a\cdot x+b\cdot y)$ за секој $x,y\in\mathbb{Z}$, па според тоа, ако равенката (1) има целобројни решенија, тогаш $d|c$.

Нека $d|c$ и нека $c=d\cdot e$. Бидејќи $d=$НЗД(a,b), од Евклидскиот алгоритам следува дека постојат $r,s\in\mathbb{Z}$, такви што $a\cdot r+b\cdot s=d$, па бидејќи $a\cdot(r\cdot e)+b\cdot(s\cdot e) = d\cdot e = c$ следува дека парот $(r\cdot e,s\cdot e)$ е решение на (1).

Нека парот (x_0,y_0) е решение на (1). Од равенството:

$$a\cdot(x_0+t\cdot(b/d))+b\cdot(y_0-t\cdot(a/d)) =$$
$$= a\cdot x_0+b\cdot y_0+(a\cdot t\cdot b)/d-(b\cdot t\cdot a)/d=c,$$

следува дека за секој $t\in\mathbb{Z}$, и парот $(x_0+t\cdot(b/d),y_0-t\cdot(a/d))$ е решение на равенката (1). Обратно, нека парот (x,y) е произволно целобројно решение на равенката (1). Тогаш

$a\cdot(x_0-x)+b\cdot(y_0-y)=0$, па според тоа, $y-y_0=(a/b)\cdot(x_0-x)$. Нека $a=a_1\cdot d$ и нека $b=b_1\cdot d$. Бидејќи x_0-x и y_0-y се цели броеви, следува дека:

$$b|a\cdot(x_0-x), \quad \text{т.е.} \quad b_1|a_1\cdot(x_0-x).$$

Бидејќи НЗД$(a_1,b_1)=1$, следува дека $b_1|x_0-x$. Значи, $x=x_0+b_1\cdot t=x_0+t\cdot(b/d)$ за некој $t\in\mathbb{Z}$. Но тогаш:

$$y_0-y=(a/b)\cdot(b/d)\cdot t, \quad \text{т.е.} \quad y=y_0-t\cdot(a/d). \ \blacksquare$$

Задача 2. *Линеарната конгруентна равенка*

$$a\cdot x\equiv b(\mathrm{mod}\ n) \tag{1}$$

има решение акко d *е делител на* b, *каде што* $d=$*НЗД*(a,n). *Притоа, ако* d *е делител на* b, *тогаш решението е единствено по мод* n/d. *Ако* $d=1$, *тогаш равенката* (1) *има единствено решение по модул* n.

Решение. Ако за $x=x_0$, $a\cdot x_0\equiv b($мод $n)$, тогаш постои y_0, така што $a\cdot x_0=b+n\cdot y_0$, т.е. равенката

$$a\cdot x-n\cdot y=b \tag{2}$$

има решение по x и y. Обратно, ако равенката (2) има решение $x=x_0$, $y=y_0$ по x и y, тогаш $a\cdot x_0\equiv a\cdot x_0-n\cdot y_0\equiv b($мод $n)$, па значи равенката (1) има решение. Затоа ја разгледуваме Диофантовата равенка (2), која според претходната задача има решение акко $d|b$.

Понатаму, нека (x_0, y_0) и (x_1,y_1) се две решенија на равенката (2). Пак според претходната задача, следува дека $x=x_0+t\cdot(n/d)$, т.е. дека $x_0\equiv x_1($мод $n/d)$, што требаше да се докаже.

Последното тврдење следува од претходните, бидејќи кога $d=1$, тогаш d е делител на b и $n/d=n$. $\blacksquare$

Задача 3. *Да се решат равенките:*

(а) $14\cdot x\equiv 5(\mathrm{mod}\ 45)$ *и* *(б)* $5\cdot x\equiv 30(\mathrm{mod}\ 55)$.

Решение. (а) Бидејќи НЗД(14, 45)=1, следува дека равенката има единствено решение. Собирајќи со 45 три пати, бидејќи $0\equiv 45(\text{мод } 45)$, добиваме $14\cdot x\equiv 5+45+45+45\equiv 140(\text{мод } 45)$. Делејќи со 14, пак користејќи го фактот дека НЗД(14, 45)=1, добиваме дека $x\equiv 10(\text{мод } 45)$. Значи равенката има единствено решение по модул 45.

(б) Бидејќи НЗД(5, 55)=5 и 5 е делител на 30, равенката има решение. Делејќи со 5 ја добиваме равенката $x\equiv 6(\text{мод } 11)$. Според тоа, равенката $5\cdot x\equiv 30(\text{мод } 55)$ има 5 решенија по модул 55, а тоа се: $x=6$, $x=6+11=17$, $x=17+11=28$, $x=28+11=39$ и $x=39+11=50$. ■

Задача 4. (Кинеска теорема за остатоци) *Нека* $m_1,m_2,\dots,m_k\in\mathbb{N}$ *се такви што:* НЗД$(m_i,m_j)=1$ *за секои* $i\neq j$. *Нека* $s_1,s_2,\dots,s_k\in\mathbb{Z}$. *Тогаш постојат* $x_1,x_2,\dots,x_k\in\mathbb{Z}$, *такви што:*

$$m_1\cdot x_1+s_1=m_2\cdot x_2+s_2=\dots=m_k\cdot x_k+s_k.$$

Решение. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k. За $k=1$ нема што да се докажува, додека за $k=2$, задачата се сведува на докажување дека равенката $m_1\cdot x_1-m_2\cdot x_2=s_2-s_1$ има решение. Оваа равенка има решение според задачата 1, бидејќи НЗД$(m_1,m_2)=1$.

Нека тврдењето е точно за секој $2\leq k\leq t$, за некој $t\geq 2$, и нека се дадени m_1, $m_2,\dots,m_{t+1}$ и $s_1,s_2,\dots,s_{t+1}$. Од индуктивната претпоставка, следува дека постојат $x_1,x_2,\dots,x_t\in\mathbb{Z}$, такви што:

$$m_1\cdot x_1+s_1=m_2\cdot x_2+s_2=\dots=m_t\cdot x_t+s_t.$$

Бидејќи НЗД$(m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_t,m_{t+1})=1$, следува дека постојат $y,z\in\mathbb{Z}$, такви што:

$$(m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_t)\cdot y-m_{t+1}\cdot z = s_{t+1}-m_1\cdot x_1-s_1 = s_{t+1}-m_i\cdot x_i-s_i$$

за секоj $1\le i\le t$. Понатаму, нека за секоj $1\le i\le t$,

$$x_i' = \frac{m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_t}{m_i}\cdot y+x_i$$

и нека $x_{t+1}=z$. Тогаш за секоj $1\le i\le t$,

$$m_i\cdot x_i'+s_i = (m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_t)\cdot y + m_i\cdot x_i+s_i = m_{t+1}\cdot z+s_{t+1}$$

$$= m_{t+1}\cdot x_{t+1}+s_{t+1}\ .\ \blacksquare$$

Задача 5. *Да се докаже дека квадрат од цел броj е конгруентен со 0 или со 1 по модул 4.*

Решение. Нека x е цел броj. Бидеjќи при делење со 4 се добиваат остатоци 0, 1, 2 или 3, следува дека $x\equiv p(\text{мод } 4)$ за некоj $p=0,1,2$ или 3. Тогаш $x^2\equiv p^2(\text{мод } 4)$. Заклучокот следува од следниве конгруенции: $0^2=0\equiv 0(\text{мод } 4)$, $1^2=1\equiv 1(\text{мод } 4)$, $2^2=4\equiv 0(\text{мод } 4)$ и $3^2=9\equiv 1(\text{мод } 4)$. $\blacksquare$

Задача 6. *Да се докаже дека квадрат од цел броj е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.*

Решение. Нека x е цел броj. Бидеjќи при делење со 8 се добиваат остатоци 0,1,2,3,4,5,6 или 7, следува дека $x\equiv p(\text{мод } 8)$ за некоj $p=0,1,2,3,4,5,6,7$. Тогаш $x^2\equiv p^2(\text{мод } 8)$. Заклучокот следува од следниве конгруенции: $0^2\equiv 0(\text{мод } 8)$, $1^2\equiv 1(\text{мод } 8)$, $2^2\equiv 4(\text{мод } 8)$, $3^2=9\equiv 1(\text{мод } 8)$, $4^2=16\equiv 0(\text{мод } 8)$, $5^2=25\equiv 1(\text{мод } 8)$, $6^2=36\equiv 4(\text{мод } 8)$ и $7^2=49\equiv 1(\text{мод } 8)$. $\blacksquare$

Задача 7. *Равенката*

$$15x^3 - 4x^4y^2 + 4x^3y - 4x^2y + 2x - 1 = 0 \qquad (1)$$

да се реши во множеството цели броеви.

Решение. Равенката (1) jа запишуваме во обликот:

$$x\cdot\left[\ 15x^2 - 4x^3y^2 + 4x^2y - 4x\cdot y + 2\ \right] = 1\ . \qquad (2)$$

Од (2) следува дека x е делител на 1. Затоа, ако дадената равенка има решение во множеството цели броеви, тогаш $x=\pm 1$. Ако во (2) замениме $x=1$, добиваме $y^2=4$, односно $y_{1,2} = \pm 2$. Ако во (2) замениме $x=-1$, добиваме $2y^2 + 4y + 9 = 0$. Последната равенка нема решенија во множеството на целите броеви. Според тоа, равенката има само две решенија во множеството на целите броеви и тоа $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 1$, $y_2 = -2$. ∎

Задача 8. *Да се докаже дека равенката:*

$$x! + y! = 10 \cdot z + 9$$

нема решенија во множеството на целите броеви.

Решение. Бидејќи десната страна на равенката е непарен број, мора на левата страна да е непарен број. Затоа или x или y е помал од 2. Нека е $x=1$, т.е. $y! = 10 \cdot z + 8$. Тогаш десната страна на равенката не се дели со 5, па затоа $y \leq 4$. Но, ниеден од броевите 1,2,3 и 4 не е решение на равенката $y! = 10 \cdot z + 8$. Значи дадената равенка нема решение во множеството на целите броеви. ∎

Задача 9. *Во множеството на целите броеви да се реши равенката:*

$$x! + y! = (x+y)! \,. \tag{1}$$

Решение. Да го разгледаме случајот кога е $x \neq y$. Можеме да претпоставиме дека $x < y$. При оваа претпоставка равенката ја запишуваме во обликот:

$$x! \cdot \left[1+(x+1)(x+2)\ldots(y-1)y \right] = x!(x+1)(x+2)\ldots(x+y-1)(x+y).$$

Но $x \neq 0$, за секој x, па ако равенката ја поделиме со $x!$ добиваме

$$\left[1+(x+1)(x+2)\ldots(y-1)y\right] = (x+1)(x+2)\ldots(x+y-1)(x+y). \tag{2}$$

Забележуваме дека десната страна на (2) се дели со

$(x+1)$, а левата страна не се дели со $(x+1)$. Според тоа (2) нема решение во множеството цели броеви. Тоа значи дека (1) нема решенија (x_0, y_0) во множеството цели броеви за кои $x_0 < y_0$ или $y_0 < x_0$.

Нека, на крајот $x = y$. Во овој случај (1) го добива обликот

$$2\cdot x! = (2x)! ,$$

кој по делење со $x!\neq 0$ се трансформира во

$$2 = (x+1)(x+2)\dots(2x-1)2x \tag{3}$$

Единствено решение на (3) во множеството цели броеви е $x=1$. Според тоа, во множеството на целите броеви равенката (1) има единствено решение: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. ∎

Задача 10. *Да се докаже дека равенката* $2x^2-5y^2=7$ *нема решение во* $\mathbb{Z}$.

Решение. Бидејќи 7 е непарен, а $2x^2$ е парен, следува дека y мора да биде непарен. Нека $y=2k+1$. Тогаш равенката се сведува на $2x^2-20k^2-20k-5=7$, т.е. на $2x^2-20k^2-20k=12$. По делење со 2, се добива $x^2=10k(k+1)+6$, т.е. x мора да е парен. Нека $x=2t$. Тогаш, $4t^2=10k^2-10k+6$, т.е. $2t^2=5k(k+1)+3$, што не е можно, бидејќи $k(k+1)$ е парен број, а 3 не е делив со 2. ∎

Задача 11. *Да се докаже дека равенката* $2x^2-215y^2=1$ *нема решенија во* $\mathbb{Z}$.

Решение. Слично како во задачата 10, следува дека $y=2к+1$. Тогаш, $2x^2=1+215(4к^2+4к+1)=860к\cdot(к+1)+216$, т.е $x^2=430к(к+1)+108$. Бидејќи $430к\cdot(к+1)$ има последна цифра 0, следува дека последната цифра на x^2 треба да е 8, што не е можно, бидејќи последна цифра на квадрат од цел број може да биде 0, 1, 4, 5, 6 и 9. ∎

Задача 12. *Во множеството цели броеви, да се реши равенката:*

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 \cdot b^2 . \qquad (1)$$

Решение. Нека (1) ја запишеме во обликот:

$$c^2 + 1 = (a^2-1)\cdot(b^2-1) . \qquad (2)$$

Ако разгледуваме деливост со 4 лесно се гледа дека a, b и c мора да се парни броеви, т.е. $a = 2a_1$, $b = 2b_1$ и $c = 2c_1$. Но тогаш

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4\cdot a_1^2\cdot b_1^2 . \qquad (3)$$

Но, a_1^2, b_1^2 и c_1^2 при делење со 4 даваат остаток 0 или 1, па затоа (3) е можно само ако a_1, b_1 и c_1 се парни броеви. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека a, b и c мора неограничен број пати да се деливи со 2, што значи дека мора да е a=b=c=0. ∎

Задача 13. *Равенката* $x^3 + 91 = y^3$ *да се реши во множеството на целите броеви.*

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(y - x)\cdot(y^2 + xy + x^2) = 91.$$

Бидејќи $y^2+ xy + x^2 \geq 0$ можни се следниве четири случаи:

(1) Ако $y-x = 1$, тогаш $y^2+ xy + x^2 = 91$. Во овој случај добиваме две решенија $x = 5$, $y = 6$ и $x = -6$, $y = -5$.

(2) Ако $y-x=7$, тогаш $y^2+ xy + x^2 = 13$. Во овој случај имаме исто така две решенија $x = -3$, $y=4$ и $x = -4$, $y=3$.

(3) Ако $y-x = 91$, тогаш $y^2+ xy + x^2 = 1$. Овој систем нема реални решенија.

(4) Ако $y-x = 13$, тогаш $y^2+ xy + x^2 = 7$. Овој систем нема реални решенија.

Значи, дадената равенка има четири решенија:

$(-6,-5)$, $(-3,4)$, $(-4, 3)$ и $(5,6)$. ∎

Задача 14. *Да се реши во $\mathbb{Z}$ равенката*

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0 .$$

Решение. Бидејќи $2y^3$ и $4z^3$ се парни, мора и x да биде парен. Нека $x=2x_1$. Тогаш равенката се трансформира во $8x_1^3-2y^3-4z^3=0$, која по делење со два станува: $4x_1^3-y^3-2z^3=0$. Повторувајќи ја горната постапка за y, а потоа и за z, равенката се трансформира во:

$$x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0 .$$

Последната равенка е иста со дадената равенка, па според тоа горната постапка може да се спроведе и за неа. Ваква постапка може да се спроведува бесконечно многу пати. Но секој цел број различен од нула може да се дели со 2 најмногу конечно многу пати. Според тоа, равенката има единствено решение во $\mathbb{Z}$ и тоа е тројката $(0,0,0)$. ■

Задача 15. *Да се реши во $\mathbb{Z}$ равенката:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x\cdot y\cdot z .$$

Решение. Веднаш се гледа дека едно решение е $(0,0,0)$. Ако еден од броевите x,y,z е еднаков на нула, тогаш и другите два мора да се еднакви на нула.

Затоа, да претпоставиме дека (x,y,z) е решение на равенката и дека трите броеви x,y,z се различни од нула. Тогаш секој од броевите може да се запише во форма $2^k\cdot t$ каде што t е непарен број, т.е. $x=2^p\cdot x_1$, $y=2^q\cdot y_1$ и $z=2^s\cdot z_1$, за x_1,y_1,z_1 непарни броеви. Од симетријата на равенката по x,y,z, следува дека не се губи од општост ако се претпостави дека $p\le q\le s$. Тогаш равенката може да се скрати со $(2^p)^2$, по што се добива равенката:

$$(x_1)^2 + (2^{q-p}\cdot y_1)^2 + (2^{s-p}\cdot z_1)^2 = 2^{q+s-p+1}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1 .$$

Ако $q>p$, тогаш левата страна е непарна, а десната страна е парна, што е спротивност. Значи, мора $q=p$. Но тогаш равенката добива форма

$$(x_1)^2 + (y_1)^2 + (2^{s-p}\cdot z_1)^2 = 2^{s+1}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1 \ .$$

Ако $s=p$, тогаш левата страна е непарна, а десната е парна, што е спротивност. Значи мора $s>p$. Но тогаш, $(x_1)^2+(y_1)^2$ е делив со 2, но не е делив со 4, а бидејќи $(2^{s-p}\cdot z_1)^2$ и $2^{s+1}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1$ се деливи со 4, следува дека десната страна е делива, а левата страна не е делива со 4, што е спротивност.

Значи, дадената равенка има единствено решение во $\mathbb{Z}$ и тоа е тројката $(0,0,0)$. ■

Задача 16. *Да се реши во* $\mathbb{Z}$ *равенката:*

$$3^x - 2^y = 1 \ .$$

Решение. Ако $x\le 0$ и $y\le 0$, тогаш $3^x - 2^y <1$, па мора $x\ge 1$ и $y\ge 1$, т.е. $x,y\in\mathbb{N}$. Од равенството:

$$2^y = 3^x-1 = (3-1)(3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots 3+1)$$

следува дека $x=1$ или x е парен, т.е. $x=2\cdot k$. Во вториот случај,

$$2^y = 9^k-1 = (9-1)\cdot(9^{k-1}+9^{k-2}+\ldots+9+1) \ ,$$

од што следува дека $k=1$ или k е парен, т.е. $k=2m$. Но $k=2m$ не ѐ можно бидејќи во тој случај би имале:

$$2^y = 81^m-1 = (81-1)\cdot(81^{m-1}+81^{m-2}+\ldots+81+1) \ ,$$

т.е. $80|2^y$, а од друга страна $80\nmid 2^y$.

Значи равенката има две решенија во $\mathbb{Z}$, а тоа се:

$$x=1,\ y=1 \quad \text{и} \quad x=2,\ y=3 \ .\blacksquare$$

Задача 17. *Дадени се* n *броеви* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *секој од кои е* $+1$ *или* -1. *Да се покаже дека ако*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0,$$

тогаш n *се дели со* 4.

Решение. Нека помеѓу $x_1, x_2, \dots, x_n$ има p позитивни и q негативни броеви. Тогаш $n=p+q$. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ е еден редослед на дадените броеви и нека за тој редослед,

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 .$$

Нека $x_i=1$ и $x_{i+1}=-1$ и нека $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n$ е нов редослед на дадените броеви, добиен со замена на местата на x_i и x_{i+1}. За овој редослед се добива следниов збир:

$$S' = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{i-2}x_{i-1} - x_{i-1} - 1 + x_{i+2} + \\ + x_{i+2}x_{i+3} + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1,$$

додека

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{i-2}x_{i-1} + x_{i-1} - 1 - x_{i+2} + \\ + x_{i+2}x_{i+3} + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1,$$

од што следува дека $S-S'=2x_{i-1}+2_{i+2}=2(x_{i-1}+x_{i+2})$. Бидејќи секој од x_{i-1}, x_{i+2} е $+1$ или -1, следува дека $S-S'=-4$ или $S-S'=0$ или $S-S'=4$. Значи, $S-S'\equiv 0(\text{мод } 4)$, т.е. со замена на местата на соседни $+1$ и -1, збирот:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

се менува за -4, 0 или 4. После конечно многу вакви замени, ќе се добие редослед $\underbrace{-1,-1,\dots-1}_{p},\underbrace{1,1,\dots,1}_{q}$, за кој соодветниот збир е еднаков на:

$$(q-1) + (-1) + (p-1) + (-1) = p+q-4 = n-4.$$

Од претпоставката во задачата дека:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$$

и од горната дискусија, следува дека $(n-4)\equiv 0(\text{мод } 4)$, т.е. $n\equiv 0(\text{мод } 4)$. Значи, n се дели со 4. ∎

Задача 18. *Системот равенки* $\begin{cases} y+z=10+x \\ y\cdot z=10x+1 \end{cases}$ *, да се реши во множеството цели броеви.*

Решение. Од $y\cdot z=10x+1$ следува дека $y\neq 0$ и $z\neq 0$. Ако втората равенка на системот ја решиме по y добиваме

$$y = \frac{10x+1}{z}.$$

Со замена за y во првата равенка наоѓаме дека

$$\frac{10x+1}{z} + z = 10 + x,$$

односно дека $x\cdot(10-z) = 10z - z^2 - 1$, од што следува дека $10-z \neq 0$. Според тоа

$$x = z - \frac{1}{10-z},$$

од што следува дека $10-z = \pm 1$. Од последното равенство следува дека $z = 9$ или $z = 11$. Ако $z = 9$, тогаш $x = 8$, $y = 9$, додека ако $z = 11$, тогаш $x = 12$, $y = 11$.

Значи, единствени решенија на системот во множеството цели броеви се:

$x_1 = 8$, $y_1 = 9$, $z_1 = 9$ и $x_2 = 12$, $y_2 = 11$, $z_2 = 11$. ∎

3. АЛГЕБРА

3.1. АЛГЕБАРСКИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Задача 1. *Ако* x, y *и* z *се позитивни реални броеви такви што*

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1,$$

докажи дека $x+y+z > \pi/2$.

Решение. Да претпоставиме дека $x+y+z \le \pi/2$. Тогаш,

$$0 < x+y \le (\pi/2)-z<\pi/2,$$

па:

$$0 < \sin(x+y) \le \sin(\pi/2-z) = \cos z,$$

$$(\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x)^2 \le \cos^2 z.$$

Користејќи дека $\cos^2 z = 1-\sin^2 z = \sin^2 x+\sin^2 y$, добиваме:

$$(\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x)^2 \le \sin^2 x + \sin^2 y,$$

$$\sin^2 x\cdot\sin^2 y \ge \sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y.$$

Бидејќи $0 < x,y \le (\pi/2)-z < \pi/2$, следи $\sin x>0$ и $\sin y>0$, па затоа се добива:

$$\sin x\cdot\sin y \ge \cos x\cdot\cos y \quad \text{и} \quad \cos(x+y) \le 0$$

што е контрадикција. Значи, $x+y+z>\pi/2$. ■

Задача 2. *Да се најде бројот на сите петнаесетцифрени броеви во бинарен систем во кои нема последователни единици.*

Решение. Секој таков број мора да почнува со 10, а потоа се надоврзува низа од цифрите 0 и 1 со должина 13 така што да нема последователни единици. Значи треба да се најде $f(13)$, каде $f(n)$ го означува бројот на сите такви низи со должина n.

Очигледно е $f(1)=2$ и $f(2)=3$. Нека $n\ge 2$. Ако последната цифра на таа низа е 0, тогаш претходните $n-1$ цифри можат да бидат произволни така што да нема последователни единици, а ако последната цифра е 1, тогаш пред неа стои 0, а претходните $n-2$ цифри треба да бидат такви што да нема последователни единици. Значи за $n\ge 2$ важи:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Така добиваме по ред: $f(3)=5$, $f(4)=8$, $f(5)=13$, $f(6)=21$, $f(7)=34$, $f(8)=55$, $f(9)=89$, $f(10)=144$, $f(11)=233$, $f(12)=377$ и $f(13)=610$. Значи бараниот број е 610. ■

Задача 3. *Нека* $\varphi_i \in \left[\frac{1}{4}\cdot\pi, \frac{5}{4}\cdot\pi\right]$ *за* $i\in\{1,\dots,n\}$. *Да се докажи неравенството:*

$$\Big(\sum_{1\le i\le n} \sin\varphi_i + \frac{1}{4}\Big)^2 \ge \sum_{1\le i\le n} \cos\varphi_i .$$

Решение. Да означиме $S = \sum_{1\le i\le n} \sin\varphi_i$. Тогаш:

$$(S + \frac{1}{4})^2 = (S - \frac{1}{4})^2 + S \ge S.$$

Бидејќи $\varphi_i \in \left[\frac{1}{4}\cdot\pi, \frac{5}{4}\cdot\pi\right]$ добиваме дека $sin\varphi_i \geq cos\varphi_i$, па

$$S \geq \sum_{1\leq i\leq n} cos\varphi_i,$$

со што доказот е комплетиран. ∎

Задача 4. *Да се најде* $tg(\alpha/2)+tg(\beta/2)$ *ако се знае дека* $sin\alpha+sin\beta = a$, $cos\alpha+cos\beta = b$ *и* $\alpha,\beta\in(0,\pi)\setminus\{\pi/2\}$.

Решение. Забележуваме дека:

$$tg(\alpha/2)+tg(\beta/2) = \{sin((\alpha+\beta)/2)\}/\{cos(\alpha/2)\cdot cos(\beta/2)\}.$$

Потоа:

$$a^2=sin^2\alpha+sin^2\beta+2\cdot sin\alpha\cdot sin\beta \quad и \quad b^2=cos^2\alpha+cos^2\beta+2\cdot cos\alpha\cdot cos\beta,$$

од каде што следи дека:

$$cos(\alpha-\beta) = (a^2+b^2-2)/2 \quad и \quad cos(\alpha-\beta)/2 = \sqrt{a^2+b^2}/2 .$$

Од $b = cos\alpha+cos\beta = 2\cdot cos(\alpha+\beta)/2\cdot cos(\alpha-\beta)/2$ добиваме:

$$cos(\alpha+\beta)/2 = b/\sqrt{a^2+b^2}, \quad односно \quad sin(\alpha+\beta)/2 = a/\sqrt{a^2+b^2} .$$

Користејќи дека:

$$\begin{aligned} cos(\alpha/2)\cdot cos(\beta/2) &= \frac{1}{2}\{cos(\alpha-\beta)/2+cos(\alpha+\beta)/2\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right], \end{aligned}$$

добиваме,

$$tg(\alpha/2) + tg(\beta/2) = \frac{4a}{a^2+b^2+2b} . \blacksquare$$

Задача 5. *Да се најде реален број x за кој изразот:*

$$\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

има најмала вредност.

Решение. Забележуваме дека

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1} = \sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}+ \sqrt{(x-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2} \\ &= d(M,A) + d(M,B) , \end{aligned}$$

каде што $M(x,0)$, $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $B(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ се точки во рамнината, а $d(X,Y)$ е растојанието меѓу точките X и Y. Значи, треба да се најде точка M на x-оската така што $d(M,A)+d(M,B)$ прима најмала вредност. Бидејќи A и B се наоѓаат во различни полурамнини определени со x-оската, бараната точка M се добива како пресек на x-оската со правата AB. На тој начин се добива $M(\sqrt{3}-1,0)$. Затоа дадениот израз прима минимална вредност за $x = \sqrt{3}-1$. ■

Задача 6. *Да се реши равенката*

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8 .$$

Решение. Нека $t_1 = \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x$ и $t_2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$.
Тогаш:

$$\begin{cases} t_1+t_2 = 8 \\ t_1 \cdot t_2 = 1 \end{cases}.$$

Според тоа t_1 и t_2 се решенија на квадратната равенка:

$$t^2 - 8t + 1 = 0,$$

т.е. $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$.

Постојат две можности :

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 4-\sqrt{15}, \quad \text{што значи } x = 2 \quad \text{и}$$

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 4-\sqrt{15}, \quad \text{што значи:}$$

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{-2}, \quad \text{т.е.} \quad x = -2. \ ■$$

Задача 7. *Низата* $\{a_n\}$ *е зададена со релацијата:*

$$a_{n+2}\cdot a_n = a_{n+1}^2 + 8 ,$$

при што $a_1 = 4$ *и* $a_2 = 6$. *Да се покаже дека* $9a_n^2 - 128$ *е квадрат на рационален број.*

Решение. За секој $n \geq 1$, $a_n > 0$. Од релацијата:

$$a_{n+3}\cdot a_{n+1} - a_{n+2}\cdot a_n = a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 .$$

следува дека,

$$a_{n+1}(a_{n+3} + a_{n+1}) = a_{n+2}(a_{n+2} + a_n),$$

од што заедно со $a_3 = \dfrac{(a_2)^2 + 8}{a_1} = 11$, се добива дека:

$$\frac{a_{n+3} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \ldots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \frac{5}{2} .$$

Според тоа,

$$a_{n+2} + a_n = \frac{5}{2}\cdot a_{n+1}, \quad \text{т.е.} \quad a_{n+1} = \frac{2}{5}\cdot(a_{n+2}+a_n).$$

Но тоа значи дека:

$$a_{n+1}^2 = \frac{4}{25}\cdot(a_{n+2}^2 + 2\cdot a_{n+2}\cdot a_n + a_n^2),$$

односно:

$$a_{n+1}^2 = \frac{16}{25}\cdot a_{n+2}\cdot a_n + \frac{4}{25}\cdot(a_{n+2}^2 - 2\cdot a_{n+2}\cdot a_n + a_n^2).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} 9a_{n+1}^2 - 128 &= 25a_{n+1}^2 - 16a_{n+1}^2 - 128 \\ &= 25a_{n+1}^2 - 16(a_{n+1}^2 + 8) = 25a_{n+1}^2 - 16a_{n+2}\cdot a_n \\ &= 4(a_{n+2}^2 - 2a_{n+2}\cdot a_n + a_n^2) = [2(a_{n+2} - a_n)]^2 . \end{aligned}$$

Бидејќи a_{n+2} и a_n се рационални броеви, следува дека навистина, $9a_{n+1}^2 - 128$ е квадрат на рационален број. ∎

Задача 8. *Нека*
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{m}{n}$$
при што m *и* n *се заемно прости, а на левата страна има* 1991 *дробна линија. Да се определи вредноста на* m^2+mn-n^2.

Решение. Низата на Фибоначи гласи: $F_0=1$, $F_1=1$ и $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Со математичка индукција се покажува дека левата страна на даденото равенство е еднаква на $\frac{F_{1990}}{F_{1991}}$.

Според тоа треба да се определи вредноста на изразот:
$$A_{1991}=F_{1990}^2+F_{1990}\cdot F_{1991}-F_{1991}^2.$$
Притоа, од тоа што $F_{1991}=F_{1990}+F_{1989}$, добиваме:
$$\begin{aligned}A_{1991}&=F_{1990}^2+F_{1990}\cdot F_{1991}-F_{1991}^2\\&=F_{1990}^2+F_{1990}\cdot\left(F_{1990}+F_{1989}\right)-\left(F_{1990}+F_{1989}\right)^2\\&=F_{1990}^2-F_{1990}\cdot F_{1989}-F_{1989}^2=-A_{1990}.\end{aligned}$$
Продолжувајќи ја постапката наоѓаме дека:
$$\begin{aligned}A_{1991}&=(-1)^{1991-k}\cdot A_k=(-1)^{1991-1}\cdot A_1\\&=A_1=F_0^2+F_0F_1-F_1^2=1\ .\ \blacksquare\end{aligned}$$

Задача 9. *Да се најде* $\sin^3x+\cos^3x$, *ако* $\sin x+\cos x=a$.

Решение.
$$\begin{aligned}\sin^3x+\cos^3x&=(\sin x+\cos x)\left[\sin^2x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2x\right]\\&=a(1-\sin x\cdot\cos x)=a\left(\frac{3}{2}-\frac{(\sin x+\cos x)^2}{2}\right)\\&=\frac{a}{2}\cdot(3-a^2)\ .\blacksquare\end{aligned}$$

Задача 10. *Ако броевите* $log_a x$, $log_b x$ *и* $log_c x$ ($x \neq 1$), *формираат аритметичка прогресија, да се покаже дека:*

$$c^2=(ac)^{log_a b}.$$

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$log_a x + log_c x = 2log_b x.$$

Ако се искористи релацијата $log_p m = \dfrac{log_n m}{log_n p}$, добиваме:

$$log_b x=\frac{log_a x}{log_a b} \quad \text{и} \quad log_c x = \frac{log_a x}{log_a c}.$$

Со замена во $log_a x + log_c x = 2log_b x$ добиваме:

$$2\frac{log_a x}{log_a b} = log_a x + \frac{log_a x}{log_a c}.$$

Но $x \neq 1$, па затоа $log_a x \neq 0$ и ако поделиме во последното равенство со $log_a x$ добиваме $\dfrac{2}{log_a b} = 1 + \dfrac{1}{log_a c}$, односно $2log_a c = log_a b \cdot (log_a c+1)$. Ако се има предвид дека $log_a a=1$, тогаш последното равенство може да го запишеме во обликот $log_a c^2 = log_a (ac)^{log_a b}$, од што следува:

$$c^2=(ac)^{log_a b}. \blacksquare$$

Задача 11. *Дали постои цел број x, кој има најмногу сто цифри, за кој е дефиниран изразот:*

$$\left(log\left(log\left(log\ x\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}.$$

Решение. Не постои бидејќи x мора да има најмалку 101 цифра. Имено, ако $x<10^{100}$, тогаш $logx < log10^{100} = 100$ и $\left(logx\right)^{1/2} < 10$. Според тоа, $log\left(log\ x\right)^{1/2} < 1$, т.е.

$\left(\log\left(\log x\right)^{1/2}\right)^{1/2} < 1$. Значи: $\log\left(\log\left(\log x\right)^{1/2}\right)^{1/2} < 0$ и

$$\left(\log\left(\log\left(\log x\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} \text{ не постои. } \blacksquare$$

Задача 12. *Нека се* a *и* b *реални броеви. Ако* $a+b\neq 0$, *тогаш:* $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$ *ако и само ако едниот од* a *и* b *по апсолутна вредност е поголем од* 1, *а другиот помал од* 1.

Решение. Нека претпоставиме дека даденото неравенство е исполнето. Тогаш од $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$ со последователни трансформации добиваме $a^2+b^2-a^2b^2-1 > 0$, односно имаме:

$$(a^2-1)(1-b^2) > 0\ . \tag{1}$$

Од неравенството (1) следува дека:

$$|a|>1 \text{ и } |b|<1 \quad \text{или} \quad |a|<1 \text{ и } |b|>1. \tag{2}$$

За да ја покажеме обратната импликација доволно е да претпоставиме дека (2) е исполнето, од што непосредно следува неравенството (1), односно еквивалентното на него неравенство:

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1\ . \ \blacksquare$$

Задача 13. *Нека* $A > 0$ *и* $a < \sqrt{A} \leq a+1$, *каде што* $a\geq 0$. *Да се докаже дека:*

$$\sqrt{A} \leq a + \frac{A-a^2}{2a+1} + \frac{1}{4(2a+1)}\ , \tag{1}$$

и равенството важи само ако $\sqrt{A} = a + \frac{1}{2}$.

Решение. Од $x-x^2-\frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ следува дека:

$$x-x^2\leq \frac{1}{4}\ . \tag{2}$$

Ако во (2) замениме $x=\sqrt{A}-a$, со еквивалентни трансформации добиваме $\sqrt{A}(1+2a) \leq a(1+2a)-a^2+A+\frac{1}{4}$ и по делење со $1+2a$

имаме $\sqrt{A} \le a + \frac{A-a^2}{2a+1} + \frac{1}{4(2a+1)}$, што и требаше да се докаже.

Бидејќи $a < \sqrt{A} \le a+1$, тогаш $0 < \sqrt{A}-a \le 1$ и при тоа равенството во (2) е возможно само при $x = \frac{1}{2}$, т.е. равенството во (1) ќе важи само тогаш кога:

$$\sqrt{A}-a = \frac{1}{2}, \quad \text{односно кога} \quad \sqrt{A} = a + \frac{1}{2}. \ \blacksquare$$

Задача 14. *Да се докаже дека за секој реален број* $x \ne 0$ *важи нееднаквоста:*

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \ne 2|\sin x| \cdot \sin^2\left(\frac{x}{5}\right).$$

Решение. Од $|\sin x| \le 1$ и $\sin^2\left(\frac{x}{5}\right) \le 1$ следува:

$$2|\sin x| \cdot \sin^2\left(\frac{x}{5}\right) \le 2.$$

Од друга страна имаме $x^2 + \frac{1}{x^2} \ge 2$. За да имаме знак на равенство треба да важи:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \\ 2|\sin x| \cdot \sin^2\left(\dfrac{x}{5}\right) = 2 \end{cases}.$$

Но $x=\pm1$ е решение на првата равенка, а не и на втората равенка, па:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \ne 2|\sin x| \cdot \sin^2\left(\frac{x}{5}\right). \ \blacksquare$$

Задача 15. *Низата* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *се формира на следниов начин:* $a_1=1$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$, $k\ge1$. *Да се покаже дека:*

$$63 < a_{1992} < 78.$$

Решение. За $k>1$ важи $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}$, па од $a_k\ge1$ следува:

$$a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3\ , \quad k = 2,3,\dots,n\ . \tag{1}$$

За $k=2,\dots,n$ ги собираме неравенствата (1) и добиваме $2n-1 < a_n^2 < 3n-2$, односно $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$.

Значи, ако $n = 1992$, тогаш $63 < a_{1992} < 78$. ■

Задача 16. *Дадени се позитивни броеви* x *и* y. *Нека* S *е најмалиот помеѓу броевите* x, $y + \frac{1}{x}$ *и* $\frac{1}{y}$. *Да се најде најголемата вредност за* S. *За кои броеви истата се постигнува?*

Решение. Нека $S_{max} = a$. Притоа: $x \ge a$; $\frac{1}{y} \ge a$ и $y + \frac{1}{x} \ge a$.

Според тоа $\frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$ и $y \le \frac{1}{a}$, т.е. $y + \frac{1}{x} \le \frac{2}{a}$. Но тоа значи, $a \le y+\frac{1}{x} \le \frac{2}{a}$, т.е. $a^2 \le 2$. Значи $a \le \sqrt{2}$. Оваа вредност се постигнува за $x=\sqrt{2}$ и $y = 1/\sqrt{2}$ при што трите броеви се еднакви. ■

Задача 17. *Сумата на позитивните броеви* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *е* 1. *Нека* S *е најголемиот број помеѓу броевите:*

$$\frac{x_1}{1+x_1},\ \frac{x_2}{1+x_1+x_2},\ \dots\ ,\frac{x_n}{1+x_1+\dots+x_n}\ .$$

Да се определи најмалата можна вредност за S. *При кои вредности на* x_i, $i=1,2,\dots,n$ *истата се постигнува?*

Решение. Нека $y_0 = 1$, $y_1 = 1+x_1, \dots,$ $y_k = 1+x_1+\dots+x_k$, $(1 \le k \le n)$. Тогаш $y_n=2$ и $x_k=y_k-y_{k-1}$ и ако сите дадени броеви не го надминуваат бројот S имаме:

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{y_k-y_{k-1}}{y_k} = 1 - \frac{y_{k-1}}{y_k} \le S, \quad \text{односно} \quad 1-S \le \frac{y_{k-1}}{y_k}\ .$$

Ако ги помножиме овие неравенства, добиваме:

$$(1-S)^n \le \frac{y_0}{y_n} = \frac{1}{2}\ .$$

Според тоа $S \geq 1-2^{-1/n}$. Оваа вредност се постигнува кога за секој k, важи $2^{-1/n} = 1-S = \dfrac{y_{k-1}}{y_k}$, т.е. кога y_k формираат геометриска прогресија:

$$y_1=2^{1/n}, \quad y_2=2^{2/n}, \dots, \ y_n=2 .$$

Но тоа значи:

$$x_k = 2^{k/n} - 2^{(k-1)/n}, \quad k=1,2,\dots,n. \ \blacksquare$$

Задача 18. *Нека* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *и нека* f *е функција зададена со:*

$$f(x) = 1+ a\cdot cosx + b\cdot sinx + c\cdot cos2x + d\cdot sin2x .$$

Да се докаже дека: ако за секој $x\in\mathbb{R}$ *важи* $f(x)>0$, *тогаш за секој* $x\in\mathbb{R}$ *важи и* $f(x)<3$.

Решение. Користејќи дека:

$$cosx + cos(x+2\pi/3) + cos(x-2\pi/3) = 0,$$
$$cos2x + cos2(x+2\pi/3) + cos2(x-2\pi/3) = 0,$$
$$sinx + sin(x+2\pi/3) + sin(x-2\pi/3) = 0,$$
$$sin2x + sin2(x+2\pi/3) + sin2(x-2\pi/3) = 0,$$

добиваме

$$f(x) + f(x+2\pi/3) + f(x-2\pi/3) = 3$$

за секое $x\in\mathbb{R}$. Но бидејќи $f(y)>0$ за секој $y\in\mathbb{R}$, следува дека $f(x)<3$ за секој $x\in\mathbb{R}$. $\blacksquare$

Задача 19. *Да се најдат сите функции* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *такви што за секое* $t\in\mathbb{R}$ *да важи:*

$$f(-t) = -f(t), \quad f(t+1) = f(t)+1 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\cdot f(t) \quad \text{за } t\neq 0.$$

Решение. Од $f(-0)=f(0)$ се добива дека $f(0)=0$, а од вториот услов потоа се добива $f(1)=1$, $f(2)=2, \dots$. Да ја разгледаме сега функцијата $g(t)=f(t)-t$. За неа се добива:

$$g(t+1) = f(t+1) - (t+1) = f(t) - t = g(t),$$

$$g(-t) = f(-t) + t = -f(t) + t = -g(t) \quad \text{и}$$

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\cdot f(t) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\cdot(g(t)+t) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}\cdot g(t).$$

Притоа се добива:

$$g(t) = g(t+1) = (t+1)^2 g\left(\frac{1}{t+1}\right) = -(t+1)^2 g\left(-\frac{1}{t+1}\right)$$

$$= (t+1)^2 g\left(\frac{t}{t+1}\right) = -(t+1)^2 \frac{t^2}{(t+1)^2} g\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$= -t^2 g\left(1+\frac{1}{t}\right) = -t^2 g\left(\frac{1}{t}\right),$$

од каде што следи дека $g(t)=0$. Од дефиницијата на функцијата g следува дека $f(t)=t$. ∎

Задача 20. *Нека* α *и* β *се реални броеви такви што* $0\leq\alpha,\beta<\pi$. *Да се определат функциите* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *за кои важи:*

$$f(x\cdot\cos\alpha) + f(x\cdot\cos(\pi+\alpha)) = \cos(x+\alpha) \quad \textit{и}$$

$$f(x\cdot\sin\beta) - f(x\cdot\sin(\pi+\beta)) = \cos(x+\beta)$$

за сèкој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ставајќи $x=0$ во второто равенство добиваме $\cos\beta=0$, т.е. $\beta=\pi/2$. Од второто равенство имаме:

$$f(x) - f(-x) = -\sin x. \tag{1}$$

Заменувајќи $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ во првото равенство, добиваме:

$$f(x\cdot\cos\alpha) + f(-x\cdot\cos\alpha) = \cos(x+\alpha). \tag{2}$$

Забележуваме дека $\alpha\neq\pi/2$, бидејќи ако е $\alpha=\pi/2$ од последното равенство добиваме $2f(0)=-\sin x$ за секој x, што не е можно. Ако во (2), x се замени со $\frac{x}{\cos\alpha}$, се добива:

$$f(x) + f(-x) = \cos\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \alpha\right). \tag{3}$$

Од (1) и (3) следува:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \alpha\right) - \sin x\right] \quad \text{и}$$

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \alpha\right) + \sin x\right].$$

Овие две равенства важат за секој x, па ставајќи $x=-\alpha\cdot cos\alpha$ во првото и $x=\alpha\cdot cos\alpha$ во второто, добиваме:

$$\frac{1}{2}(cos(-\alpha+\alpha)+sin(\alpha\cdot cos\alpha)) = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\alpha)+sin(\alpha\cdot cos\alpha))$$

и од овде $cos0=cos2\alpha$, па $\alpha=0$. Затоа,

$$f(x) = \frac{1}{2}(cosx - sinx). \blacksquare$$

Задача 21. *Докажи дека ако* $n\in\mathbb{N}$, *тогаш низите:*

$$f(n) = \left[log_2 n\right]+n \qquad и \qquad g(n) = 2^n+n-1$$

формираат разбивање на множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Најпрво да докажеме дека $f(k)\neq g(n)$ за произволни броеви k и n. Равенството $f(k)=g(n)$ се сведува до

$$\left[log_2 k\right] + k = 2^n + n -1.$$

Ако $k<2^n$, тогаш:

$$\left[log_2 k\right]+k \leq \left[log_2 (2^n-1)\right]+2^n-1 = n-1+2^n-1 < 2^n+n-1,$$

и ако $k\geq 2^n$, тогаш:

$$\left[log_2 k\right]+k \geq \left[log_2 2^n\right]+2^n \geq n+2^n > 2^n+n-1.$$

Значи, равенството $f(k)=g(n)$ не е можно.

Да претпоставиме сега дека:

$$g(k) = 2^k+k-1 < n < 2^{k+1}+k = g(k+1) .$$

Тогаш $n=2^k+k-1+m$, каде $1\leq m\leq 2^k$ и

$$n = \left[log_2 (2^k+m-1)\right]+2^k+m-1 = f(2^k+m-1).$$

Освен тоа јасно е дека $1=f(1)$, $2=g(1)$, па низите $f(n)$ и $g(n)$ формираат разбивање на множеството $\mathbb{N}$. $\blacksquare$

3.2. НЕРАВЕНСТВА

Нека се дадени n *позитивни реални броеви* $a_1,\dots,a_n$. *Броевите:*

$$\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le i\le n} a_i^2\right]^{1/2},\quad \frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le i\le n} a_i,\quad \left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n}\quad \text{и}\quad \frac{n}{\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^{-1}}$$

се нарекуваат соодветно **квадратна, аритметичка, геометриска** *и* **хармониска средина** *на броевите* $a_1,a_2,\dots,a_n$. *Следните три задачи покажуваат каква врска постои меѓу овие средини.*

Задача 1. *Нека* $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^+$. *Докажи дека:*

$$\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le i\le n} a_i^2\right]^{1/2} \ge \frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le i\le n} a_i\ ,$$

и освен тоа равенството важи ако и само ако $a_1=a_2=\dots=a_n$.

Решение. Ако $a_1=a_2=\dots=a_n$ тогаш јасно е дека равенството важи. Да претпоставиме потоа дека броевите $a_1,\dots,a_n$ се менуваат, но притоа збирот $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i$ да биде константен. Да го побараме минимумот што притоа може да го постигне квадратната средина, т.е. $\left[\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2\right]^{1/2}$. Ќе докажеме дека овој израз, односно $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2$ ќе го достигне својот минимум во случај кога $a_1=\dots=a_n$ и со тоа задачата ќе биде решена.

Навистина, нека за броевите $b_1,\dots,b_n$ изразот $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2$

го достигнува својот минимум, но притоа $b_i \neq b_j$ за некои индекси $i \neq j$. Без губење на општоста (БГО), нека $b_1 \neq b_2$. Да ги разгледаме сега броевите $b'_1, \ldots, b'_n$ дефинирани на следниов начин:

$$b'_1 = b'_2 = (b_1+b_2)/2 \quad \text{и} \quad b'_k = b_k \quad \text{за} \quad k \neq 1,2.$$

Тогаш $\sum\limits_{1\le r\le n} b'_r = \sum\limits_{1\le r\le n} b_r$, но $\sum\limits_{1\le r\le n} (b'_r)^2 < \sum\limits_{1\le r\le n} (b_r)^2$, бидејќи

$$(b'_1)^2 + (b'_2)^2 < b_1^2 + b_2^2 \iff 2((b_1+b_2)/2)^2 < b_1^2 + b_2^2$$
$$\iff 0 < (b_1-b_2)^2.$$

Со тоа добиваме контрадикција бидејќи изразот $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2$ не го постигнува својот минимум за броевите $b_1, \ldots, b_n$. Значи, $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^2$ го достигнува својот минимум за $a_1 = \ldots = a_n$. □

Второ решение. За произволен пар индекси (i,j) такви што $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ и $i<j$ важи:

$$2a_ia_j \le a_i^2 + a_j^2 \iff 0 \le (a_i-a_j)^2.$$

Ако сите овие $n(n-1)/2$ неравенства ги собереме се добива:

$$2\cdot \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j \le (n-1)\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i^2$$

$$\iff \sum_{1\le i\le n} a_i^2 + 2\cdot \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j = \left(\sum_{1\le i\le n} a_i\right)^2 \le n\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i^2$$

$$\iff \frac{1}{n}\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i \le \left(\frac{1}{n}\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i^2\right)^{1/2},$$

со што неравенството е докажано. Притоа равенството важи ако и само ако за секој пар индекси (i,j) важи $2a_ia_j = a_i^2 + a_j^2$, т.е. $a_i = a_j$, а ова важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ∎

Задача 2. *Нека* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. ***Докажи дека:***

$$\frac{1}{n}\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i \ge \left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n},$$

и освен тоа равенството важи ако и само ако $a_1=a_2= \dots =a_n$.

Решение. Ако $a_1=\dots=a_n$, тогаш јасно е дека равенството важи. Да претпоставиме дека броевите $a_1,\dots,a_n$ се менуваат, и притоа збирот $\sum_{1\le i\le n} a_i$ останува константен. Да го побараме максимумот што притоа може да го постигне геометриската средина, т.е. $\left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n}$. Ќе докажеме дека овој израз, односно изразот $\prod_{1\le i\le n} a_i$ го достигнува својот максимум во случај кога $a_1=a_2=\dots=a_n$ и со тоа задачата ќе биде решена.

Навистина нека $\prod_{1\le i\le n} a_i$ го достигнува својот максимум за броевите $b_1,\dots,b_n$, при што $b_i\ne b_j$ за некои индекси $i\ne j$. БГО нека $b_1\ne b_2$. Да ги разгледаме броевите $b'_1,\dots,b'_n$ дефинирани со:

$$b'_1 = b'_2 = (b_1+b_2)/2 \quad \text{и} \quad b'_k = b_k \quad \text{за} \quad k\ne 1,2.$$

Тогаш $\sum_{1\le r\le n} b'_r = \sum_{1\le r\le n} b_r$, но $\prod_{1\le r\le n} b'_r > \prod_{1\le r\le n} b_r$, бидејќи

$$b'_1b'_2 > b_1b_2 \iff ((b_1+b_2)/2)^2 > b_1b_2 \iff (b_1-b_2)^2 > 0.$$

Тоа води до противречност, па значи $\prod_{1\le i\le n} a_i$ го достигнува својот максимум за $a_1=a_2= \dots =a_n$. □

Даденото неравенство се докажува и со помош на регресивна индукција. Пред да го изнесеме второто решение, ќе го разгледаме Методот на регресивна индукција преку следнава задача.

Задача *. (Метод на регресивна индукција). *Ако за едно тврдење на природни броеви важат условите:*

(i) *Постои бесконечно подмножество* $M \subseteq \mathbb{N}$, *така што тврдењето е точно за секој* $m\in M$ *и*

(ii) *Ако тврдењето е точно за* $k>1$, *тогаш тоа е точно и* *за* $k-1$*;*

тогаш тврдењето е точно за секој природен број n.

Решение на задачата *. Нека условите (i) и (ii) важат и нека $n\in\mathbb{N}$. Тогаш постои број $k\in M$, $k\geq n$, за кој тврдењето е точно; во спротивно би добиле дека M има најмногу $n-1$ елементи, па не би било бесконечно множество. Ако $n\in M$, нема што да се докажува. Ако $n\notin M$, тогаш според (ii), тврдењето е точно за $k-1$, потоа за $k-2$, итн. Применувајќи го условот $(k-n)$-пати, добиваме дека тврдењето е точно и за бројот n. □

Второ решение на задача 2. За $n=1$ неравеството е тривијално, а за $n=2$ се добива добро познатото неравенство $(a_1+a_2)/2 \geq \sqrt{ab}$. Ако во ова неравенство a_1 го замениме со $(a_1+a_2)/2$, а a_2 со $(a_3+a_4)/2$, добиваме:

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}} ,$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}} \quad \text{и}$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} .$$

Значи, покажавме дека неравенството важи и за $n=4$. Ако се продолжи оваа постапка се добива дека даденото неравенство важи и за $n=8$, $n=16,\ldots$, односно за секој број од обликот 2^k. Следствено за секој елемент од множеството $M=\{2^k\mid k\in\mathbb{N}\}$, неравенството е точно.

Нека, сега, тврдењето е точно за природниот број $n>1$. Ако ставиме $a_n=(a_1+\ldots+a_{n-1})/(n-1)$, добиваме:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}} ,$$

$$\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}$$

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1},$$

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1a_2\ldots a_{n-1},$$

$$\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}.$$

Значи, тврдењето важи и за $n-1$, а со тоа доказот е завршен . □

Трето решение. СИГМА 10, страница 12. ■

Задача 3. *Нека* $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^+$. *Докажи дека:*

$$\left(\prod_{1\leq i\leq n} a_i\right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i^{-1}},$$

и освен тоа равенството важи ако и само ако $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Решение. Да ги разгледаме броевите $a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1}$ и за нив да го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Добиваме:

$$\left(\prod_{1\leq i\leq n}\frac{1}{a_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\cdot\sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{a_i},$$

$$1/\left(\prod_{1\leq i\leq n} a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\cdot\sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{a_i} \quad \text{и}$$

$$\frac{n}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i^{-1}} \leq \left(\prod_{1\leq i\leq n} a_i\right)^{1/n}$$

и освен тоа равенството важи ако и само ако $1/a_1=\ldots=1/a_n$, т.е. $a_1= \ldots =a_n$. ■

Забелешка. *Нека* $a_1,\dots,a_n>0$ *и* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **Средина на броевите** $a_1,\dots,a_n$ **од ред** α *се дефинира со:*

$$f(\alpha;a_1,\dots,a_n) = \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{1\le i\le n} a_i^{\alpha}\right]^{1/\alpha} .$$

Специјално за $\alpha=2$ *се добива квадратна средина, за* $\alpha=1$ *се добива аритметичка средина и за* $\alpha=-1$ *се добива хармониска средина. Може да се покаже со помош на математичка анализа дека функцијата* $f(\alpha;a_1,\dots,a_n)$ *е непрекината функција по* α *и дека:*

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha;a_1,\dots,a_n) = \left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n}.$$

Затоа може да се додефинира:

$$f(0;a_1,\dots,a_n) = \left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n} ,$$

т.е. тоа е геометриската средина. Општиот став за средини тврди дека функцијата $f(\alpha;a_1,\dots,a_n)$ *по однос на* α *е растечка, т.е.* $\alpha\ge\beta$ *имплицира:*

$$f(\alpha;a_1,\dots,a_n) \ge f(\beta;a_1,\dots,a_n),$$

и освен тоа равенството важи ако и само ако $a_1=\dots=a_n$. *Ова се покажува со помош на математичка анализа и со помош на тежишното неравенство. Задачите 1, 2 и 3 се само специјални случаи од ова општо тврдење.*

Задача 4. *Нека* $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ *за* $1\le i\le n$. *Да се докаже неравенството:*

$$\sum_{1\le i\le n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{1\le i\le n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{1\le i\le n} b_i^2}$$

(неравенство на Коши-Шварц-Буњаковски). *Освен тоа да се докаже дека равенство важи ако и само ако*

$$b_1/a_1=b_2/a_2=\dots=b_n/a_n.$$

Решение. Да го разгледаме квадратниот трином:

$$\sum_{1\le i\le n}(a_ix-b_i)^2 = x^2\cdot\sum_{1\le i\le n}a_i^2 - 2x\cdot\sum_{1\le i\le n}a_ib_i + \sum_{1\le i\le n}b_i^2.$$

Тој е ненегативен за секој $x\in\mathbb{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е.

$$4\cdot\left(\sum_{1\le i\le n}a_ib_i\right)\le 4\cdot\left(\sum_{1\le i\le n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{1\le i\le n}b_i^2\right),$$

$$\Leftrightarrow\quad \left|\sum_{1\le i\le n}a_ib_i\right|\le\sqrt{\sum_{1\le i\le n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{1\le i\le n}b_i^2}$$

од што следува даденото неравенство. Освен тоа забележуваме дека равенството важи ако и само ако дискриминатата е 0, а ова важи ако и само ако $x=b_i/a_i$ за секое $i\in\{1,\dots,n\}$, односно ако и само ако $b_1/a_1=b_2/a_2=\dots=b_n/a_n$. ■

Задача 5. **(Бернулиево неравенство).** *Докажи дека:*

$$(1+h)^r\ge 1+rh$$

ако $1+h>0$ *и* $r\in\mathbb{Q}$.

Решение. Нека $r=p/q$, $p>q$ и $(p,q)=1$, и нека

$$\begin{aligned}&a_1=a_2=\dots=a_q=1+rh\ ,\quad a\\ &a_{q+1}=a_{q+2}=\dots=a_p=1.\end{aligned}\tag{1}$$

Тогаш од неравенството:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_q+a_{q+1}+a_{q+2}+\dots+a_p}{p}\ge\sqrt[p]{a_1a_2\dots a_qa_{q+1}\dots a_p}\tag{*}$$

чија десна страна со оглед на (1) е:

$$\sqrt[p]{a_1a_2\dots a_qa_{q+1}\dots a_p}=\sqrt[p]{(1+rh)^q}=(1+rh)^{q/p}\tag{2}$$

и чија лева страна исто така со оглед на (1) е:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\dots+a_q+a_{q+1}+a_{q+2}+\dots+a_p}{p}&=\frac{q(1+rh)+(p-q)}{p}\\&=\frac{q+qrh+p-q}{p}=\frac{ph+p}{p}=1+h,\end{aligned}\tag{3}$$

следува дека ако (2) и (3) ги замениме во (*), добиваме:

$$(1+h) \geq (1+rh)^{1/r}\ , \quad \text{т.е.} \quad (1+h)^r \geq (1+rh)\ . \ \blacksquare$$

Задача 6. *Нека* f *е конвексна функција на интервалот* (a,b), *т.е. за секои* $x,y\in(a,b)$ *и* $\lambda\in(0,1)$ *нека важи неравенството:*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Докажи дека за секој природен број n *важи*

$$f(\lambda_1x_1+ \dots +\lambda_nx_n) \leq \lambda_1f(x_1)+ \dots +\lambda_nf(x_n)\ ,$$

каде $x_1,\dots,x_n \in (a,b)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ *и* $\sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i=1$

(неравенство на Јенсен).

Решение. Неравенството ќе го докажиме со индукција по n. За $n=1$ неравенството се сведува на $f(x_1)\leq f(x_1)$, па тоа е задоволено. За $n=2$ неравенството:

$$f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2) \leq \lambda_1f(x_1) + (1-\lambda_1)f(x_2)$$

е задоволено бидејќи функцијата f е конвексна на (a,b). Да претпоставиме дека даденото неравенство важи за бројот n. Нека сега $x_1,\dots,x_{n+1}\in(a,b)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\geq 0$ и $\sum\limits_{1\leq i\leq n+1} \lambda_i=1$. Ако $\lambda_{n+1}=0$, тогаш тврдењето е задоволено и за $n+1$. Затоа нека $\lambda_{n+1}\neq 0$. Тогаш $\lambda_n+\lambda_{n+1}>0$, па ставаме:

$$x^* = \frac{\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\ .$$

Тогаш $x^*\in(a,b)$ и освен тоа користејќи ја индуктивната претпоставка добиваме:

$$f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_{n+1}x_{n+1}) = f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_{n-1}x_{n-1}+(\lambda_n+\lambda_{n+1})x^*) \leq$$

$$\leq \lambda_1\cdot f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1}\cdot f(x_{n-1}) + (\lambda_n+\lambda_{n+1})\cdot f(x^*) \leq$$

$$\le \lambda_1 f(x_1)+\ldots+\lambda_{n-1}f(x_{n-1}) +$$

$$+ (\lambda_n+\lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\cdot f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}\cdot f(x_{n+1})\right]$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Значи, неравенството важи и за бројот $n+1$. □

Забелешка. Користејќи го Јенсеновото неравенство, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина се јавува како последица. Навистина нека се дадени броевите $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$. Нека $x_i=\ln a_i$ за $1\le i\le n$. Функцијата $f(x)=e^x$ е конвексна на целата реална права па е конвексна и на секој интервал (a,b). Затоа од Јенсеновото неравенство добиваме:

$$e^{(x_1+\ldots+x_n)/n} \le \frac{1}{n}\cdot(e^{x_1}+\ \ldots\ +e^{x_n}) \ , \quad \text{т.е.}$$

$$\left(\prod_{1\le i\le n} a_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\cdot \sum_{1\le i\le n} a_i .$$

Освен тоа ако f е **конкавна функција** на интервалот (a,b), т.е. ако за секои $x,y\in(a,b)$ и $\lambda\in(0,1)$ важи неравенството:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

тогаш аналогно може да се покаже дека за секој природен број n важи

$$f(\lambda_1x_1+\ \ldots\ +\lambda_nx_n) \ge \lambda_1f(x_1)+\ \ldots\ +\lambda_nf(x_n) \ ,$$

каде што $x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\ge0$ и $\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_i=1$. □

Задача 7. *Нека* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\ge0$, $\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_i=1$ *и* $a_1,\ldots,a_n>0$. *Да се докаже дека:*

$$a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n \ge a_1^{\lambda_1}\, a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

(тежишно неравенство).

Решение. Функцијата $y=\ln x$ е конкавна на интервалот $(0,\infty)$, па затоа за произволни $a_1,\ldots,a_n>0$ и $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\geq 0$ такви што $\sum\limits_{1\leq i\leq n}\lambda_i=1$, важи:

$$\ln(\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n)\geq \lambda_1\ln a_1+\ldots+\lambda_n\ln a_n,$$

а од овде добиваме,

$$a_1\lambda_1+\ldots+a_n\lambda_n\geq (a_1)^{\lambda_1}\cdot(a_2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot(a_n)^{\lambda_n}. \ ■$$

Забелешка. Ако во тежишното неравенство се замени $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ се добива неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Интересно е да се забележи дека ако $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{Q}$ тогаш може да се стави:

$$\lambda_1=p_1/m,\ \lambda_2=p_2/m,\ \ldots,\ \lambda_n=p_n/m.$$

каде $p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{N}_0$ и $m=\sum\limits_{1\leq i\leq n}p_i$. Ако се искористи неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на бровите:

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{p_1},\ \underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{p_2},\ \underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{p_n},$$

лесно се добива тежишното неравенство. □

Задача 8. *Ако $a,b,c>0$, да се докаже неравенството:*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geq a^{a/(a+b+c)}\cdot b^{b/(a+b+c)}\cdot c^{c/(a+b+c)}.$$

Решение. Даденото неравенство се добива од тежишното неравенство ставајќи $n=3$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $\lambda_1=a/(a+b+c)$, $\lambda_2=b/(a+b+c)$ и $\lambda_3=c/(a+b+c)$. ■

Задача 9. *За секој природен број n докажи дека важи:*

$$n!\leq\left(\frac{1+n}{2}\right)^n.$$

Решение. Ако во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина се стави $a_1=1,\ a_2=2,\dots,a_n=n$, се добива:

$$\frac{1+2+\ \dots\ +n}{n} \ge (n!)^{1/n}, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n!. \ \blacksquare$$

Задача 10. *Нека* $a_1,\dots,a_n>0$, *и* $S_n = \sum\limits_{1\le i\le n} a_i$. *Да се докажат неравенствата:*

а) $S_n\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \dots\ +\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$ *и*

б) $\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\ \dots\ +\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \ge n\left(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}\right)^2.$

Решение. а) Користјќи дека аритметичката средина е поголема или еднаква на хармониската средина, се добива:

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}, \qquad \text{т.е.}$$

$$S_n\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \dots\ +\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2.$$

б) Користејќи дека квадратната средина е поголема или еднаква на аритметичката средина на броевите $a_1,\dots,a_n$, а потоа користејќи го неравенството во а), се добива:

$$\left\{\frac{1}{n}\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\dots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \ge \frac{1}{n}\left(S_n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\ge \frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{1\le i\le n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2 \ge n\left(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}\right)^2. \ \blacksquare$$

Задача 11. *Нека* $a_1,\dots,a_n$ *се позитивни реални броеви такви што* $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$. *Докажи дека:*

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \geq 2^n.$$

Решение. Да претпоставиме дека броевите $a_1,\dots,a_n$ се менуваат, но притоа $a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=1$. Ќе покажеме дека минимумот на $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ \dots\cdot(1+a_n)$ се постигнува за $a_1=a_2=\dots=a_n(=1)$, во којшто случај очигледно важи равенството. Да претпоставиме дека изразот $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\dots\cdot(1+a_n)$ го достигнува својот минимум за $a_1=b_1,\dots,a_n=b_n$, при што $b_i\neq b_j$ за некои индекси $i\neq j$. Без губење на општост, можеме да претпоставиме дека $i=1$ и $j=2$. Сега дефинираме:

$$b'_1 = b'_2 = \sqrt{b_1b_2}\,, \qquad \text{и} \qquad b'_k = b_k \quad \text{за} \quad k\neq 1,2.$$

Јасно е дека $b'_1\cdot b'_2\cdot\ \dots\ \cdot b'_n=b_1\cdot b_2\cdot\ \dots\ \cdot b_n=1$ и освен тоа

$$(1+b'_1)\cdot\ \dots\ \cdot(1+b'_n) < (1+b_1)\cdot\ \dots\ \cdot(1+b_n)\ ,$$

бидејќи

$$(1+b'_1)\cdot(1+b'_2) < (1+b_1)\cdot(1+b_2) \Leftrightarrow \left[\ \sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\ \right]^2 > 0.$$

Со тоа добивме противречност.

Значи, $(1+a_1)\cdot\ \dots\ \cdot(1+a_n)$ навистина го постигнува својот минимум за $a_1=a_2=\dots=a_n(=1)$ и тој минимум е 2^n. □

Второ решение. Забележуваме дека $(1+a_i)/2\geq\sqrt{1\cdot a_i}$, т.е.

$$1+a_i \geq 2\sqrt{a_i} \geq 0.$$

Множејќи ги сите овие неравенства за $i=1,\dots,n$ добиваме:

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ \dots\ \cdot(1+a_n) \geq 2^n\cdot\sqrt{a_1a_2\ \dots\ a_n} = 2^n.\ \square$$

Трето решение. Нека $S_i = \sum(a_{j_1}\cdot a_{j_2}\cdot\dots\cdot a_{j_i})$ за $1\leq i\leq n$, при што сумирањето се врши по сите можни растечки низи $j_1,j_2,\dots,j_i$ од броевите $1,2,\dots,n$. Користејќи го фактот дека $a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина се добива дека:

$$S_i \geq \binom{n}{i},$$

бидејќи S_i има $\binom{n}{i}$ собирци. Користејќи го тоа, заклучокот од задачата следува од следниве факти:

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) = 1+S_1+S_2+\ldots+S_n \quad \text{и}$$

$$1+S_1+S_2+\ldots+S_n \geq \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \ . \ \blacksquare$$

Задача 12. *Нека* $m_1,m_2,\ldots,m_k\in\mathbb{N}$ *и нека* $m = \dfrac{m_1+\ldots+m_k}{k}\in\mathbb{N}$. *Докажи дека:*

$$(m!)^k \leq m_1!\cdot m_2!\cdot \ \ldots \ \cdot m_k!.$$

Решение. Да претпоставиме дека броеви $m_1,\ldots,m_k$ се менуваат, но притоа $m_1+m_2+\ldots+m_k=mk=const$. Ќе докажеме дека минимумот на $m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!$ се добива за $m_1=m_2=\ldots=m_k(=m)$, во којшто случај очигледно дека важи равенството. Навистина да претпоставиме дека изразот $m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!$ го постигнува својот минимум за $m_1=n_1,\ldots,m_k=n_k$ при што $n_p\neq n_q$ за некои индекси $p\neq q$. Нека:

$$n_i=\max\{n_1,\ldots,n_k\} \quad \text{и} \quad n_j=\min\{n_1,\ldots,n_k\}.$$

Тогаш $n_i-n_j\geq 2$, бидејќи ако $n_i-n_j=1$, збирот $n_1+\ldots+n_k$ не се дели со k. Ги разгледуваме сега броевите:

$$n_i' = n_i-1, \quad n_j' = n_j+1 \quad \text{и} \quad n_r' = n_r \quad \text{за} \quad r\neq i,j.$$

Тогаш:

$$n_1'!\cdot \ \ldots \ \cdot n_k'! < n_1!\cdot \ \ldots \ \cdot n_k! \ ,$$

бидејќи

$$n_i'!\cdot n_j'! < n_i!\cdot n_j! \ ,$$

а ова пак е еквивалентно со $n_i>n_j+1$, и е задоволено бидејќи $n_i-n_j\geq 2$. Со тоа добиваме противречност. Значи, изразот $m_1!\cdot\ldots\cdot m_k!$ го постигнува својот минимум за $m_1=m_2=\ldots=m_k=m$ и со тоа задачата е решена . ■

Задача 13. *Да се докажи дека за секој природен број* n *важи* $n! \geq n^{n/2}$.

Решение. Со помош на математичка индукција по n ќе докажеме дека $(n!)^2 \geq n^n$. За $n=1$ и $n=2$ тврдењето важи. Нека за бројот $n \geq 2$ важи $(n!)^2 \geq n^n$. Користејќи дека $n+1 \geq 3$ и $(1+\frac{1}{n})^n < 3$ добиваме:

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1) = (1+\frac{1}{n})^n \, n^n(n+1) \leq 3(n!)^2(n+1)$$
$$\leq (n+1)(n!)^2(n+1) = ((n+1)!)^2.$$

Значи, неравенството важи и за бројот $n+1$. ∎

Задача 14. *Да се докаже дека за секој природен број* n *важи* $n! > (\frac{n}{e})^n$.

Решение. Даденото неравенство ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ неравенството важи. Нека тоа важи за бројот n. Тогаш:

$$(\frac{n+1}{e})^{n+1} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{e^{n+1}} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{n^n(n+1)}{e^{n+1}} < e \cdot \frac{n^n(n+1)}{e^{n+1}}$$
$$= (\frac{n}{e})^n \, (n+1) < n!(n+1) = (n+1)!,$$

па неравенството важи и за $n+1$. ∎

Забелешка. *Позната е следнава апроксимација на* $n!$ *со помош на степенска функција:*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n.$$

Поточно, односот на левата и десната страна тежи кон 1 *кога* n *тежи кон бескрајност. Тоа е познатата* **Стирлингова формула.** ∎

Задача 15. *Нека* a_i *и* b_i, $1 \leq i \leq n$, *се позитивни реални броеви. Да се докаже неравенството:*

$$\sqrt{\left(\sum_{1\le i\le n} a_i\right)^2} + \sqrt{\left(\sum_{1\le i\le n} b_i\right)^2} \le \sum_{1\le i\le n} \sqrt{a_i^2+b_i^2} \ .$$

Кога важи равенството?

Решение. Во координатен систем да ги нанесиме точките $C_1(a_1,b_1)$, $C_2(a_1+a_2,b_1+b_2)$, ... , $C_n(a_1+\ldots+a_n,b_1+\ldots+b_n)$.

Тогаш неравенството може де се запише геометриски како:

$$\overline{OC_n} \le \overline{OC_1} + \overline{C_1C_2} + \ldots + \overline{C_{n-1}C_n} \ ,$$

каде што O е координатниот почеток, а очигледно е дека тоа е задоволено. Притоа равенството важи ако и само ако точките $C_1,\ldots,C_{n-1}$ лежат на отсечката OC_n, а тоа е задоволено ако и само ако:

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n \ . \ \blacksquare$$

Забелешка. *Претходното неравенство е специјален случај од неравенството на* **Минковски** *кое гласи:*

$$\sqrt{\left(\sum_{1\le i\le n} a_i\right)^2} + \sqrt{\left(\sum_{1\le i\le n} b_i\right)^2} + \ldots + \sqrt{\left(\sum_{1\le i\le n} r_i\right)^2} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\le n} \sqrt{a_i^2+b_i^2+ \ldots +r_i^2} \ . \ \blacksquare$$

Задача 16. *Да се докаже дека:*

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4} \ .$$

Решение.

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$$

$$< 1 + \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \ldots + \frac{1}{n^3-n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4-2}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < \frac{5}{4}\ . \ \blacksquare$$

Задача 17. *Нека* $a_1,\dots,a_n$ *се позитивни реални броеви. Да се докаже дека:*

$$\binom{n}{2}\cdot \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{a_i a_j} \ge 4\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2 .$$

Во кој случај важи равенството?

Решение. $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_r}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{a_i a_j}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k a_r}} \ge \frac{2}{a_i+a_j}\cdot\frac{2}{a_k+a_r}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{(a_i+a_j)(a_k+a_r)} .$$

Од овде добиваме:

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left[\sum_{1\le k<r\le n}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_r}\right)\right] \ge$$

$$\ge 4\cdot \sum_{1\le i<j\le n}\left[\sum_{1\le k<r\le n}\frac{1}{(a_i+a_j)(a_k+a_r)}\right],$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\cdot\sum_{1\le k<r\le n}\frac{1}{a_k a_r} \ge$$

$$\ge 4\cdot\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\cdot\sum_{1\le k<r\le n}\frac{1}{a_k+a_r} \quad \text{и}$$

$$\binom{n}{2}\cdot \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{a_i a_j} \ge 4\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2 .$$

Ако важи равенството, неопходно е да важи:

$$\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k a_r}} = \frac{2}{a_i + a_j} \cdot \frac{2}{a_k + a_r}$$

за секои парови (i,j) и (k,r), такви што $i<j$ и $k<r$. Ова имплицира дека $a_1 = \dots = a_n$. Освен тоа, за $a_1 = \dots = a_n$ важи равенството. ∎

Задача 18. *Ако* a *и* b *се позитивни реални броеви, а* m *е цел број, да се докаже дека:*

$$(1+\frac{a}{b})^m + (1+\frac{b}{a})^m \geq 2^{m+1} .$$

Решение. Можни се следниве три случаи:

(i) $m=0$, (ii) $m\in\mathbb{N}$ и (iii) $-m\in\mathbb{N}$.

(i) Ако $m=0$ неравенството е тривијално.

(ii) Нека $m\in\mathbb{N}$. Тогаш:

$$(1+\frac{a}{b})^m + (1+\frac{b}{a})^m \geq 2\sqrt{(1+\frac{a}{b})^m(1+\frac{b}{a})^m} = 2\sqrt{(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^m}$$

$$\geq 2\sqrt{4^m} = 2^{m+1}.$$

(iii) Нека $m=-n$, каде $n\in\mathbb{N}$. Тогаш:

$$(1+\frac{a}{b})^m + (1+\frac{b}{a})^m = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{a}{a+b}\right)^n = 2^{-n}\left[\left(\frac{2b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{2a}{a+b}\right)^n\right]$$

$$= 2^{-n}\left[\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^n + \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n\right] \geq 2^{-n}\cdot 2 = 2^{-n+1} = 2^{m+1},$$

бидејќи $\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^n + \left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n \geq 2$, што лесно се проверува со помош на биномната формула. ∎

Задача 19. *Ако* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *тогаш*:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Притоа, равенството ќе важи ако и само ако $a=b=c$.

Решение. Од (1) имаме: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \geq 0$, т.е.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{2a(a+b)(a+c)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(c+a)-3(b+c)(a+c)(a+b)}{2(b+c)(a+c)(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2+(a+c)(a-c)^2+(b+c)(b-c)^2}{2(b+c)(a+c)(a+b)}\geq 0$$

е навистина исполнето.

За доказ на вториот дел од тврдењето, ќе го искористиме следново тврдење. Имено, ако $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, тогаш:

$$\alpha A^2+\beta B^2+\gamma C^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad A=B=C=0,$$

па имаме:

$$\frac{1}{2(b+c)(a+c)}(a-b)^2+\frac{1}{2(b+c)(a+b)}(a-c)^2+\frac{1}{2(a+c)(a+b)}(b-c)^2=0$$

ако и само ако $a-b=a-c=b-c=0$, т.е. $a=b=c$, со што доаказот е завршен. ∎

Второ решение. Нека ставиме:

$$x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b. \tag{2}$$

БидеЈќи $a>0$, $b>0$ и $c>0$, следува дека $x>0$, $y>0$ и $z>0$. Од (2) имаме:

$$a=\frac{y+z-x}{2},\quad b=\frac{z+x-y}{2}\quad и\quad c=\frac{x+y-z}{2}. \tag{3}$$

Со овие трансформации неравенството (1) е еквивалентно со:

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}\quad /\cdot 2$$

што од друга страна е еквивалентно со неравенството:

$$\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\geq 3,$$

т.е. со неравенството

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6\ . \tag{4}$$

Бидејќи $x>0$, $y>0$ и $z>0$, имаме:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2\quad и\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2,$$

од каде следува дека (4) е точно неравенство. Во (4) важи равенството ако и само ако $x=y=z$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ∎

Задача 20. *Нека* $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$, *каде што* $a>0$, $b>0$, $c>0$ *формираат геометриска прогресија и нека* $p=\frac{a+b+c}{3}$. *Да се докаже дека* $27b\le(p+2)^3$.

Решение. Броевите $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ формираат геометриска прогресија, па сите тие можат да се изразат преку еден нејзин член и количникот на прогресијата. Имено, прогресијата е:

$$\sqrt[3]{b/q},\ \sqrt[3]{b},\ \sqrt[3]{bq}\ ,$$

па тогаш:

$$p=\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{(b/q)b(bq)}=b,\ p\ge b\ . \qquad (1)$$

Според тоа:

$$p+2=\frac{a+b+c}{3}+2=\frac{a+b+c+6}{3}=\frac{3a+3b+3c+18}{9}$$

$$=\frac{3a+3b+3c+3+3+3+3+3+3}{9}\ge\sqrt[9]{3a\cdot3b\cdot3c\cdot3^6}=3\sqrt[9]{abc}\ .$$

Значи, $p+2\ge3\sqrt[9]{abc}$. Степенувајќи ги со 3 двете страни и имајќи го предвид неравенството (1), добиваме:

$$(p+2)^3\ge3^3\cdot\left(\sqrt[9]{abc}\right)^3=27\sqrt[3]{abc}=27b\ .$$

Значи $27b\le(p+2)^3$, што требаше да се докаже. ∎

Задача 21. *Нека* $a_i>0$ *за* $i=1,2,3$. *Ако* $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$, *формираат геометриска прогресија, тогаш:*

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+1\right)^2-4a_2\ge0.$$

Притоа равенството важи акко $a_1=a_2=a_3=1$.

Решение. Нека $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ се членови на геометриска прогресија. Тогаш $a_1a_2a_3 = a_2^3$, па имаме:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+1\right)^2 = \left(\frac{a_1+a_2+a_3+3}{3}\right)^2 = \left(\frac{2a_1+2a_2+2a_3+6}{6}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2a_1+2a_2+2a_3+2+2+2}{6}\right)^2 \geq \left(\sqrt[6]{2a_1\cdot 2a_2\cdot 2a_3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt[6]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot 2^6}\right)^2 = \sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}\cdot 2^2 = 4\cdot\sqrt[3]{a_2^3} = 4a_2\ ,$$

т.е.

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+1\right)^2 \geq 4a_2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+1\right)^2 - 4a_2 \geq 0,$$

што требаше да се докаже. Притоа, неравенството станува равенство акко $a_1=a_2=a_3=1$. ∎

Задача 22. *Нека* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *се* n *позитивни броеви, а* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *е една нивна пермутација. Да се докаже дека:*

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, тогаш:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right) \geq \left(\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{a_n}{b_n}\right)^{1/n}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n} \geq n\cdot\left(\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{a_n}{b_n}\right)^{1/n}$$

$$= n\cdot\left(\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}\right)^{1/n} = n\cdot 1^{1/n} = n.$$

Значи,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \ge n$$

што требаше да се докаже. ■

Задача 23. *Да се докаже дека:*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} .$$

Решение. Неравенствата ќе ги докажеме со помош на математичка индукција.

Неравенствата се точни за $n=1$, затоа што $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=m$, т.е. дека важи:

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \le \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} .$$

Проверуваме дали неравенствата се точни за $n=m+1$. Имаме:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} = \cdot \frac{(2m+1)(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!} \begin{cases} \ge \frac{2m+1}{2m+2}/2\sqrt{m} \\ < \frac{2m+1}{2m+2}/\sqrt{2m+1} \end{cases}$$

Според тоа проверката се сведува на проверка на следниве две неравенства:

$$\frac{2m+1}{2m+2}/2\sqrt{m} \quad \ge 1/2\sqrt{m+1} \tag{1}$$

$$\frac{2m+1}{2m+2}/\sqrt{2m+1} < 1/\sqrt{2m+3} \tag{2}$$

Да покажеме дека неравенството (1) е точно.

$$4m^2+3m < 4m^2+4m+1 \le (2m+1)^2 \iff m(4m+3) \le (2m+1)^2$$

$$\iff \frac{4m+3}{(2m+1)^2} \le \frac{1}{m} \iff \frac{1}{2m+1}\left[2 + \frac{1}{2m+1}\right] \le \frac{1}{m}$$

$$\iff 1+ \frac{2}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} \le 1+ \frac{1}{m} \iff \left[1+ \frac{1}{2m+1}\right]^2 \le \left[1+ \frac{1}{m}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+2}{2m+1}\right)^2 \le \frac{m+1}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2m+1}{2m+2} \le \sqrt{m}/\sqrt{m+1} = (2\sqrt{m})/(2\sqrt{m+1})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m+1}{2m+2}/2\sqrt{m} \ge 1/2\sqrt{m+1}.$$

Сега го докажуваме неравенството (2).

$$4m^2+6m+2m+3 < 4m^2+8m+4 \quad \Leftrightarrow \quad (2m+1)\cdot(2m+3) < (2m+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m+1}\cdot\sqrt{2m+3} < 2m+2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2m+1}/(2m+2) < 1/\sqrt{2m+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+1}{2m+2}/\sqrt{2m+1}<1/\sqrt{2m+3} \ . \ \blacksquare$$

Задача 24. *Да се докаже дека:*

a) $$n! < \left[\frac{n+1}{2} \right]^n, \quad \textit{за} \quad n\ge 2 \ ;$$

б) $$\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right]^n > (n!)^2 , \quad \textit{за} \quad n\ge 2 \ .$$

Решение. а) Од тоа што $\frac{1+2+\ldots+n}{n} \ge \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \sqrt[n]{n!}$ следува дека:

$$\sqrt[n]{n!} \le \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \quad \text{т. е.} \quad n! \le \left[\frac{n+1}{2} \right]^n.$$

Но за $n\ge 2$ $\frac{1+2+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$, па $n! < \left[\frac{n+1}{2} \right]^n$.

б) Од а) следува дека $n! < \left[\frac{n+1}{2} \right]^n$. Со квадрирање, се добива $(n!)^2 < \left[\frac{n+1}{2} \right]^{2n}$, од што заедно со,

$$\left[\frac{n+1}{2} \right]^2 = \frac{n^2+2n+1}{4} < \frac{(n+1)(2n+1)}{6} ,$$

следува дека:

$$(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right]^n . \ \blacksquare$$

Задача 25. *Нека* C *е произволен фиксен број. Да се најде онаа пермутација* $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ *на броевите* $0, 1, \dots, n$ *за која изразот:*

$$C^{\tau_0} + C \cdot C^{\tau_1} + \dots + C^n \cdot C^{\tau_n}$$

прима максимална вредност.

Решение. Од неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски следува дека за $S_\tau = 1 \cdot C^{\tau_0} + C \cdot C^{\tau_1} + \dots + C^n \cdot C^{\tau_n}$, **важи:**

$$S_\tau \le \left\{ \sum_{0 \le k \le n} (C^k)^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{0 \le k \le n} (C^{\tau_k})^2 \right\}^{1/2} = \sum_{0 \le k \le n} C^{2k} = A.$$

Затоа при која било пермутација τ, S_τ не е поголемо од A. Меѓутоа во неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски равенство се постигнува само ако:

$$\frac{1}{C^{\tau_0}} = \frac{C}{C^{\tau_1}} = \dots = \frac{C^n}{C^{\tau_n}},$$

што е можно само кога $\tau_0=0$, $\tau_1=1, \dots, \tau_n=n$. Затоа, S_τ прима максимум за идентичната пермутација $\tau_i=i$, $0 \le i \le n$. ■

Задача 26. *Нека* $f(x) = -\ln(1+x)$, *за* $x>-1$. *Да се докаже дека:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} .$$

Решение. Од:

$$\sqrt{(1+x_1) \cdot (1+x_2)} < \frac{1 + x_1 + 1 + x_2}{2} = 1 + \frac{x_1 + x_2}{2},$$

и од фактот што $\ln$ е монотоно растечка функција, следува дека:

$$\ln\sqrt{(1+x_1) \cdot (1+x_2)} < \ln\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{2} \right),$$

од што по множење со -1 и средување се добива:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = -\ln\sqrt{(1+x_1)\cdot(1+x_2)} > -\ln\left(1+\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \blacksquare$$

Задача 27. *Да се докаже дека за произволни позитивни реални броеви* a, b *и* c *важи неравенството*

$$a^a\cdot b^b\cdot c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

Решение. Не се губи од општоста ако се претпостави дека $a\geq b\geq c$. Освен тоа, користејќи дека $a-b\geq 0$, $a-c\geq 0$ и $b-c\geq 0$ се добива:

$$a^{a-b} \geq b^{a-b}; \quad a^{a-c} \geq c^{a-c}; \quad \text{и} \quad b^{b-c} \geq c^{b-c}.$$

Ако овие три неравенства се помножат, добиеното неравенство се запишува во следниов облик:

$$a^{3a}\cdot b^{3b}\cdot c^{3c} \geq (abc)^{(a+b+c)},$$

од каде што се добива бараното неравенство. ■

Задача 28. *Нека* a, b *и* c *се позитивни реални броеви. Докажи дека:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Решение. Ако $x,y,z>0$, тогаш забележуваме дека:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z} \iff \frac{x}{y+z} \geq \left(\frac{2x}{x+y+z}\right)^2 \iff (x+y+z)^2\geq 4x(y+z)$$

$$\iff (y+z-x)^2\geq 0,$$

и притоа равенството важи ако и само ако $x=y+z$. Користејќи го тоа добиваме:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Ако претпоставиме дека важи равенството, тогаш ќе биде

$a=b+c$, $b=c+a$ и $c=a+b$, т.е. $a=b=c=0$, што е во спротивност со претпоставката $a,b,c>0$. Значи, важи стриктно неравенство, што требаше да се докаже. ■

Задача 29. *Да се покаже дека, ако* $a>0$, $b>0$ *и* $c>0$, *тогаш:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}. \tag{1}$$

Решение. Бидејќи $a>0$, $b>0$ и $c>0$ даденото неравенство (1) можеме да го запишеме во на него еквивалентното неравенство

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge ab+bc+ca. \tag{2}$$

Според тоа, доволно е да го покажеме неравенството (2). Ако ги собереме следните неравенства:

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}=\left(\frac{a^3}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^3}{ac}\right)^2\ge 2\,\frac{a^3}{bc}\cdot\frac{b^3}{ac}=2\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}$$

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge 2\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}$$

$$\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge 2\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}$$

и ако поделиме со 2, добиваме :

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}. \tag{3}$$

Понатаму имаме :

$$\begin{cases} \dfrac{a^2b^2}{c^2} + \dfrac{a^2c^2}{b^2} = \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{ac}{b}\right)^2 \geq 2\cdot \dfrac{abac}{bc} \geq 2a \\ \dfrac{a^2b^2}{c^2} + \dfrac{b^2c^2}{a^2} \geq 2b^2 \\ \dfrac{a^2c^2}{b^2} + \dfrac{b^2c^2}{a^2} \geq 2c^2 \end{cases} \tag{4}$$

Ако ги собереме неравенствата (4) и поделиме со 2 добиваме:

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{a^2c^2}{b^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 . \tag{5}$$

Од (3) и (5) следува:

$$\frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{a^2c^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 . \tag{6}$$

Но, бидејќи $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, $\dfrac{a^2+c^2}{2} \geq ac$ и $\dfrac{c^2+b^2}{2} \geq cb$, имаме:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca . \tag{7}$$

Од (6) и (7) добиваме:

$$\frac{a^6}{b^2c^2} + \frac{b^6}{a^2c^2} + \frac{c^6}{a^2b^2} \geq ab + bc + ca ,$$

т.е.

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^2b^2c^2} \geq ab + bc + ca .$$

Според тоа,

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} . \blacksquare$$

Задача 30. *Да се докаже дека за секои позитивни реални броеви* a, b *и важи:*

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot(ab+bc+ca + \sqrt{a^2b^2+ b^2c^2+ a^2c^2}\ )}{a\cdot b\cdot c} \geq 3\cdot\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Решение. Со примена на неравенството $x+y+z \geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$, за секои $x,y,z \geq 0$ добиваме:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2},$$

односно:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{abc}.$$

Слично имаме:

$$ab + bc + ac \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}.$$

Со повторна примена на $x+y+z \geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$, добиваме:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot b^4\cdot c^4},$$

односно

$$\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}.$$

Според тоа,

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot(ab+bc+ca + \sqrt{a^2b^2+ b^2c^2+ a^2c^2})}{a\cdot b\cdot c} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot(3\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2} + \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2})}{a\cdot b\cdot c} = 3\cdot\left(1+\sqrt{3}\right). \blacksquare$$

Задача 31. *Нека* $x_i \in [0,1]$, $i=1,2,\dots,n$. *Да се докаже дека:*

$$(x_1+ x_2+ \dots + x_n+1)^2 \geq (x_1^2+x_2^2+ \dots + x_n^2).$$

Решение. Од $x_i \in [0,1]$, $i=1,2,\dots,n$, следува дека $x_i^2 \leq x_i$, за $i=1,2,\dots,n$. Нека $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Од $(S+1)^2 \geq 4S$, следува:

$$(x_1+x_2+\dots+x_n+1)^2 \geq 4\cdot(x_1+x_2+\dots+x_n) \geq 4(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2). \blacksquare$$

Задача 32. *Нека* $0 < a < b$ *и* $x_i \in [a,b]$, $i = 1,2,\dots,n$. *Да се докаже неравенството:*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \le \frac{(a+b)^2}{4ab}\cdot n^2 .$$

Решение. Користејќи го неравенството $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, за секое $c>0$ имаме:

$$P = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$= \left(\frac{c}{x_1} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{c}{x_n}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \dots + \frac{x_n}{c}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2 .$$

Но $f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{c}$ прима најголема вредност на еден од краевите на интервалот $[a,b]$ и нека c го избереме така што $f(a) = f(b)$, т.е. $c = \sqrt{ab}$. Но тогаш за секој $t \in [a,b]$ важи $f(t) \le \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ и затоа:

$$P \le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4}\cdot\left(n\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 = \frac{n^2}{4}\cdot\frac{(a+b)^2}{ab} . \ \blacksquare$$

3.3. ПОЛИНОМИ

Задача 1. *Да се докаже дека не постојат цели броеви* a, b, c *и* d, *такви што* ax^3+bx^2+cx+d *е еднаков на* 1 *при* $x=19$ *и еднаков на* 2 *при* $x=62$.

Решение. Нека $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Притоа имаме:

$$P(62)-P(19)=a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19),$$

т.е. бројот се дели со 43, што противречи на претпоставката $P(62)-P(19)=2-1=1$. ■

Задача 2. *Ако* $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ *е полином со реални коефициенти* a_i, *тогаш дефинираме* $\Phi(P(x)) = a_0^2+a_1^2+\ldots+a_m^2$. *Нека* $f(x)=3x^2+7x+2$. *Да се најде полином* $g(x)$ *со реални коефициенти таков што:*

(i) $g(0)=1$

(ii) $\Phi(f(x)^n)=\Phi(g(x)^n)$, $n\geq 1$.

Решение. Нека $C(P(x))=a_0$. Тогаш $\Phi(P(x))=C(P(x)P(1/x))$, па затоа:

$$\begin{aligned}\Phi((3x^2+7x+2)^n) &=C((3x^2+7x+2)^n(3x^{-2}+7x^{-1}+2)^n)\\ &=C((3x+1)^n(x+2)^n(3x^{-1}+1)^n(x^{-1}+2)^n)\\ &=C((3x+1)^n(3x^{-1}+1)^n(x+2)^n(x^{-1}+2)^n)\\ &=C((3x+1)^n(3x^{-1}+1)^n(2x^{-1}+1)^n(2x+1)^n)\\ &=C((3x+1)^n(2x+1)^n(3x^{-1}+1)^n(2x^{-1}+1)^n)\\ &=C((6x^2+5x+1)^n(6x^{-2}+5x^{-1}+1)^n)\end{aligned}$$

$$=\Phi((6x^2+5x+1)^n).$$

Според тоа, при $g(x)=6x^2+5x+1$ исполнети се (i) и (ii), т.е. бараното решение е $g(x)=6x^2+5x+1$. ∎

Задача 3. *Познато е дека сите корени на полиномот* $P(x)=x^3+px+q$, *каде* $q\neq 0$ *се реални. Да се докаже дека* $p<0$.

Решение. Јасно е дека сите корени на полиномот $P(x)$ не може да бидат еднакви. Во спротивно $P(x)=(x-a)^3$, што при $q\neq 0$ не е можно. Значи, полиномот има барем два различни корена. Нека тие корени се x_1 и x_2, при што можеме да претпоставиме дека $x_1<x_2$. Ако претпоставиме, дека $p\geq 0$ тогаш:

$$x_1^3<x_2^3 \quad \text{и} \quad px_1\leq px_2. \tag{1}$$

Од (1) следува, дека:

$$P(x_1) = x_1^3+px_1+q<x_2^3+px_2+q = P(x_2) \ . \tag{2}$$

Неравенството (2) противречи на $P(x_1)=P(x_2)=0$, па според тоа, нашата претпоставка дека $p\geq 0$ доведе до противречност. Значи, $p<0$, што требаше да се докаже. ∎

Задача 4. *Да се покаже, дека не постои таков полином:*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

за којшто сите броеви $P(0),P(1),P(2),\ldots$ *се прости броеви .*

Решение. Нека N е цел број и $P(N)=M$. Тогаш:

$$P(N+kM)-P(N) = a_0\left[(N+kM)^n-N^n\right] + a_1\left[(N+kM)^{n-1}-N^{n-1}\right]$$
$$+\ldots+a_{n-1}\left[(N+kM)-N\right]$$

се дели со kM, за секој цел број k, бидејќи $(N+kM)^i-N^i$ се дели со $(N+kM)-N=kM$, па значи и со M. Затоа $P(N+kM)$ се дели со M за секој цел број k. Според тоа, ако докажеме дека помеѓу вредностите $P(N+kM)$, $k=0,1,2,\ldots$ постојат броеви, различни од $\pm M$, тогаш тие не се прости, со што задачата ќе биде решена. Но полиномот $P(x)$ од n-ти степен е еднаков на даден реален број A, за најмногу n-различни вредности на x (равенката $P(x)-A=0$, од n-ти степен има најмногу n различни корени). Според тоа, помеѓу првите $2n+1$ вредности $P(N+kM)$, $k=0,1,\dots,2n$ постои најмалку еден број различен од $\pm M$. ∎

Задача 5. *Да се докаже, дека ако полиномот со цели коефициенти* $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ *прима при* $x=0$ *и* $x=1$ *непарни вредности, тогаш равенката* $P(x)=0$ *нема цели корени.*

Решение. Нека p и q се два цели броја, истовремено парни или непарни. Тогаш разликата $P(p)-P(q)$ е парна. Имено, изразот:

$$P(p)-P(q)=a_0(p^n-q^n)+a_1(p^{n-1}-q^{n-1})+\dots+a_{n-2}(p^2-q^2)+a_{n-1}(p-q)$$

се дели со парниот број $p-q$. Затоа кога p е парен, разликата $P(p)-P(0)$ е парна. Но, по условот $P(0)$ е непарен, па значи $P(p)$ е исто така непарен. Затоа, $P(p)\neq 0$. Аналогно, кога p е непарен разликата $P(p)-P(1)$ е парна и бидејќи по условот $P(1)$ е непарен, добиваме дека $P(p)\neq 0$. Значи, $P(x)$ не може да биде еднаков на нула за ниеден цел број x, т.е. полиномот $P(x)$ нема цели корени. ∎

Задача 6. *Да се докаже, дека ако полиномот со цели коефициенти* $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ *прима за четири цели вредности на x вредност 7, тогаш тој не може да е еднаков на 14 за ниеден цел број x.*

Решение. Нека полиномот $P(x)$ е еднаков на 7 за $x=a$, $x=b$, $x=c$ и $x=d$. Во тој случај равенката $P(x)-7=0$ има четири цели корени a, b, c и d. Но, тоа значи дека полиномот $P(x)-7$ се дели со $x-a$, $x-b$, $x-c$ и $x-d$, т.е.

$$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x),$$

каде $p(x)$ може да е еднаков на 1.

Претпоставуваме сега дека полиномот $P(x)$ прима при цела вредност $x=A$ вредност 14. Во последната равенка ставаме $x=A$ и добиваме:

$$14-7=7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A)$$

што не е можно, бидејќи целите броеви $A-a$, $A-b$, $A-c$ и $A-d$ се сите различни, а 7 не може да се разложи во производ на пет множители, од кои најмалку четири се различни помеѓу себе. ■

Задача 7. *Да се најдат сите полиноми* $P(x)$ *за кои важи:*

$$xP(x-1) = (x-26)P(x). \qquad (1)$$

Решение. Нека полиномот има степен n. Од условот на задачата следува дека $P_n(x)$ се дели со x. Според тоа, $P_n(x)=xP_{n-1}(x)$ каде $P_{n-1}(x)$ е полином со степен $n-1$. Значи, $P_n(x-1)=(x-1)P_{n-1}(x-1)$ и со замена во (1) добиваме:

$$x(x-1)P_{n-1}(x-1)=(x-26)P_n(x)=(x-26)xP_{n-1}(x) ,$$

па значи $P_{n-1}(x)$ се дели со $x-1$, т.е. $P_n(x)=x(x-1)P_{n-2}(x)$, каде што $P_{n-2}(x)$ е полином со степен $n-2$. Но:

$$P_n(x-1)=(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)$$

и со замена во (1) наоѓаме:

$$x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)=(x-26)P_n(x)=(x-26)x(x-1)P_{n-2}(x) ,$$

што значи $P_n(x)$ се дели и со $x-2$. Според тоа,

$$P_n(x)=x(x-1)(x-2)P_{n-3}(x-1).$$

Ако постапката ја продолжиме, добиваме:

$$P(x)=P_n(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-25)P_{n-26}(x)$$

и со замена во (1) добиваме

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-26)P_{n-26}(x-1) =$$

$$= (x-26)x(x-1)(x-2)\dots(x-25)P_{n-26}(x) ,$$

односно $P_{n-26}(x)=P_{n-26}(x-1)=Q(x)$, каде што $Q(x)$ е полином со степен $n-26$. Ако $Q(x)=\text{const}$, тогаш (1) е точно. Ако:

$$Q(x)=Q_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k,\quad k\geq1$$

и $a_0\neq0$, тогаш со замена во $Q(x)=Q(x-1)$ имаме:

$$a_0(x-1)^k+a_1(x-1)^{k-1}+\ldots+a_{k-1}(x-1)+a_k=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$$

и со споредување на коефициентите добиваме $ka_0+a_1=a_1$, т.е. $a_0=0$, што е противречност. Значи, $k=0$, односно $Q(x)=c$ и

$$P(x)=cx(x-1)(x-2)\ldots(x-25).\ \blacksquare$$

Задача 8. *Ако* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *се* n *различни цели броеви, дали може полиномот* $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ *да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти ?*

Решение. Нека $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1 = p(x)q(x)$, каде што p и q се неконстантни полиноми со целобројни коефициенти. Можеме да претпоставиме дека коефициентите пред највисоките степени на двата полиноми се единица.

За $x\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ важи $p(a_i)q(a_i) = -1$, за $1\leq i\leq n$. Но $p(a_i),q(a_i)\in\mathbb{Z}$, па затоа $p(x)+q(x)=0$ за $x\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Затоа, полиномот $p(x)+q(x)$ мора да се дели со полиномот $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ што не е можно бидејќи полиномот $p+q$ има степен $\deg(p+q)\leq\max(\deg p, \deg q) < n$. $\blacksquare$

Задача 9. *Нека* x_1, x_2 *се корени на равенката*

$$x^2-ax+a-1=0.$$

Да се определи a, *така што* $x_1^2+x_2^2$ *има најмала вредност.*

Решение. Според Виетовите формули, $x_1+x_2=a$ и $x_1x_2=a-1$. Тогаш $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$, од што следува дека $x_1^2+x_2^2$ ќе има најмала вредност за $a=1$. $\blacksquare$

Задача 10. *Да се определи* p, **така што** $x_1^4+x_2^4$, *каде што* x_1, x_2 *се корени на равенката* $x^2 + px + \frac{1}{p^2} = 0$, *да има најмала вредност.*

Решение. Од $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = p^2-2\cdot\frac{1}{p^2} = p^2-\frac{2}{p^2}$, следува дека:

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2 = \left(p^2-\frac{2}{p^2}\right)^2-2\left(\frac{1}{p^2}\right)^2 = p^4+\frac{2}{p^4}-4.$$

Значи збирот $x_1^4+x_2^4$ ќе има најмала вредност ако и само ако $p^4+\frac{2}{p^4}$ има најмала вредност. Од неравенството:

$$p^4 + \frac{2}{p^4} \geq 2\cdot\sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} = 2\sqrt{2},$$

добиваме $p^4+\frac{2}{p^4} \geq 2\sqrt{2}$. Ако постои p за кој $p^4+\frac{2}{p^4}=2\sqrt{2}$, тогаш тој би бил бараниот број. По средувањето се добива $p^8-2\sqrt{2}\cdot p^4+2=0$, односно $p^4=\sqrt{2}$. Според тоа бараниот број е

$$p = \pm\sqrt[8]{2}\ . \ \blacksquare$$

Задача 11. *Ако полиномот* $P(x)=Ax^2+Bx+C$ *се анулира за три различни вредности на* x, *тогаш* $A=B=C=0$, *т.е.* $P(x)\equiv 0$. *Користејќи го ова да се докаже дека:*

$$a^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2,$$

за $a\neq b\neq c\neq a$.

Решение. Нека полиномот се анулира за три различни вредности на x, т.е. за $x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1$ **важи:**

$$Ax_1^2+Bx_1+C=0,\quad Ax_2^2+Bx_2+C=0 \quad \text{и} \quad Ax_3^2+Bx_3+C=0.$$

Притоа имаме:

$$A(x_1^2-x_2^2)+B(x_1-x_2)=0\ ,\quad \text{т.е.}\ (x_1-x_2)(A(x_1+x_2)+B)=0 \quad \text{и}$$

$$A(x_2^2-x_3^2)+B(x_2-x_3)=0\ ,\quad \text{т.е.}\ (x_2-x_3)(A(x_2+x_3)+B)=0\ .$$

Бидејќи $x_1-x_2\neq0$ и $x_2-x_3\neq0$ добиваме:

$A(x_1+x_2)+B=0$ и $A(x_2+x_3)+B=0$, односно $A(x_1-x_3)=0$.

Но, од $x_1\neq x_3$ следува $A=0$.

Со замена за $A=0$ во $A(x_1^2-x_2^2)+B(x_1-x_2)=0$ добиваме дека $B=0$, односно од $Ax_1^2+Bx_1+C=0$ добиваме $C=0$.

За вториот дел од задачата, да ставиме:

$$L(x) = a^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

и нека $P(x) = L(x)-x^2$. Но тогаш:

$$P(a)=L(a)-a^2=0; \quad P(b)=L(b)-b^2=0; \quad \text{и} \quad P(c)=L(c)-c^2=0.$$

Според тоа, добиваме $P(x)\equiv0$, односно $L(x)=x^2$. ∎

Задача 12. *Нека* f *е полином со целобројни коефициенти со степен* n, *кој за повеќе од* $\frac{n}{2}$ *различни целобројни аргументи прима вредност* ±1. *Докажи дека ако е* $n\geq12$, *тогаш* f *не може да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.*

Решение. Нека $f(x)=p(x)q(x)$ каде p и q се полиноми со целобројни коефициенти. Барем еден од полиномите p и q има степен $\leq\frac{n}{2}$. Нека е тоа полиномот p. Полиномот $p(x)$ прима вредности ±1 во повеќе од $\frac{n}{2}\geq6$ различни целобројни точки. Затоа полиномот p или полиномот $-p$ прима вредност 1 во повеќе од 3 различни целобројни точки. Истиот да го означиме со r. Ќе покажеме дека $r(x)\neq-1$ за секој $x\in\mathbb{Z}$. Навистина, од горната дискусија:

$$r(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x) ,$$

каде што $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Z}$ и h е полином со целобројни коефициенти. Затоа ако $x\in\mathbb{Z}$ и $r(x)=-1$, тогаш два од броевите $x-a_1$, $x-a_2$, $x-a_3$ и $x-a_4$ можат да бидат 1 и -1, а останатите се различни од ±1, и:

$$-2=r(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x)\neq-2.$$

Од оваа конструкција произлегува дека $r(x)\neq-1$ за секој $x\in\mathbb{Z}$. Полиномот r ($r=p$ или $r=-p$) во повеќе од $\frac{n}{2}$ различни целобројни точки прима вредност 1, а неговиот степен е $\leq\frac{n}{2}$. Затоа, $r(x)\equiv1$, т.е. $p(x)\equiv1$ или $p(x)\equiv-1$. ∎

Задача 13. *Нека* a,b *и* c *се три различни цели броеви и* P *нека е полином со целобројни коефициенти. Докажи дека не е можно истовремено да биде задоволено* $P(a)=b$, $P(b)=c$ *и* $P(c)=a$.

Решение. Лесно се проверува дека:

$$x\neq y,\ x,y\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ \frac{P(x)-P(y)}{x-y}\in\mathbb{Z}.$$

Да претпоставима дека $P(a)=b$, $P(b)=c$ и $P(c)=a$. Тогаш, ставајќи $(x,y)=(a,b)$, $(x,y)=(b,c)$, $(x,y)=(c,a)$ добиваме:

$$\frac{b-c}{a-b},\ \frac{c-a}{b-c},\ \frac{a-b}{c-a}\in\mathbb{Z}.$$

Меѓутоа забележуваме дека производот на овие три цели броеви е 1, па затоа можни се следниве два случаја: (i) сите три броеви да се еднакви на 1 и (ii) еден од тие два броеви да е 1, а другите два броеви да се еднакви на -1. Лесно се проверува дека во секој од овие два случаја се добива $a=b=c$, што претставува противречност. ∎

Задача 14. *Ако* $a_0\geq a_1\geq\ldots\geq a_n>0$, *тогаш сите корени на полиномот*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

припаѓаат во множеството $\{z:|z|\leq1\}$.

Решение. Да претпоставиме дека $r=|\alpha|>1$. Тогаш ќе покажеме дека $P(\alpha)\neq0$ и со тоа задачата ќе биде решена. Да го разгледаме полиномот:

$$Q(x) = P(x)(1-x) = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)(1-x)$$
$$= a_0x^n - a_0x^{n+1} + a_1x^{n-1} - a_1x^n + \ldots + a_n - a_nx$$
$$= a_n + (a_{n-1} - a_n)x + \ldots + (a_0 - a_1)x^n - a_0x^{n+1}.$$

Од овде следува:

$$|P(\alpha)(1-\alpha)| = |a_n + (a_{n-1}-a_n)\alpha + \ldots + (a_0-a_1)\alpha^n - a_0\alpha^{n+1}|$$
$$\geq a_0r^{n+1} - |a_n + (a_{n-1}-a_n)\alpha + \ldots + (a_0-a_1)\alpha^n|$$
$$\geq a_0r^{n+1} - r^n(a_n + a_{n-1} - a_n + \ldots + a_0 - a_1)$$
$$= a_0r^n(r-1) > 0.$$

Значи $|P(\alpha)(1-\alpha)| > 0$, па според тоа $P(\alpha) \neq 0$. ■

Задача 15. *Ако полиномот* $P(x)$ *од* n*-ти степен прима целобројни вредности за* $n+1$ *последователни цели броеви, тогаш* $P(x)$ *прима целобројни вредности за секој цел број* x.

Решение. Ако $n=0$ тврдењето е тривијално. Претпоставуваме дека тврдењето важи за бројот $n-1$. Нека $P(x)$ е полином со степен n, кој прима целобројни вредности за $n+1$ последователни цели броеви $t, t+1, t+2, \ldots, t+n$. Тогаш, $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ е полином со степен $n-1$ и прима целобројни вредности за $x \in \{t, t+1, \ldots, t+n-1\}$. Според индуктивната претпоставка $Q(x) \in \mathbb{Z}$, за секој $x \in \mathbb{Z}$, од што следува дека:

$$P(x+1) = P(x)+Q(x) \in \mathbb{Z}, \quad \text{за} \quad x \in \{t+n+1, t+n+2, t+n+3, \ldots\}, \text{ т.е.}$$
$$P(x) = P(x+1)-Q(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{за} \quad x \in \{t-1, t-2, t-3, \ldots\}. \ ■$$

Задача 16. *Нека* $P(x)$ *е полином од* n*-ти степен со целобројни кефициенти. Да се докаже равенството:*

$$\textit{НЗД}(P(0), P(1), \ldots, P(n)) = \textit{НЗД}(P(k), P(k+1), \ldots, P(n+k))$$

за секој $k \in \mathbb{Z}$, *каде што* НЗД$(a, b, c, \ldots, s)$ *го означува најголемиот заеднички делител за броевите* $a, b, c, \ldots, s$.

Решение. Нека

$$m = \text{НЗД}(P(0),P(1),\ldots,P(n)).$$

Тогаш според задачата 15, полиномот $\frac{P(x)}{m}$ прима целобројни вредности за секој $x\in\mathbb{Z}$. Значи, $m|P(x)$ за секој $x\in\mathbb{Z}$, па $m|m'$ каде што $m' = \text{НЗД}(P(k),P(k+1),\ldots,P(n+k))$. Аналогно се покажува дека и $m'|m$, па според тоа, $m'=m$. ■

Задача 17. *Да се докаже дека секој полином од* n*-ти степен кој прима целобројни вредности во сите цели броеви, може да се претстави како линеарна комбинација со цели коефициенти од полиномите:*

$$\binom{x}{0},\ \binom{x}{1},\ \binom{x}{2},\ \ldots,\ \binom{x}{n},$$

каде $\binom{x}{k}$ *е ознака за полиномот* $\frac{1}{k!}\cdot x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)$.

Решение. Јасно е дека секој полином кој прима целобројни вредности за сите цели броеви е полином со целобројни коефициенти. Затоа доволно е да се докаже дека тврдењето важи за полиномите $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,x^n$. Ова ќе го докажеме со помош на математичка индукција. За x^0 важи $x^0=\binom{x}{0}$. Нека:

$$x^{k-1} = C_1\binom{x}{k-1}+\ldots+C_k\binom{x}{0}.$$

За $1\le k\le n$, каде $C_1,\ldots,C_k$ се цели броеви. Јасно е дека:

$$x^k=k!\binom{x}{k}+Q(x)\ ,$$

каде што $Q(x)$ е полином со степен $k-1$. Според индуктивната претпоставка полиномот $Q(x)$ може да се запише како линеарна комбинација од полиномите $\binom{x}{0},\binom{x}{1},\ldots,\binom{x}{k-1}$ со цели коефициенти. Затоа и x^k може да се запише како линеарна комбинација со цели коефициенти од полиномите $\binom{x}{0},\binom{x}{1},$ $\binom{x}{2},\ldots,\binom{x}{k}$. ■

Задача 18. *Нека* $P(x)$ *е полином од* n*-ти степен за кој* $P(m) = \frac{m}{m+1}$, *за* $0 \le m \le n$. *Да се пресмета* $P(n+1)$.

Решение. Да го разгледаме полиномот $Q(x)=(x+1)P(x)-x$. Од условот на задачата имаме $Q(k)=(k+1)P(k)-k=0$, за $0 \le k \le n$. Бидејќи полиномот $Q(x)$ има степен $n+1$ и $0,1,2,\dots,n+1$ се негови нули, добиваме дека:

$$Q(x)=cx(x-1)\dots(x-n),$$

каде што $c=\text{const}$. За $x=-1$ добиваме:

$$Q(-1)=c(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

Од друга страна имаме $Q(-1) = (-1+1)P(-1)+1 = 1$, па според тоа, $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Затоа, $P(x) = \frac{Q(x)+x}{x+1}$ и

$$P(n+1) = \frac{c(n+1)!+n+1}{n+2} = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}. \ \blacksquare$$

Задача 19. *Да се најде најголемата вредност на полиномот* $P(x) = ax-x^n$, *за* $x \ge 0$, $n \ge 2$ *и* $a \in \mathbb{R}^+$. *За кој* x *се достигнува таа вредност?*

Решение. Нека за некој u, $P(x_2)-P(x_1) \ge 0$ за секои $0<x_1<x_2<u$, т.е. $ax_2-x_2^n-ax_1+x_1^n \ge 0$, односно:

$$a(x_2-x_1) \ge x_2^n-x_1^n = (x_2-x_1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}x_2^k\right). \qquad (1)$$

Но, од $0<x_1<x_2$ имаме $x_2-x_1>0$ и од (1) добиваме:

$$a \ge \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}\cdot x_2^k \ge n\cdot x_1^{n-1}.$$

Значи, $x_1^{n-1} \le \frac{a}{n}$, т.е. $x_1 \le \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Нека понатаму $x_1<x_2<\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Тогаш:

$P(x_2)-P(x_1)= ax_2-x_2^n-ax_1+x_1^n$

$$= a(x_2-x_1)-(x_2-x_1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}x_2^k\right)$$

$$= (x_2-x_1)\left(a-\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}x_2^k\right)$$

$$\geq (x_2-x_1)\left(a-\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\right)$$

$$= (x_2-x_1)\left(a-n\frac{a}{n}\right) = 0.$$

Значи, $P(x_2)-P(x_1) \geq 0$ за $x_1<x_2<\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

За $\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}<x_1<x_2$ имаме:

$$P(x_2)-P(x_1) = ax_2-x_2^n-ax_1+x_1^n$$

$$= a(x_2-x_1)-(x_2-x_1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}x_2^k\right)$$

$$= (x_2-x_1)\left(a-\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}x_2^k\right)$$

$$\leq (x_2-x_1)\left(a-\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\right)$$

$$=(x_2-x_1)\left(a-n\frac{a}{n}\right) = 0.$$

Значи, $P(x_2)-P(x_1)\leq 0$ за $\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}<x_1<x_2$.

Според тоа,

$$P\left(\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) = a\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = (n-1)\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

е најголемата вредност на полиномот $P(x)$ која се достигнува за $\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. ■

Задача 20. *Да се најде најмалата и најголемата вредност на изразот* $\sin^6 x+\cos^6 x$.

Решение. Го трансформираме дадениот израз на следниов начин:

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3\\&=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)\\&=\left(1-\cos^2 x\right)^2-\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x+\cos^4 x\\&=1-3\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right).\end{aligned}$$

Бараната најмала вредност се добива кога

$$\cos^2 x-\cos^4 x = u-u^2$$

прима најголема вредност. Но, најголемата вредност на $u-u^2$, според претходната задача 19, се добива за $u=\frac{1}{2}$ и притоа имаме дека најмалата вредност се добива за $\cos^2 x=\frac{1}{2}$. Според тоа, најмалата вредност за $\sin^6 x+\cos^6 x$ е $\frac{1}{4}$.

Бидејќи $\cos^2 x\geq\cos^4 x$, следува дека $1-3\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)\leq 1$. Од тоа што за $x=0$ добиваме точно 1, заклучуваме дека најголемата вредност е 1. ∎

Задача 21. *За која вредност на* α, $0\leq\alpha\leq\pi$, *изразот*

$$(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha+\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$$

има најголема вредност ?

Решение. Ако ставиме $x=\sin\alpha$, дадениот израз ја добива формата:

$$(1-x)\cdot(1+x+x^2)\cdot x = (1-x^3)\cdot x = x-x^4,$$

кој според задачата 19, има најголема вредност за $x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, и таа е еднаква на $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Значи, дадениот израз има најголема вредност $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ која се достигнува за аголот α, за кој $\sin\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. ∎

3.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Задача 1. *Дадена е равенката* $kx^2-(2k+1)x+k=0$ *каде што* $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$. *За кои вредности на* k:

а) корените на равенката се рационални броеви,

б) барем еден од корените на равенката е цел број.

Решение. а) За да решенијата на дадената равенка бидат рационални броеви, дискриминантата $D=(2k+1)^2-4k^2=4k+1$, мора да биде полн квадрат, т.е.

$$D=4k+1=a^2 \quad \Leftrightarrow \quad k=(a-1)(a+1)/4.$$

Бидејќи k е цел број, доволно е да се земе $a-1=2c$, $c\in\mathbb{Z}$, тогаш $k = 2c(2c+2)/4=c(c+1)$ и бидејќи $k\neq 0$ следува $c\neq 0$ и $c\neq -1$.

Значи, $c=1,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$. Навистина за $k=c(c+1)$

$$D = 4k+1 = 4c^2+4c+1 = (2c+1)^2, \text{ па}$$

$$x_1 = \frac{2k+1+2c+1}{2k} = \frac{k+c+1}{k} = \frac{c(c+1)+(c+1)}{c(c+1)} = \frac{c+1}{c},$$

$$x_2 = \frac{2k+1-(2c+1)}{2k} = \frac{2k+1-2c-1}{2k} = \frac{k-c}{k} = \frac{c}{c+1}.$$

Значи, решенијата на дадената равенка се заемно реципрочни броеви $x_1=(c+1)/c$ **и** $x_2=c/(c+1)$, $c\neq 0$ **и** $c\neq -1$.

б) За секој $c\neq 0$ и за секој $c\neq -1$ ако броителот на решенијата x_1 или x_2 е парен број, именителот е непарен и обратно. Затоа, освен за $c=1$, кога $x_1=2$, решенијата на дадената равенка не може ни за една вредност $n\neq 1$ да бидат цели броеви. Значи, постои само една вредност на параметарот $k=2$, за која барем едно од решенијата е цел број $(k=2)$. ■

Задача 2. *Да се реши неравенката:*

$$\log_2\left[\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] < \log_{1/2}\left[\log_{1/3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] .$$

Решение. Да ја определиме дефиниционата област, т.е. да најдеме за кои x, $\frac{x-1}{x+1}>0$. По решавањето добиваме $x<-1$ или $x>1$. За $x<-1$, добиваме $\frac{x-1}{x+1}>1$, а за $x>1$ добиваме $\frac{x-1}{x+1}<1$ и тогаш $\log_2(\log_3(\frac{x-1}{x+1}))$ не е дефиниран. Значи, дефиниционата област е $x<-1$.

За да ја решиме неравенката ќе го користиме идентитетот

$$\log_{1/a}(1/x) = \log_a x ,$$

од кој што следува дека:

$$\log_{1/2}\left[\log_{1/3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = \log_2\left[\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]^{-1} ,$$

по што, дадената неравенка се трансформира во:

$$\log_2\left[\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] < \log_2\left[\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]^{-1} .$$

Тогаш:

$$\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < \left[\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]^{-1} .$$

Бидејќи за $x<-1$, важи $\frac{x-1}{x+1}>1$, следува дека $\log_3(\frac{x-1}{x+1})>0$. Множејќи го горното неравенство со $\log_3(\frac{x-1}{x+1})$ добиваме:

$$\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)^2<1 \iff \left|\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right|<1 \iff -1<\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<1$$

$$\iff \frac{1}{3} < \frac{x-1}{x+1} < 3 ,$$

т.е. добиваме дека $\frac{x-1}{x+1}>\frac{1}{3}$ и $\frac{x-1}{x+1}<3$. Кога ќе се решат последните неравенки и ќе се земе предвид дефиниционата област, за решение на неравенката се добива множеството $(-\infty,2)$. ■

Задача 3. *Да се реши равенката:*

$$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{a^5+1-x} = a + 1, \quad a\in\mathbb{R} .$$

Решение. Со воведување на смените: $x=u^5$ и $a^5+1-x=v^5$ се добива:

$$\begin{cases} u + v = a + 1 \\ u^5 + v^5 = a^5 +1 \end{cases} . \tag{1}$$

Од друга страна:

$$\begin{aligned} u^5+v^5 &= (u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4) \\ &= (u+v)^5 - 5uv\{(u+v)^3-3uv(u+v)\} - 10u^2v^2(u+v) \\ &= (a+1)^5 - 5uv\{(a+1)^3-3uv(a+1)\} - 10u^2v^2(a+1); \end{aligned}$$

$$a^5+1 = (a+1)^5-5uv(a+1)^3+5(uv)^2(a+1);$$

$$5(uv)^2(a+1) - 5uv(a+1)^3 + (a+1)^5 - a^5 - 1 = 0 \quad \text{и}$$

$$5(uv)^2(a+1) - 5uv(a+1)^3 + (a+1)^4 + (a+1)^3a + (a+1)^2a^2 + (a+1)a^3 + a^4 - 1 = 0 .$$

Според тоа,

$$5(a+1)\{(uv)^2-uv(a+1)^2\} + (a+1)\{(a+1)^3 + (a+1)^2a + (a+1)a^2 + a^3 + (a-1)(a^2+1)\} = 0 .$$

Ако $a\neq-1$, се добива:

$$5\{(uv)^2-uv(a+1)^2\} + \{a^3+3a^2+3a+1+a^3+2a^2+a+a^4+a^3+a^2+a^3+a^3+a-a^2-1\} = 0 ,$$

т.е.

$$5\{(uv)^2-uv(a+1)^2\} + (5a^3+5a^2+5a) = 0 ,$$

од што по делење со 5 се добива следнава квадратна равенка по uv,

$$(uv)^2 - (a+1)^2uv + a(a^2+a+1) = 0 .$$

Решенијата на оваа квадратна равенка се:

$$(uv)_1 = a^2+a+1 \quad \text{и} \quad (uv)_2 = a ,$$

од каде што се добиваат следниве системи равенки:

$$1) \begin{cases} u+v=a+1 \\ uv=a \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} u+v=a+1 \\ uv=a^2+a+1 \end{cases} .$$

Решенијата на системот 1) се: $u_1=a$, $u_2=1$, $v_1=1$ и $v_2=a$. За $a\neq-1$, решенија се $x_1=a^5$, $x_2=1$, додека за $a=-1$ решенија се сите реални броеви, бидејќи $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{-x} = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x} = 0$.

Од системот 2) се добива равенката:

$$u^2-(a+1)u+(a^2+a+1)=0$$

чија дискриминанта е:

$$D = a^2+2a+1-4a^2-4a-4 = -3a^2-2a-3 = -\{(a+1)^2+2a^2+2\} < 0.$$

Бидејќи дискриминантата $D<0$, системот 2) нема реални решенија. ∎

Задача 4. *Нека* $n = 3k+1$ *и*

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-1} + a_n + a_1 &= 0 \\ a_n + a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned} .$$

Да се покаже дека $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$.

Решение. По собирање на равенствата и делење со 3 се добива:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0.$$

Но, бидејќи $n = 3k+1$, следува дека:

$$(a_1+a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6)+\ldots+(a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1})+a_n = 0 ,$$

т.е. $a_n=0$.

Со циклично поместување се добива:

$$(a_n+a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+\ldots+(a_{n-4}+a_{n-3}+a_{n-2})+a_{n-1} = 0 ,$$

т.е. $a_{n-1}=0$.

Со продолжување на постапката се добива дека:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0 . \blacksquare$$

Задача 5. *Да се реши системот равенки:*

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + xz = 27 \end{cases} .$$

Решение. Јасно е дека $x\neq0$, $y\neq0$ и $z\neq0$. Од:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

следува дека $\dfrac{xy+yz+xz}{xyz} = 1$, односно $x\cdot y\cdot z = 27$. Тогаш, од $xy+yz+xz=27$ следува дека $27 + (x+y)z^2 = 27z$, од што со замената $x+y = 9-z$ се добива $27 + (9-z)z^2 = 27z$, т.е.

$$z^3- 9z^2+ 27z - 27 =0.$$

Според тоа $(z-3)^3 = 0$, т.е. $z=3$.

Понатаму, се добива:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x\cdot y=9 \end{cases} ,$$

од што следува дека $x = y = 3$.

Значи, системот има единствено решение $x=y=z=3$. ∎

Задача 6. *Во множество* $\mathbb{R}$ *да се реши равенката:*

$$x^2 + 6x\cdot sin(xy) +9 = 0 . \qquad (1)$$

Решение. Равенката (1) ја запишуваме во еквивалентната на неа равенка:

$$(x^2 + 3\cdot sin(xy))^2 +9\cdot cos^2(xy) = 0 . \qquad (2)$$

Но, бидејќи $a^2 \geq 0$ за секој реален број a, следува дека:

$$\begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0 \\ \cos(xy) = 0 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0 \\ \sin(xy) = \pm 1 \end{cases}.$$

Според тоа, добиваме два системи равенки:

$$\begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0 \\ \sin(xy) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

и

$$\begin{cases} x + 3\sin(xy) = 0 \\ \sin(xy) = -1 \end{cases}. \tag{4}$$

Од (3) наоѓаме: $x = -3$ и $x \cdot y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x_1 = -3$ и $y_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Од (4) наоѓаме: $x = 3$ и $x \cdot y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x_2 = 3$ и $y_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. ∎

Задача 7. *Да се определат сите реални решенија на системот:*

$$x_1 = \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$$

$$x_2 = \frac{2x_3^2}{1+x_3^2}$$

$$x_3 = \frac{2x_1^2}{1+x_1^2}.$$

Решение. Од $(a-1)^2 \geq 0$ следува дека $\frac{2a}{a^2+1} \leq 1$, од што заедно со тоа што $x_i \geq 0$, за $i=1,2,3$, следува дека:

$$x_1 = x_2 \cdot \frac{2x_2}{1+x_2^2} \leq x_2; \quad x_2 = x_3 \cdot \frac{2x_3}{1+x_3^2} \leq x_3; \quad \text{и} \quad x_3 = x_1 \cdot \frac{2x_1}{1+x_1^2} \leq x_1.$$

Според тоа, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_1$, па значи $x_1 = x_2 = x_3$. Со замената $x_2 = x_1$ во првата равенка добиваме:

$$x_1 = \frac{2x_1^{\,2}}{1+x_1^{\,2}} \quad , \quad \text{т.е.} \quad x_1^{\,3} - 2x_1^{\,2} + x_1 = 0 \; .$$

Значи, $x_i=0$, $i=1,2,3$ и $x_i=1$, $i=1,2,3$ се единствените реални решенија на дадениот систем. ∎

Задача 8. *Да се реши равенката*:

$$\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{1-x^2} = 2\sqrt[n]{(1-x)^2} \; .$$

Решение. Ставаме $1+x=u^n$ и $1-x=v^n$ и добиваме:

$$\begin{cases} u\ -uv-2v\ = 0 \\ u^n+v^n = 2 \end{cases} .$$

Од првата равенка на системот, решавајќи ја како квадратна равенка по u добиваме $u_1 = 2v$ и $u_2=-v$.

Со замена во втората равенка за $u_1=2v$ добиваме:

$$(2v)^n+v^n = 2 \; , \quad \text{односно} \quad v^n(1+2^n) = 2.$$

Значи, $x = 1-v^n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

Со замена во втората равенка за $u_1=-v$ добиваме:

$$(-v)^n+v^n = 2 \; , \quad \text{односно} \quad v^n(1+(-1)^n) = 2 \; .$$

Очигледно во овој случај решението зависи од парноста на n. За n непарен, $v^n \cdot 0 = 2$, што е противречност. За n парен добиваме $v^n = 1$, односно $x = 0$, кое не е решение на почетната равенка.

Значи, единствено решение на равенката е $x = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$. ∎

Задача 9. *Да се реши системот равенки:*

$$\begin{cases} z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \\ x^z = y^{8/3} \\ y^z = x^{2/3} \end{cases}$$

Решение. Од:

$$(x^z)^z = (y^{8/3})^z = (y^z)^{8/3} = (x^{2/3})^{8/3} = x^{16/9},$$

добиваме $z^2 = \frac{16}{9}$, односно $z_{1,2} = \pm\frac{4}{3}$.

Ако $z = -\frac{4}{3}$, тогаш со замена во првата равенка на системот добиваме $-\frac{4}{3} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}$, што не е можно.

Ако $z = \frac{4}{3}$, тогаш со замена во втората или третата равенка на системот добиваме $x=y^2$, па значи:

$$\sqrt[4]{y} + (\sqrt[4]{y})^2 = \frac{4}{3}.$$

Од последната равенка имаме:

$$\sqrt[4]{y} = \frac{-1 \pm \sqrt{19/3}}{2}, \quad \text{односно} \quad y_{1,2} = \left(\frac{-1\pm\sqrt{19/3}}{2}\right)^4.$$

Значи, решинија на дадениот систем се: (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_1), каде што:

$$x_{1,2} = \left(\frac{-1\pm\sqrt{19/3}}{2}\right)^8, \quad y_{1,2} = \left(\frac{-1\pm\sqrt{19/3}}{2}\right)^4 \quad \text{и} \quad z_1 = \frac{4}{3}. \blacksquare$$

Задача 10. *Нека* a, b∈ℤ. *Да се покаже дека ако системот:*

$$\begin{cases} y-2x-a = 0 \\ y^2-xy+x^2-b = 0 \end{cases}$$

има рационални корени, тогаш тие корени се целобројни.

Решение. Од првата равенка на системот имаме $x = \frac{y-a}{2}$.

Со замена во втората равенка и средување, добиваме:

$$9y^2 = 3(4b-a^2).$$

Ако $y=\frac{p}{q}$ за $q\neq1$ и НЗД$(p,q)=1$, тогаш $\frac{(3p)^2}{q^2} \in \mathbb{Z}$. Значи, $q|3p$, а бидејќи НЗД$(p,q)=1$, следува дека $q=3$, односно $y=\frac{p}{3}$. Ако замениме во $9y^2=3(4b-a^2)$, добиваме $p^2=3(4b-a^2)$. Но тоа значи дека $3|p^2$, односно $3|p$ што противречи на НЗД$(p,q)=1$. Значи, $q=1$, т.е. $y\in\mathbb{Z}$. Ако a е парен број, тогаш и y е парен број, па значи $x\in\mathbb{Z}$. Ако a е непарен број, тогаш и y е непарен, па пак $x\in\mathbb{Z}$. ∎

3.5.-ЗБИРОВИ

Задача 1. *Да се упрости збирот:*

$$S_n = 7+77+777+\ \dots\ +\underbrace{777\dots7}_{n}$$

Решение. Во овој случај ќе користиме:

$$1=(10-1)/9,\quad 11=(10^2-1)/9,\quad \dots\ ,\quad \underbrace{111\dots1}_{n}=(10^n-1)/9.$$

$$S_n = 7(1+11+111+\ \dots\ +\underbrace{111\dots1}_{n})$$

$$= 7\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\dots+\frac{10^n-1}{9}\right)$$

$$= \frac{7}{9}\,(10+10^2+\ \dots\ +10^n-n)$$

$$= \frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right\} = \frac{7}{81}\cdot\left\{10(10^n-1)-9n\right\}$$

$$S_n = 7(10^{n+1}-10-9n)/81. \ \blacksquare$$

Задача 2. *Ако* $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_i>0)$ е *аритметичка прогресија, тогаш:*

а) $$S_1 \equiv \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ \dots\ +\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

б) $$S_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Решение. Доказот ќе го изведеме со помош на математичка индукција.

а) Прво го проверуваме равенството под а) за $n=2$.

$$S_1(2) = \frac{1}{a_1a_2} = \frac{2-1}{a_1a_2} \;.$$

Да претпоставиме дека равенството под а) е точно за секој $k \le n$, за некој n, т.е. за секој $k \le n$,

$$S_1(k) \equiv \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{k-1}{a_1a_k} \;.$$

Тогаш:

$$S_1(n+1) = S_1(n) + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n-1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$= \frac{(n-1)a_{n+1} + a_1}{a_1a_na_{n+1}} = \frac{na_{n+1} - a_{n+1} + a_1}{a_1a_na_{n+1}}$$

$$= \frac{n(a_n+d) - (a_1+nd) + a_1}{a_1a_na_{n+1}} = \frac{(n+1)-1}{a_1a_{n+1}} \;,$$

од што со математичка индукција, следува дека равенството под а) е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) Проверуваме дали равенството под б) е точно за $n=2$.

$$S_2(2) = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} = \frac{2-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} \;.$$

Претпоставуваме дека равенството под б) е точно за некое n, т.е.

$$S_2(n) \equiv \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \;.$$

Тогаш:

$$S_2(n+1) = S_2(n) + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n}$$

$$= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_1 + (n-1)d - a_1} + \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d}$$

$$= \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{d} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}$$

$$= \frac{a_{n+1}-a_1}{d(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})} = \frac{a_1+nd-a_1}{d(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})} = \frac{(n+1)-1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}},$$

од што со математичка индукција, следува дека равенството под б) е точно за секој $n\in\mathbb{N}$. □

Забелешка. Во решавањето на оваа задача користени се меѓу другото и равенствата:

$$a_n = a_1+(n-1)d \quad \text{и} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b} = (b-a)/(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

II **Решение на б).** Доказот може да се изведе, користејќи дека $\sqrt{a}+\sqrt{b} = (b-a)/(\sqrt{b}-\sqrt{a})$ и дека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е аритметичка прогресија. Тогаш:

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{a_n-a_{n-1}} = \frac{a_n-a_1}{(a_n-a_{n-1})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}$$

$$= \frac{a_1+(n-1)d-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} = \frac{(n+1)-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}. \ ■$$

Задача 3. *На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати учествувале* n *шахисти и тоа секој играл со секого. Нека* a_i *и* b_i *го означуваат бројот на победи и бројот на загуби соодветно на* i*-тиот шахист. Докажи дека важи равенството:*

$$\sum_{1\le i\le n} a_i^2 = \sum_{1\le i\le n} b_i^2.$$

Решение. Од условот на задачата лесно се гледа дека $a_i+b_i = n-1$ и $\sum_{1\le i\le n} a_i = \sum_{1\le i\le n} b_i$. Од овде се добива дека:

$$\sum_{1\le i\le n} a_i^2 - \sum_{1\le i\le n} b_i^2 = \sum_{1\le i\le n} (a_i-b_i)(a_i+b_i)$$

$$= (n-1)\left\{ \sum_{1\le i\le n} a_i - \sum_{1\le i\le n} b_i \right\} = 0 \,. \blacksquare$$

Задача 4. *Дадени се броевите* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$. *Нека* S_i *е збирот на сите производи од по* i *различни броеви меѓу дадените* $n-1$ *броеви. Докажи дека:*

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = \frac{n-1}{2} \,.$$

Решение. Да го разгледаме полиномот:

$$p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{3}\right)\cdot \dots \cdot\left(x + \frac{1}{n}\right) .$$

Тој може да се запише како:

$$p(x) = x^{n-1} + S_1x^{n-2} + S_2x^{n-3} + \dots + S_{n-1} \,.$$

Заменувајќи $x=1$ во овие две равенства добиваме:

$p(1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot \dots \cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$ и $p(1) = 1+S_1+S_2+ \dots +S_{n-1}$,

па од овде е $S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$.$\blacksquare$

Задача 5. *Да се покаже, дека производот:*

$$P=(1+2)\cdot(3+4+5)\cdot(6+7+8+9)\cdot \dots \cdot\left(\frac{n(n+1)}{2} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)$$

од n *множители, е еднаков на:*

$$\frac{(n!)^3(n+1)^2(n+2)}{2^{n+1}} \,.$$

Решение. Да забележиме дека првиот собирок во k-тата заграда е $\frac{k(k+1)}{2}$, а бројот на собироците изнесува $k+1$.

Според тоа, бројот во k-тата заграда е еднаков на:

$$(k+1)\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{2} \,,$$

од каде што следува дека бараниот производ е:

$$P = \frac{1(1+1)(1+2)}{2}\cdot\frac{2(2+1)(2+2)}{2}\cdot\frac{3(3+1)(3+2)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{2},$$

т.е.

$$P = \frac{n!\,(n+1)!\,\frac{(n+2)!}{2}}{2^n} = \frac{n!\,n!\,(n+1)n!\,(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{(n!)^3(n+1)^2(n+2)}{2^{n+1}}\ . \ \blacksquare$$

Задача 6. *Да го означиме со* a_n *целиот број кој е најблиску до* $\sqrt{n}$. *Да се најде сумата:*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{1980}}\ .$$

Решение. Секој од броевите $k=1,2,3,\ldots$ во низата $\{a_n\}$ се појавува $2k$-пати, бидејќи условот $a_n=k$ е еквивалентен со условот

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}, \quad \text{односно} \quad k^2-k < n \le k^2+k.$$

Собирците во бараниот збир ги групираме на следниов начин:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_{44\cdot 43+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{44\cdot 45}}\right)\ .$$

Бидејќи секоја од сумите во заградите е еднаква на:

$$2k\cdot\frac{1}{k} = 2,$$

следува дека бараниот збир е еднаков на $44\cdot 2 = 88$. ■

Задача 7. *Нека за низата* $\{x_n\}$ *важи:*

(i) $x_n > 0$ *и* $x_{n+1} < x_n$, *за секој* $n\ge 1$ *и*

(ii) $x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{(n^2)}}{n} \le 1$, *за секој* $n\ge 1$.

Да се покаже дека за секој $n\ge 1$ *важи:*

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \le 3\ .$$

Решение. Да ги разгледаме интервалите на низата броеви $\frac{x_m}{m}$, за кои $k^2 \le m \le (k+1)^2-1$, $k=1,2,\ldots$. Притоа k-тиот интервал се состои од $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ броеви од $\frac{x_{(k^2)}}{k^2}$ до $\frac{x_{((k+1)^2)-1}}{(k+1)^2-1}$. Ако секоj член $\frac{x_m}{m}$ во k-тиот интервал го замениме со наjголемиот прв член на интервалот, а тоа е $\frac{x_{(k^2)}}{k^2}$ добиваме дека сумата на членовите на низата од k-тиот интервал не е поголема од:

$$\frac{(2k+1)}{k^2}\, x_{k^2} \le \frac{3k\cdot x_{(k^2)}}{k^2} = \frac{3\cdot x_{(k^2)}}{k} \,.$$

Но за секоj $n \in \mathbb{N}$ постои наjмал природен броj m со особина $m^2 > n$. За вака определениот $m \in \mathbb{N}$ важи:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n} \le 3\left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{m^2}}{m}\right) \le 3 \,. \blacksquare$$

Задача 8. *Нека* $i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}$, *нека* $i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_n$ *и нека*

$$2^{(-i_1)} + 2^{(-i_2)} + \ldots + 2^{(-i_n)} = 1 \,.$$

Да се докаже дека постои k *(*$1\le k\le n$*)* *така што:*

$$2^{(-i_1)} + 2^{(-i_2)} + \ldots + 2^{(-i_k)} = \frac{1}{2} \,.$$

Решение. Со математичка индукциjа по n. Забележуваме дека $n>1$. Ако $n=2$, од $2^{(-i_1)} + 2^{(-i_2)} = 1$, следува дека $i_1 = i_2$, па тврдењето е точно. Претпоставуваме дека тврдењето важи за сите броеви n помали од $m \in \mathbb{N}$. Нека е:

$$2^{(-i_1)} + 2^{(-i_2)} + \ldots + 2^{(-i_m)} = 1 \quad \text{за} \quad 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_m.$$

Тогаш, по множење со 2^{i_m}, се добива:

$$2^{(i_m-i_1)}+2^{(i_m-i_2)}+\dots+2^{(i_m-i_k)}+2^{(i_m-i_{k+1})}+\dots+1=2^{(i_m)}.$$

Нека $k\le m$ е природен број за кој: $i_{k+1}=i_{k+2}=\dots=i_m$ и $i_j<i_m$, за $j\le k$. Последните $n-k$ собирци се, значи, единици и нив ги има парен број, бидејќи во спротивно левата страна би била непарен број, а десната парен. Претходното равенство го запишуваме како:

$$2^{(i_m-i_1)}+2^{(i_m-i_2)}+\dots+2^{(i_m-i_k)}+\underbrace{2+2+\dots+2}_{(m-k)/2}=2^{(i_m)},$$

од што по делење со $2^{(-i_m)}$ се добива:

$$2^{(-i_1)}+2^{(-i_2)}+\dots+2^{(-i_k)}+\underbrace{2^{(1-i_m)}+\dots+2^{(1-i_m)}}_{(m-k)/2}=1.$$

Бидејќи бројот на собирците е $k+(m-k)/2=(m+k)/2<m$, можеме да ја примениме индуктивната претпоставка:

$$2^{(-i_1)}+2^{(-i_2)}+\dots+2^{(-i_j)}=\frac{1}{2},$$

за некое j. Ако $j>k$, соодветните собирци можеме повторно да ги реконструираме преку $i_{k+1},\dots,i_m$. Со тоа тврдењето е докажано. ∎

Задача 9. *Да се најде збирот:*

$$S=1+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx,\quad n\ge 1.$$

Решение. Ако $x=2k\pi$, тогаш $S=n+1$. Затоа нека $n\ne 2k\pi$.

Знаеме дека:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

Нека $\alpha=\frac{x}{2}$ и $\beta=kx$. Тогаш:

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right].$$

Значи:

$$S\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx)$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos x + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{(2n+1)x}{2}\right] = \sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}\ .$$

Значи, $S = \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, за $n\geq 1$. ∎

Задача 10. *Да се докаже дека:*

$$S= \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x\neq k\pi.$$

Решение. Нека $x\neq k\pi$. Ако се искористи дека:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

за $\alpha =\frac{x}{2}$, $\beta = kx$, добиваме дека:

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}\right].$$

Тогаш:

$$S\cdot\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)$$

$$= \sin\frac{x}{2}\cdot\sin x + \sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x + \ldots + \sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \ldots + \cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right] = \sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\ .$$

Значи, $S = \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, за $n\geq 1$. ∎

Задача 11. *Да се најде:*

$$S = tgx + \frac{1}{2}tg\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot tg\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot tg\frac{x}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Решение. Од тоа што:

$$tg\alpha = ctg\alpha - 2\,\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha} = ctg\alpha - 2ctg2\alpha,$$

следува:

$$tgx = ctgx - 2ctg2x\ ,$$

$$\frac{1}{2}tg\frac{x}{2} = \frac{1}{2}ctg\frac{x}{2} - ctgx\ ,$$

$$\frac{1}{4}tg\frac{x}{4} = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{4} - \frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}\ ,$$

$$\frac{1}{2^3}\cdot tg\frac{x}{2^3} = \frac{1}{2^3}\cdot ctg\frac{x}{2^3} - \frac{1}{2^2}\cdot ctg\frac{x}{2^2},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{2^n}\cdot tg\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cdot ctg\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cdot ctg\frac{x}{2^{n-1}}.$$

Ако ги собереме претходните равенства добиваме:

$$S = -2ctg2x + \frac{1}{2^n}\cdot ctg\frac{x}{2^n}. \ ■$$

Задача 12. *Да се најде*:

$$S = \frac{1}{sin2x} + \frac{1}{sin4x} + \ldots + \frac{1}{sin2^nx}\ .$$

Решение. Ако се искористи равенството:

$$\frac{1}{sin2\alpha} = \frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{2sin\alpha\cdot cos\alpha} = \frac{2cos^2\alpha-cos2\alpha}{2sin\alpha\cdot cos\alpha} = ctg\alpha - ctg2\alpha$$

се добива:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{sin2x} + \frac{1}{sin4x} + \ldots + \frac{1}{sin2^nx} \\ &= ctgx - ctg2x + ctg2x - ctg4x + \ldots \\ &\qquad + ctg2^{n-1}x - ctg2^nx \\ &= ctgx - ctg2^nx. \ ■ \end{aligned}$$

Задача 13. *Да се најдат:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \sin kx \quad \text{и} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \cos kx .$$

Решение. I **начин.**

$$S_n \cdot \cos x + T_n \cdot \sin x = \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \sin kx \cdot \cos x + \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \cos kx \cdot \sin x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot (\sin kx \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{k+1} \cdot \sin(k+1)x$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left[S_n - a \cdot \sin x + a^{n+1} \cdot \sin(n+1)x \right] ,$$

односно:

$$S_n(a \cdot \cos x - 1) + a \cdot \sin x \cdot T_n = a^{n+1} \cdot \sin(n+1)x - a \cdot \sin x.$$

Слично, добиваме:

$$-a \cdot \sin x \cdot S_n + (a \cdot \cos x - 1)T_n = a^{n+1} \cdot \cos(n+1)x - a \cdot \cos x.$$

Од последните две равенства добиваме:

$$S_n = \frac{a^{n+2} \cdot \sin nx - a^{n+1} \cdot \sin(n+1)x + a \cdot \sin x}{a^2 - 2a \cdot \cos x + 1} ,$$

$$T_n = \frac{a^{n+2} \cdot \cos nx - a^{n+1} \cdot \cos(n+1)x + a \cdot \cos x - a^2}{a^2 - 2a \cdot \cos x + 1} .$$

II **начин.** Ставаме $z = \cos x + i \cdot \sin x$, и добиваме:

$$S_n + i \cdot T_n = az + (az)^2 + \ldots + (az)^n = \frac{az - (az)^{n+1}}{1 - az}$$

$$= \frac{a \cdot \cos x + a \cdot i \cdot \sin x - a^{n+1} \cdot \sin(n+1)x - a^{n+1} \cdot \cos(n+1)x}{1 - a \cdot \cos x - a \cdot i \cdot \sin x}$$

$$= U + i \cdot V.$$

Потоа наоѓаме: $U = T_n$ и $V = S_n$. ■

Задача 14. *Да се покаже дека ако* $x+\frac{1}{x} = 2\cdot\cos\alpha$, *тогаш:*

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cdot\cos n\alpha\ .$$

Решение. Од $x+\frac{1}{x} = 2\cdot\cos\alpha$ имаме $x^2-2x\cdot\cos\alpha+1 = 0$, па:

$$x = \cos\alpha \pm i\cdot\sin\alpha. \qquad (1)$$

Од (1) имаме:

$$x^n = (\cos\alpha \pm i\cdot\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\cdot\sin n\alpha\ ,$$

а бидеjќи

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha \pm i\cdot\sin\alpha} = \cos\alpha \mp i\cdot\sin\alpha\ ,$$

добиваме:

$$\frac{1}{x^n} = (\cos\alpha \mp i\cdot\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \mp i\cdot\sin n\alpha\ .$$

Според тоа:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = (\cos n\alpha \pm i\cdot\sin n\alpha)+(\cos n\alpha \mp i\cdot\sin n\alpha) = 2\cos n\alpha. \ \blacksquare$$

Задача 15. *Да се пресмета:*

$$C = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}\ .$$

Решение. Нека

$$S = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

и $z = \cos x + i\cdot\sin x$. Очигледно дека:

$$C + i\cdot S = 1 + \frac{z}{\cos x} + \frac{z^2}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{z^n}{\cos^n x}$$

$$= \frac{(z/\cos x)^{n+1}-1}{z/\cos x - 1} = \frac{z^{n+1} - \cos^{n+1}x}{z\cos^n x - \cos^{n+1}x}$$

$$= \frac{z^{n+1} - \cos^{n+1}x}{i\cdot\cos^n x\cdot\sin x}$$

$$= \frac{\cos(n+1)x - \cos^{n+1}x + i\cdot\sin(n+1)x}{i\cdot\cos^n x\cdot\sin x}$$

и одовде е $C = \dfrac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\cdot\sin x}$. ∎

Задача 16. *Да се докаже, дека за секој* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2} .$$

Решение. Да ја разгледаме равенката $z^{2n+1}-1 = 0$ чии корени се:

$$z_k = \cos\frac{(k-1)2\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{(k-1)2\pi}{2n+1} , \quad k=1,\ 2,\dots,2n+1 .$$

Бидејќи $p=1$ не се дели со $2n+1$, за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$z_1^p + z_2^p + z_3^p + \dots + z_{2n+1}^p = 0 .$$

Според тоа,

$$1 + \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \dots$$
$$+ \left(\cos\frac{4n\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right) = 0 ,$$

т.е.

$$\left(1 + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right) +$$
$$+ i\left(\sin\frac{2\pi}{2n+1} + \sin\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right) = 0.$$

Значи, секој од изразите во заградите е еднаков на нула, а од тоа следува дека:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{4n\pi}{2n+1} = -1.$$

Но, $\cos\frac{2\pi}{2n+1} = \cos\frac{4n\pi}{2n+1}$, $\cos\frac{4\pi}{2n+1} = \cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}$, итн, па значи:

$$2\left[\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right] = -1,$$

т.е.

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2} . \ ∎$$

Задача 17. *Нека* $S_p = \sum_{k=1}^{n} z_k^p$ *е сумата од* p-*тите степени* $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ *на корените* $z_1, z_2 \dots z_n$ *на равенката* $z^n=1$. *Да се покаже, дека:*

$$S_p = n, \quad \textit{ако } p \textit{ се дели со } n \quad \textit{и}$$

$$S_p = 0, \quad \textit{ако } p \textit{ не се дели со } n\ .$$

Решение. Знаеме дека:

$$z_k = \cos\frac{(k-1)2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{(k-1)2\pi}{n}\ , \quad k= 1,2,\dots,n\ ,$$

односно дека:

$$z_k = u^{k-1}, \quad \text{каде што} \quad u = \cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ .$$

Тогаш:

$$S_p = z_1^p + z_2^p + \dots + z_n^p = 1+u^p+u^{2p}+\dots+u^{(n-1)p}\ . \tag{1}$$

Ако p се дели со n, да означиме $\frac{p}{n} = m$. Притоа имаме:

$$u^p = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)^p = \cos\frac{2\pi p}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi p}{n}$$
$$= \cos 2\pi m + i\cdot\sin 2\pi m = 1 + i\cdot 0 = 1$$

и од (1) следува дека $S_p = 1 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} = n$.

Нека p не се дели со n. Бидејќи:

$$u^{np} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{np} = \cos\frac{np2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{np2\pi}{n}$$
$$= \cos 2\pi p + i\cdot\sin 2\pi p = 1 + i\cdot 0 = 1$$

и бидејќи $u^p-1 \neq 0$, добиваме:

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + \dots + u^{(n-1)p}$$
$$= \frac{(u^p)^n-1}{n^p-1} = \frac{u^{pn}-1}{n^p-1} = 0.\ \blacksquare$$

Задача 18. *Докажи дека за секој природен број* n, *важи:*

$$\cos nx = a_0(\cos x)^n + a_1(\cos x)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\cos x + a_n\ ,$$

каде што $a_0=2^{n-1}$ *и* $a_1,\dots,a_{n-1}$ *се некои цели броеви.*

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на математичка индукција по n. За $n=1$ тврдењето е очигледно, а за $n=2$ добиваме $\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x-1$, па тврдењето важи и за $n=2$. Нека тврдењето е точно за $n = k-1$ и нека е $n = k$. Тогаш равенството:

$$\cos(k+1)x = 2\cdot\cos x\cdot\cos kx - \cos(k-1)x$$

покажува дека $\cos(k+1)x$ е полином со цели коефициенти по $\cos x$ со степен $k+1$, и коефициентот пред највисокиот степен е 2^k, со што задачата е решена. ∎

Задача 19. *Да се докаже дека* $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n \neq 1$ *за секој* $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ставаме $z = \frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot i$, и нека α е таков агол што $z = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$. Ако е $z^n=1$ за некој природен број n, тогаш $1 = z^n = \cos n\alpha + i\cdot\sin n\alpha$, па $\cos n\alpha-1 = 0$. Одовде и од претходната задача произлегува дека $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ е корен на полином од n-ти степен со најстар коефициент 2^{n-1}, т.е.:

$$2^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n + a_1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \dots + a_n - 1 = 0.$$

Ако ова равенство го помножиме со 5^{n-1} добиваме дека $2^{n-1}\cdot 3^n/5 \in \mathbb{Z}$, што е контрадикција и со тоа задачата е решена. ∎

4. ГЕОМЕТРИЈА

4.1. РАМНИНСКА ГЕОМЕТРИЈА

Задача 1. *Нека* a, b *и* c *се страни на триаголник. Да се докаже дека*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

Кога важи равенството?

Решение. Следниве неравенства:

$$b+c-a>0, \quad c+a-b>0 \quad \text{и} \quad a+b-c>0$$

важат бидејќи a, b и c се страни на некој триаголник. Од овде се добива:

$$(b-c)^2(b+c-a) \ge 0, \quad (c-a)^2(c+a-b) \ge 0, \quad (a-b)^2(a+b-c) \ge 0.$$

Со собирање на овие неравенства се добива:

$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(c+a-b)-2c^2(a+b-c) \ge 0,$$

т.е.

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

Притоа, равенството важи ако и само ако $a=b=c$. ∎

Задача 2. *Ако* a, b *и* c *се страни на триаголник, да се докаже дека:*

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) > a^4+b^4+c^4.$$

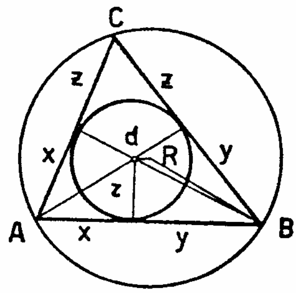
Решение. За страните a, b и c на произволен триаголник исполнети се неравенствата $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ и $a+b+c>0$. Според тоа:

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c) > 0 \iff$$
$$\iff (a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2) > 0$$
$$\iff (a^2-b^2-c^2+2bc)(2bc+b^2+c^2-a^2) > 0$$
$$\iff (2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2 > 0$$
$$\iff 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) > a^4+b^4+c^4 . \quad \blacksquare$$

Задача 3. *Нека* α, β *и* γ *се агли на триаголник. Да се докаже дека:*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8} .$$

Решение. Нека r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружна линија на триаголникот соодветно. Ставаме: $P=\dfrac{a+b+c}{2}$ и $P=x+y+z$, при што $x=P-a$, $y=P-b$ и $z=P-c$. Нека S е плоштината на триаголникот.



Цртеж 1.

Тогаш $S=P\cdot r$ и:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x} = \frac{r}{P-a} = \frac{S}{P(P-a)} = \sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)}{P^2(P-a)^2}} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P(P-a)}}.$$

Аналогно се добива:

$$tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{P(P-b)}} \quad и \quad tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{P(P-c)}} .$$

Од друга страна, $S = \frac{1}{2}bc\cdot sin\alpha = bc\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Значи,

$$bc\cdot cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{S}{tg\frac{\alpha}{2}} = P(P-a), \quad односно \quad cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P(P-a)}{bc}} .$$

Аналогно се добива:

$$cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{P(P-b)}{ac}} \quad и \quad cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{P(P-c)}{ba}} .$$

Значи,

$$sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}} , \quad sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{ac}} \quad и$$

$$sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-a)}{ba}} .$$

Од друга страна, имаме:

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} = \frac{S^3}{P^3(P-a)(P-b)(P-c)} = \frac{S\cdot S^2}{P^2S^2} = \frac{S}{P^2} = \frac{r}{P} , \qquad (1)$$

и

$$cos\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\beta}{2}\cdot cos\frac{\gamma}{2} = \frac{PS}{abc} . \qquad (2)$$

Но $sin\gamma = \frac{c}{2R}$, па затоа $R = \frac{c}{2sin\gamma} = \frac{abc}{2absin\gamma} = \frac{abc}{4S}$.

Значи,

$$cos\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\beta}{2}\cdot cos\frac{\gamma}{2} = \frac{P}{4R} . \qquad (3)$$

Од (1) и (3) следува $sin\frac{\alpha}{2}\cdot sin\frac{\beta}{2}\cdot sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}$ и ако се искористи дека за растојанието помеѓу центрите на опишаната и впишаната кружница d, важи $d^2=R^2-2rR\geq 0$, следува дека $R\geq 2r$, односно

$$sin\frac{\alpha}{2}\cdot\ sin\frac{\beta}{2}\cdot\ sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8} \quad . ■$$

Задача 4. *Аглите* α *и* β *на еден триаголник ја задоволуваат релацијата:*

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}.$$

Да се докаже дека триаголникот е рамностран.

Решение. Ако во равенството $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}$ ги замениме равенствата

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{и} \quad \cos(\alpha+\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-1,$$

добиваме:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2},$$

односно

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Последното равенство го запишуваме во обликот:

$$\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0,$$

од што добиваме $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ и $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$. Според тоа, $\alpha-\beta=0$ и $2\cos\alpha = 1$. Значи, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, т.е. триаголникот е рамностран. ∎

Задача 5. *Да се докаже дека* α *и* β *се остри агли на правоаголен триаголник ако и само ако*

$$\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta} = tg\,\alpha.$$

Решение. Нека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Тогаш $\cos\alpha=\sin\beta$ и $\sin\alpha=\cos\beta$, па затоа имаме $\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = tg\alpha$.

Нека е исполнето равенството $\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta} = tg\alpha$. Ќе докажема дека α и β се остри агли на правоаголен триаголник.

Од

$$\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad \text{и} \quad \sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

имаме:

$$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\sin\frac{\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}}{2} ,$$

и

$$\sin\beta + \cos\alpha = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\cos\frac{\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}}{2} ,$$

односно $tg\alpha = tg\frac{\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}}{2}$. Значи, $\alpha = \frac{\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}}{2}$, од што следува дека $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Значи, триаголникот е правоаголен. ■

Задача 6. *Нека* a, b *и* c *се страни на триаголник такви што* a+c=2b. *Тогаш:*

$$ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\gamma}{2} = 2ctg\frac{\beta}{2} .$$

Решение. Од a+c = 2b = b+b следува дека b−a=c−b. Од синусната теорема имаме $b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a$ и $c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$. Со замена на a и b во b−a = c− b добиваме:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a-a = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a ,$$

односно:

$$\sin\beta - \sin\alpha = \sin\gamma - \sin\beta .$$

Според тоа,

$$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{2} = 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2} ,$$

односно:

$$\left(\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \left(\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ако поделиме со $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$, добиваме:

$$ctg\frac{\alpha}{2} - ctg\frac{\beta}{2} = ctg\frac{\beta}{2} - ctg\frac{\gamma}{2} \quad \text{т.е.} \quad ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\gamma}{2} = 2ctg\frac{\beta}{2} . \; ■$$

Задача 7. *Ако* α, β *и* γ *се агли на триаголник, тогаш:*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 1.$$

Решение. Користејќи ги равенствата

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ ; \quad \cos x = -\cos(\pi-x) \quad \text{и}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$

добиваме:

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cdot\left[\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\right]\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha + \cos 2\beta\right]\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2\cos^2\beta + \frac{1}{2} = 1\ . \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Задача 8. *Во рамнината се дадени две конечни дисјунктни множества* A *и* B. *Докажи дека постои полигон таков што точките на множеството* A *се во неговата внатрешност, а точките на множеството* B *се надвор од полигонот.*

Решение. Избираме права p која не е паралелна со која било права одредена со пар точки од $A\cup B$. Во рамнината поставуваме координатен систем така што y-оската е паралелна со правата p. Да ја разгледаме проекцијата на множеството $A\cup B$ врз x-оската. Тоа множество може да се покрие со интервал (a,b), така што $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ и интервалите (x_i,x_{i+1}), $0\le i\le n-1$ ги содржат проекциите на точките кои наизменично припаѓаат во A и во B. Проекцијата на множеството $A\cup B$ на y-оската може да се покрие со интервал (c,d). Конструираме полигон кој ги раздвојува точките на множеството A од точките на множеството B, спојувајќи ги точките со координати $(x_0,c-1)$, (x_0,d), (x_1,d), (x_1,c), (x_2,c), (x_2,d), $\ldots$, $(x_n,c-1)$, $(x_0,c-1)$. ■

Задача 9. *Нека* a, b *и* c *се страни на еден триаголник. Да се докажат неравенствата:*

а) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$,

б) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-4abc < a^3+b^3+c^3$.

Решение. Од косинусната теорема добиваме:

$$a(b-c)^2 = a(b^2+c^2-2bc) = a(b^2+c^2-2bc\cdot \cos\alpha+2bc\cdot \cos\alpha-2bc)$$

$$= a^3-2abc(1-\cos\alpha) = a^3-4abc\cdot \sin^2(\alpha/2).$$

Аналогно важи:

$$b(c-a)^2 = b^3-4abc\cdot \sin^2(\beta/2) \quad \text{и}$$

$$c(a-b)^2 = c^3-4abc\cdot \sin^2(\gamma/2) \; .$$

Од овде се добива:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc =$$

$$= a^3+b^3+c^3+4abc\{1-\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(\beta/2)-\sin^2(\gamma/2)\}.$$

Потоа користејќи дека $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = \pi/2$, лесно се покажува дека:

$$\sin^2(\alpha/2)+\sin^2(\beta/2)+\sin^2(\gamma/2) =$$

$$= 1 - 2\cdot \sin(\alpha/2)\cdot \sin(\beta/2)\cdot \sin(\gamma/2),$$

и освен тоа $0 < \sin(\alpha/2), \sin(\beta/2), \sin(\gamma/2) < 1$. Затоа:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc =$$

$$= a^3+b^3+c^3+8abc\cdot \sin(\alpha/2)\cdot \sin(\beta/2)\cdot \sin(\gamma/2)$$

$$> a^3+b^3+c^3,$$

и

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-4abc =$$

$$= a^3+b^3+c^3-8abc\cdot \{1-\sin(\alpha/2)\cdot \sin(\beta/2)\cdot \sin(\gamma/2)\}$$

$$< a^3+b^3+c^3. \blacksquare$$

Задача 10. *Нека* t_a, t_b *и* t_c *се тежишните линии, а* a, b *и* c *се страните на некој триаголник. Да се докаже неравенството:*

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{5}{4}\cdot(ab+bc+ca) .$$

Решение. Од ΔABD имаме $t_a < \frac{b+c}{2}$. Според тоа, важи:

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c. \qquad (1)$$

Со квадрирање на (1) добиваме:

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2+2(t_a t_b+t_b t_c+t_c t_a) < a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

Од друга страна, познато е

дека $t_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, па

затоа:

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Со замена во (2) добиваме:

$$t_a t_b+t_b t_c+t_c t_a < \frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2) + (ab + bc + ca) . \qquad (3)$$

Исто така, важи:

$$a^2+b^2+c^2 - 2(ab+bc+ca) = a(a-b-c)+b(b-a-c)+c(c-a-b) < 0 ,$$

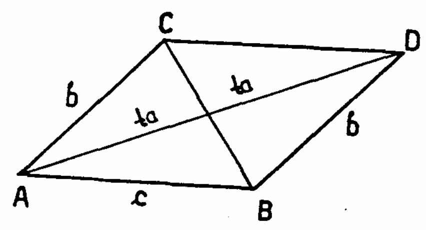
т.е.

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca) .$$

Со замена во (3) добиваме:

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{5}{4}\cdot(ab + bc + ca). \blacksquare$$

Цртеж 1.

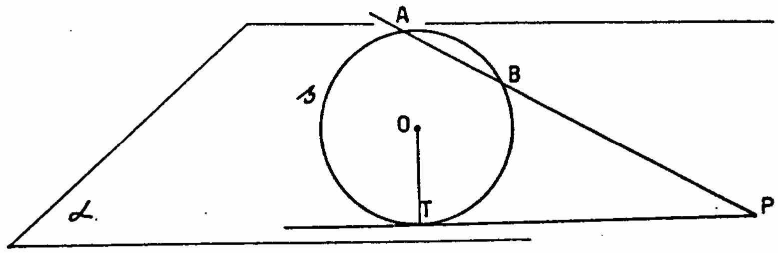


4.2. ПРОСТОРНА ГЕОМЕТРИЈА - ГЕОМЕТРИСКИ МЕСТА

Задача 1. *Дадени се две точки A и B и рамнина α која не минува низ A и B. Ги разгледуваме сите сфери кои минуваат низ A и B и ја допираат рамнината α. Да се определи геометриското место на допирните точки на сферите со рамнината и геометриското место на центрите на сферите.*

Решение. Ако A и B се наоѓаат од различни страни на рамнината α, тогаш и двете геометриски места на точки се празни множества. Затоа да претпоставиме дека A и B се наоѓаат од иста страна на рамнината α.

Да претпоставиме дека правата AB не е паралелна со рамнината α. Нека $\{P\} = AB \cap \alpha$, а S нека е произволна сфера која минува низ A и B и ја допира рамнината α. Допирната точка да ја означиме со T.



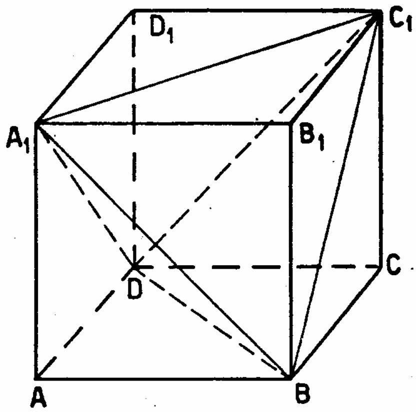
Цртеж 1.

Правата PT ја допира сферата во точка T и затоа важи $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT}^2$. Но $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ = const., па затоа геометриското место на допирните точки T ќе биде кружницата $k(P,\overline{PT})$. Центрите на сите тие кружници лежат на кружниот цилиндар кој се проектира врз кружницата k, а од друга страна, пак, тие лежат и на симетричната рамнина определена со точките A и B, бидејќи $\overline{OA}=\overline{OB}$. Затоа геометриското место на центрите на кружниците претставува елипса.

Да претпоставиме дека правата AB е паралелна со рамнината α. Очигледно е дека геометриското место на допирните точки на сферите со рамнината α е права која е пресек на α и симетричната рамнина определена со точките A и B. Со помош на аналитичка геометрија може да се покаже дека геометриското место на центрите на кружниците е парабола која лежи во симетричната рамнина определена со точките A и B. ∎

Задача 2. *Дадени се правилен тетраедар со раб* a *и правилна четиристрана пирамида на која сите рабови се еднакви на* a. *Да се исечат двете тела, така што од добиените делови да може да се состави коцка.*

Решение. Волуменот на добиената коцка мора да биде еднаков на збирот од волумените на двете пирамиди и така се добива дека коцката ќе има раб $a=\sqrt{2}/2$. Забележуваме дека ако $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е коцка со раб $a=\sqrt{2}/2$, тогаш A_1BC_1D е правилен тетраедар со раб a, а од останатите четири пирамиди $ABDA_1$, $BDCC_1$, $B_1BA_1C_1$ и $D_1A_1DC_1$ може да се состави правилна четиристрана пирамида на која сите рабови се еднакви на a. Затоа дадената четиристрана пирамида треба да се пресече со две рамнини кои минуваат низ дијагоналите на



Цртеж 1.

основата и низ висината, а потоа добиените четири парчиња да се "налепат" на страните од тетраедарот. ■

Задача 3. *Околу тетраедар* ABCD *е опишана сфера. Точката* P *е произволна внатрешна точка за тетраедарот. Нека* A_1, B_1, C_1 *и* D_1. *се пресечните точки на правите* AP, BP, CP *и* DP *со сферата, различни од* A, B, C *и* D *соодветно. Да се најде геометриското место на точки* P *за кои:*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PA_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PB_1}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}} + \frac{\overline{DP}}{\overline{PD_1}} = 4.$$

Решение. Нека O е центар на сферата, а R нејзиниот радиус. Знаеме дека:

$$\overline{AP}\cdot\overline{PA_1} = \overline{BP}\cdot\overline{PB_1} = \overline{CP}\cdot\overline{PC_1} = \overline{DP}\cdot\overline{PD_1} = R^2-\overline{OP}^2$$

и тоа е всушност степенот на точката P во однос на сферата.

Затоа бараме геометриско место на точки P за кои:

$$\frac{\overline{AP}^2}{\overline{PA_1}\cdot\overline{AP}} + \frac{\overline{BP}^2}{\overline{PB_1}\cdot\overline{BP}} + \frac{\overline{CP}^2}{\overline{PC_1}\cdot\overline{CP}} = \frac{\overline{DP}^2}{\overline{PD_1}\cdot\overline{DP}} = 4 \text{ ,} \qquad \text{т.е.}$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 = \overline{4R}^2 - 4\cdot\overline{OP}^2 \text{ .}$$

Нека G е тежиштето на тетраедарот ABCD. Тогаш:

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2 = \vec{PA}\cdot\vec{PA}+\vec{PB}\cdot\vec{PB}+\vec{PC}\cdot\vec{PC}+\vec{PD}\cdot\vec{PD}$$

$$= (\vec{PG}+\vec{GA})^2+(\vec{PG}+\vec{GB})^2+(\vec{PG}+\vec{GC})^2+(\vec{PG}+\vec{GD})^2$$

$$= 4\cdot\overline{PG}^2+\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GD}^2+2\cdot\vec{PG}\cdot(\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD})$$

$$= 4\cdot\overline{PG}^2+\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GD}^2.$$

Специјално, ставајќи во ова равенство $P=O$ се добива:

$$4\cdot R^2 = 4\cdot\overline{OG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 .$$

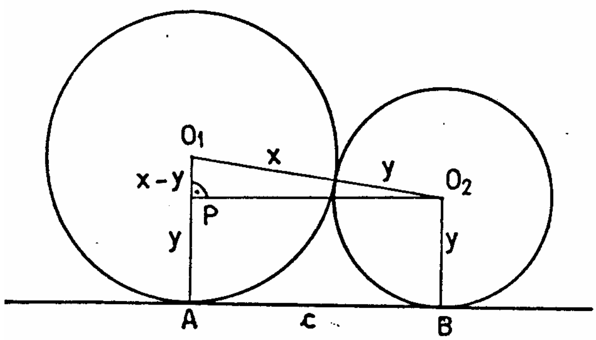
Со одземање на последните две равенства се добива:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2 - 4R^2 = 4\cdot\overline{PG}^2 - 4\cdot\overline{OG}^2 .$$

Затоа бараме геометриско место на точки P за кои $\overline{PG}^2+\overline{OP}^2=\overline{OG}^2$, а тоа е сфера чиј дијаметар е отсечката $\overline{OG}$. ∎

Задача 4. *Да се конструираат три сфери, кои ќе минуваат соодветно низ темињата на даден* ΔABC*, ќе ја допираат рамнината* ρ *на* ΔABC*, и ќе се допираат помеѓу себе.*

Решение. Бидејќи сферите S_1, S_2 и S_3 треба да ја допираат ρ соодветно во A, B и C, центрите треба да им лежат на правите кои минуваат низ точките и се нормални на рамнината. Според тоа, за наоѓање на центрите доволно е да ги знаеме должините на радиусите на сферите, кои ги означуваме со x, y и z. Нека должините на страните на триаголникот се a, b и c.



Цртеж 1.

Од триаголникот PO_2O_1 (цртеж 1) следува дека:

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + c^2 , \quad \text{т.е.}$$

$$4xy = c^2 . \tag{1}$$

Аналогно добиваме:

$$4yz = a^2 \quad \text{и} \tag{2}$$

$$4zx = b^2 . \tag{3}$$

Со множење на (1) и (2) и заменување на (3) во производот се добива $4y^2b^2 = a^2c^2$, од каде што следува дека:

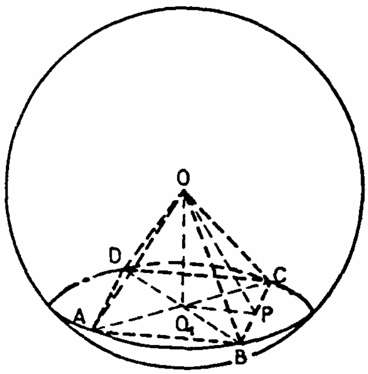
$$y = \frac{ac}{2b} .$$

Симетрично, се добива дека $x = \frac{bc}{2a}$ и $z = \frac{ab}{2c}$. ■

Задача 5. *Дадена е сфера со радиус* R *и позитивен број* p. *На какво растојание од центарот треба да поминува рамнина, така што плоштината на правилната четиристрана пирамида со врв во центарот на сферата и основа вписан квдрат во пресекот на рамнината со сферата, да е еднаква на* $4p^2$.

Решение. Нека $\overline{OO_1}=x$, $\overline{OC}=R$, $\overline{BC}=b$, $\overline{OP}=a$ (цртеж 1). За плоштината на пирамидата имаме:

$$P= 2ab+b^2 . \tag{1}$$



Цртеж 1.

Да ги изразиме b и a преку R и x. Од ΔO_1CO наоѓаме дека:

$$b = \sqrt{2(R^2-x^2)} .$$

Користејќи го овој израз за должината на основниот раб, од ΔPCO добиваме:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(R^2+x^2)} .$$

Со замена во (1) и по трансформирање на изразот добиваме:

$$x^4-(R^2-2p^2)x^2+2p^4-2p^2R^2=0\ . \qquad (2)$$

Корените на оваа равенка се:

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{2}(R^2-2p^2+\sqrt{R^4+4R^2p^2-4p^4}} \quad \text{и} \qquad (3)$$

$$x_2=\sqrt{\frac{1}{2}(R^2-2p^2-\sqrt{R^4+4R^2p^2-4p^4}}\ . \qquad (4)$$

Задачата нема решение, ако поткореновите величини се негативни, односно ако корените x_1^2 и x_2^2 на (2) се негативни. Од Виетовите правила тие корени се негативни, ако истовремено:

$$2p^4-2p^2R^2>0 \quad \text{и} \qquad (5)$$

$$R^2-2p^2<0\ . \qquad (6)$$

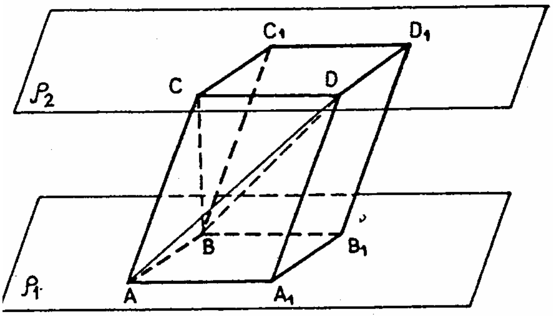
Но неравенството (5) важи кога $p^2-R^2>0$, т.е. кога $p-R>0$. Значи, $p>R$, а во овој случај важи и (6).

Според тоа, ако $p>R$, тогаш задачата нема решение. Ако $p<R$, тогаш корените на (2) имаат различни знаци, при што x_1^2 е позитивниот корен и задачата има едно решение. Значи, рамнината треба да се постави на растојание x_1 даден со (3). ■

Задача 6. *Во рамнина* ρ_1 *лежи отсечка* $\overline{AB}$, *а во паралелна на неа рамнина* ρ_2 *лежи отсечка* $\overline{CD}$. *Точките* A, B, C *и* D *се темиња на тетраедар. Да се докаже дека волуменот на тетраедарот не се менува, ако* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *се поместуваат, во* ρ_1 *и* ρ_2 *соодветно, паралелно на една своја положба.*

Решение. Во рамнината ρ_1 конструираме паралелограм AA_1B_1B чија една страна е $\overline{AB}$, а другите $\overline{AA_1}=\overline{CD}$ и $\overline{AA_1}\parallel\overline{CD}$ (Цртеж 1). Во рамнината ρ_2 конструираме паралелограм CDD_1C_1, чија една страна е $\overline{CD}$, а другите $\overline{CC_1}=\overline{AB}$ и $\overline{CC_1} \parallel \overline{AB}$. Ако ги поврземе A со C, B со C_1, A_1 со D и B со D_1 добиваме паралелопипед $AA_1B_1BC_1CDD_1$.

Ако ΔABC се разгледува како основа на тетраедарот, тогаш со непосредна проверка се гледа дека волуменот V_1 на тетраедарот е $\frac{1}{6}$ од волуменот V_2 на паралелопипедот. Но, ако $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ се поместуваат, во ρ_1 и ρ_2 соодветно, паралелно на една своја положба, тогаш плоштината на основата AA_1B_1B и должината на висината (растојанието помеѓу ρ_1 и ρ_2) на паралелопипедот не се менуваат. Според тоа, .при дадените поместувања волуменот V_2 на паралелопипедот не се менува, а тоа значи дека и волуменот $V_1=\frac{1}{6}V_2$ на тетраедарот чии темиња се A, B, C и D не се менува. ■



Цртеж 1.

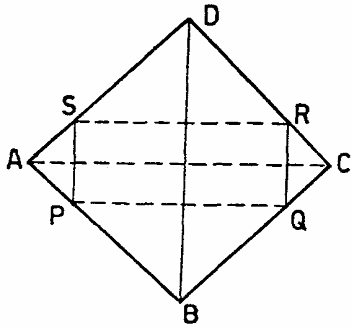
Задача 7. *Докажи дека ако правилен тетраедар се пресече со рамнината паралелна со произволни два разминувачки раба, тогаш:*

а) пресекот е правоаголник,

б) периметарот на добиениот пресек не зависи од положбата на пресечената пирамида.

Решение. Нека, на пример, пресечната рамнина е паралелна со AC и BD и нека ги сече рабовите AB, BC, CD и DA во точки P, Q, R и S соодветно.

а) Бидејќи пресечната рамнина е паралелна со BD, произлегува дека $PS \parallel BD$ и $RQ \parallel BD$, од каде следува $PS \parallel RQ$.



Цртеж 1.

Аналогно, користејќи дека пресечната рамнина е паралелна со AC се добива дека $PQ \parallel RS$. Значи, PQRS е паралелограм, и освен тоа пресекот е правоаголник бидејќи $AC \perp BD$.

б) Нека должината на секој од рабовите е a, и нека $\overline{AP} = ka$. Тогаш $\overline{SP} = ka$ бидејќи $\Delta APS \sim \Delta ABD$. Освен тоа, $\overline{BP} = (1-k)a$ и $\overline{PQ} = (1-k)a$ бидејќи $\Delta BPQ \sim \Delta BAC$. Затоа периметарот е:

$$L_{PQRS} = 2(\overline{SP}+\overline{PQ}) = 2a = const. \blacksquare$$

Задача 8. *Низ темето на тристран агол, за кој најмногу еден страничен агол е прав, повлечени се три прави, такви што секоја од нив е нормална на еден раб од аголот и лежи во страната која не го содржи тој раб. Да се докаже дека сите три прави лежат во една рамнина.*

Решение. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се вектори на правци на рабовите на тристраниот агол. Тогаш тие се ненулти, различни помеѓу себе, т.е. $\vec{a} \neq \vec{b} \neq \vec{c} \neq \vec{a}$, и барем два од скаларните производи $\alpha=\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\beta=\vec{c}\cdot\vec{a}$ и $\gamma=\vec{a}\cdot\vec{b}$ се различни од нула. Нека p_1, p_2 и p_3 се повлечените прави, со вектори на правци $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{t}$ соодветно. Тогаш, $\vec{r},\vec{s},\vec{t}$ се ненулти и $\vec{r} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$; $\vec{s} = \lambda_1\vec{b}+\mu_1\vec{c}$ и $\vec{t} = \lambda_2\vec{c}+\mu_2\vec{a}$, за некои λ, μ, λ_1, μ_1, λ_2 и μ_2 . Од условот на задачата следуваат следниве равенства:

$$\vec{r}\cdot\vec{c} = (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\vec{c} = \lambda\vec{a}\cdot\vec{c} + \mu\vec{b}\cdot\vec{c} = \lambda\beta + \mu\alpha = 0 ,$$

$$\vec{s}\cdot\vec{a} = (\lambda_1\vec{b} + \mu_1\vec{c})\cdot\vec{a} = \lambda_1\vec{b}\cdot\vec{a} + \mu_1\vec{c}\cdot\vec{a} = \lambda_1\gamma + \mu_1\beta = 0 \quad \text{и}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{b} = (\lambda_2\vec{c} + \mu_2\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda_2\vec{c}\cdot\vec{b} + \mu_2\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda_2\alpha + \mu_2\gamma = 0 .$$

Без губење на општост, може да се претпостави дека $\alpha\neq 0\neq\beta$. Тогаш:

$$(\lambda_1\mu_2)\vec{r} + \left[\frac{\lambda\mu_2\beta}{\alpha}\right]\vec{s} - (\lambda\lambda_1)\vec{t} =$$

$$= (\lambda_1\mu_2\lambda-\lambda\lambda_1\mu_2)\vec{a} + \left[\mu\lambda_1\lambda_2 + \frac{\lambda_1\lambda\mu_2\beta}{\alpha}\right]\vec{b} + \left[\frac{\mu_1\lambda\mu_2\beta}{\alpha} - \lambda_2\lambda\lambda_1\right]\vec{c}$$

$$= \vec{0} + (\mu\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\mu_2\mu)\vec{b} + \left[\frac{\mu_1\lambda\mu_2\beta}{\alpha} + \frac{\mu_2\gamma\lambda\lambda_1}{\alpha}\right]\vec{c}$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \left[\frac{\mu_1\lambda\mu_2\beta}{\alpha} - \frac{\mu_2\lambda\mu_1\beta}{\alpha}\right]\vec{c} = \vec{0}\ .$$

Ако трите броеви $\lambda_1\mu_2$, $\lambda\mu_2\beta/\alpha$ и $\lambda\lambda_1$ се различни од нула, тогаш од горното равенство следува дека $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{t}$ се компланарни.

Бидејќи $\beta/\alpha\neq 0$, ако трите броеви $\lambda_1\mu_2$, $\lambda\mu_2\beta/\alpha$ и $\lambda\lambda_1$ се нули, тогаш барем два од броевите λ_1, μ_2 и λ ќе бидат нули. Ако $\lambda_1=\mu_2=0$, тогаш $\vec{s}$ и $\vec{t}$ се колинеарни, па $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{t}$ се компланарни. Ако $\lambda_1=\lambda=0$, тогаш тристраниот агол има два странични агли прави, што е спротивно со условот од задачата. Ако $\lambda=\mu_2=0$, тогаш $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{t}$ се компланарни со векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. се компланарни.

Горната дискусија покажа дека во секој случај векторите $\vec{r}$, $\vec{s}$ и $\vec{t}$ се компланарни, што значи дека правите p_1, p_2 и p_3 лежат во една рамнина . ∎

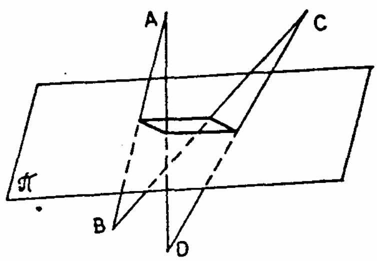
Задача 9. *Дадени се четири точки* A, B, C *и* D *во просторот. Да се конструира рамнина* Π *така што точките* A *и* C *се од едната, а* B *и* D *од другата страна на рамнината* Π *и растојанијата од точките до* Π *да бидат еднакви.*

Решение. Нека рамнината Π е таква што растојанијата од A, B, C и D до Π се еднакви. Тогаш Π мора да минува низ средините на отсечките AB, CB, AD и CD. Нека средините на AB, BC и CD не се колинеарни. Тогаш тие определуваат единствена рамнина и тоа нека е П'. За да П' биде бараната рамнина, треба да се докаже дека П' минува и низ средината на AD .

Бидејќи рамнината П' минува низ средината на отсечките AB, BC и CD имаме дека:

$$d_{AП'} = d_{BП'}\ ,\quad d_{BП'} = d_{CП'} \quad и \quad d_{CП'} = d_{DП'}\ .$$

Од овде следува дека $d_{AП'} = d_{DП'}$ па затоа рамнината П' минува и низ средината на отсечката AD.



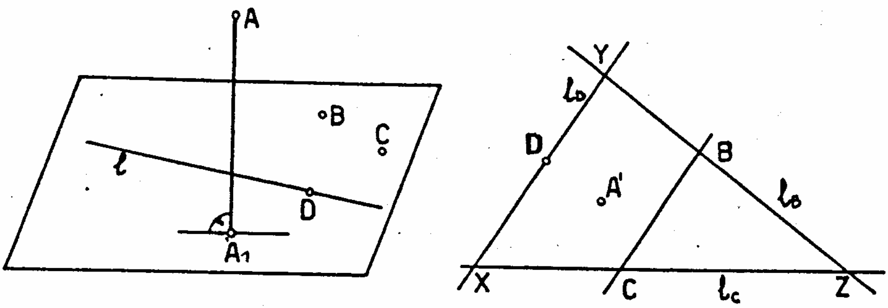
Цртеж 1.

Ако средините на AB, BC и CD се колинеарни, тогаш следува дека точките A, B, C и D се компланарни, па средините на AB, BC, CD и DA се колинеарни. Секоја рамнина што ја содржи правата определена со средините на отсечките AB, BC, CD и DA ги задоволува условите од задачата, т.е. е решение. Значи, во овој случај има безброј решенија. ∎

Задача 10. *Нека* E *е множество од* n *некомпланарни точки во просторот* (n≥4), *од кои ниедни три не се колинеарни. Да се докаже дека* E *содржи точки* A, B, C *и* D *такви што проекцијата од* A *на рамнината* BCD *е во триаголникот* XYZ *сличен на триаголникот* BCD *и чии средини на страните се точките* B, C *и* D *и притоа во пирамидата* AXYZ *нема други точки од* E.

Решение. Да ги разгледаме сите парови (A,P) каде што P е рамнина низ три точки од E, A е точка од E и A∉P. Бројот на ваквите парови е конечен ($\le n\cdot\binom{n-1}{3}$). Тогаш постои пар (A,P), така што растојанието од A до P е минимално.

Нека $B,C,D \in E\cap P$ и во ΔBCD нема други точки од E. Нека L е правата која минува низ D и е паралелна со BC. Ако A′ е во полурамнината од P определена со правата L во која не се B и C, тогаш растојанието од D до P_{ABC} е



Цртеж 1.

помало од растојанието од A′ до P_{ABC} но тоа е помало од растојанието од A до $P_{BCD} = P$, што е во противречност со минималноста на растојанието од A до P. Значи A′, е во полурамнината од P определена со правата L во која се наоѓаат B и C. Оваа дискусија е иста и за правата L′ низ C паралелна со BD и за правата L″ низ D паралелна со BC, од што следува дека A′ се наоѓа во триаголникот XYZ определен со правите L, L′ и L″. Од конструкциите на овие прави следува дека: B, C и D се средини на страните на триаголникот XYZ; триаголниците XYZ и BCD се слични; и во пирамидата AXYZ нема други точки од E. ■

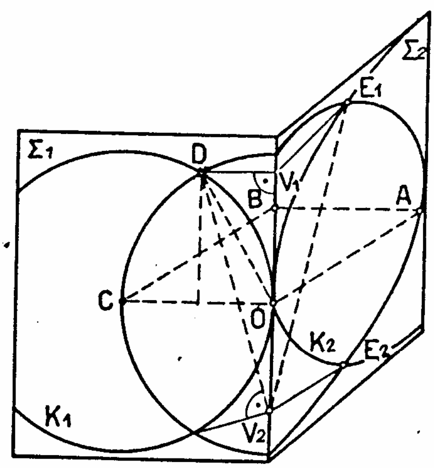
Задача 11. *Дали постои правилен, правоаголен* n*-аголник во простор, т.е.* n*-аголник со еднакви страни и прави агли* *меѓу соседните страни? Одговорот да се образложи.*

Решение. Правилен триаголник во простор е во исто време и правилен триаголник и во рамнина, а таков триаголник е рамностран, па не може да биде правоаголен.

Правилен, правоаголен четириаголник постои, а тоа е квадрат.

Следната дискусија покажува дека правилен, правоаголен петаголник не постои во простор.

Да претпоставиме дека таков петаголник постои. Нека тоа е петаголникот ABCDE. Должината на страните не е битна, па нека биде 1. Од својствата на петаголникот следува дека точките A, B и C се три темиња на квадрат ABCO со страна 1. Нека Σ е рамнината определена со квадратот ABCO, нека Σ_1 е рамнината која е нормална на Σ и минува низ OC, и нека Σ_2 е рамнината која е нормална на Σ и минува низ OA.



Цртеж 1

Од $DC \perp CB$ следува дека $D \in \Sigma_1$, додека од $AE \perp AB$

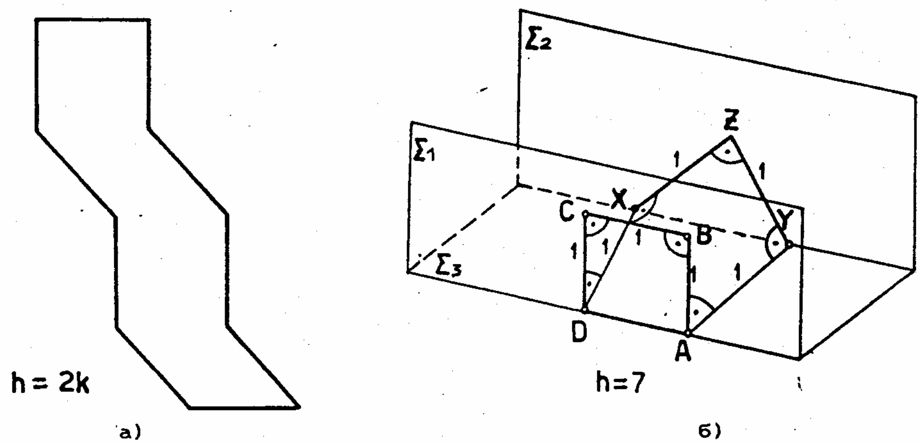
следува дека $E \in \Sigma_2$. Од $\overline{DC} = \overline{CB} = 1$ следува дека $D \in K_1$, каде што K_1 е кружница во Σ_1 со центар во C и радиус 1. Од условите на задачата, следува дека триаголникот EAD е правоголен со прав агол кај E, од што следува дека $\overline{AD} = \sqrt{2}$. Од друга страна, бидејќи триаголникот AOD е правоаголен со прав агол кај темето O, следува дека $\overline{OD} = 1$. Според тоа, $D \in K_1 \cap K_3$ каде што K_3 е кружница во Σ_1 со радиус 1 и центар O. На сличен начин се докажува дека $E \in K_2 \cap K_4$, каде што K_2 и K_4 се кружници во Σ_2 со радиус 1, K_2 со центар во A и K_4 со центар во O. Нека p е пресечната права $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ и нека V_1 и V_2 се двете точки од p на растојание $1/2$ од O. Нека D е над рамнината $OABC$. Има две можности за E: E_1 над и E_2 под рамнината $OABC$. Со директна пресметка се добива дека:

$$\overline{DE}_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 1;$$

$$\overline{DV}_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}/2 \quad \text{и}$$

$$\overline{DE}_2 = \sqrt{|\overline{DV}_2|^2 + |\overline{EV}_2|^2} = \sqrt{(\sqrt{13}/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{14}/2 \neq 1.$$

За секој $n \geq 6$, постои правилен, правоаголен n-аголник. Ако n е парен, т.е. $n=2(k+1)$, тогаш бараниот n-аголник се добива со отстранување на една страна од правилен, правоаголен $2k$-аголник и додавање на трите страни од квадрат нормален на отстранетата страна, како на цртеж 2. а). Оваа конструкција е како правење скали. Истото важи и за $n=2k+3$, за $k \geq 3$, при што правилен, правоаголен 7-аголник се конструира на следниот начин, како на цртеж 2. б). Нека $\Sigma_1 \perp \Sigma_3$. Нека $ABCD$ е квадрат во Σ_1, при што $A, D \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3$. Нека $ADXY$ е рамнокрак трапез во Σ_3 со основи $\overline{AD} = 1$ и $\overline{XY} = \sqrt{2}$.



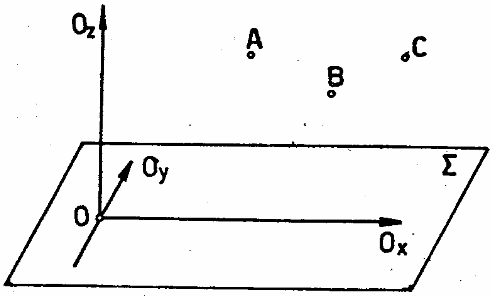
Цртеж 2

Нека Σ_2 е рамнина која минува низ $\overline{XY}$ и $\Sigma_1 \| \Sigma_2$, од што следува дека $\Sigma_2 \perp \Sigma_3$. Нека XYZ е правоаголен триаголник во Σ_2 со хипотенуза XY. Бараниот 7-агаолник е $ABCDXZY$. ■

Задача 12. *Дадена е рамнина* Σ *и три неколинеарни точки* A, B *и* C *од една страна на* Σ *(но не во рамнината* Σ *) такви што* Σ_{ABC} *и* Σ *не се паралелни. Во рамнината* Σ *се земени точки* A', B' *и* C'. *Точките* L, M *и* N *се средини на отсечките* AA', BB' *и* CC', *а* G *е тежиште на* ΔLMN *(не се разгледува случајот кога* L, M *и* N *се колинеарни). Да се најде геометриско место на точките* G, *кога* A', B' *и* C' *се произволни точки во рамнината* Σ .

Решение. Нека O е произволна точка во рамнината Σ . Нека Ox и Oy се две нормални прави во рамнината Σ и нека правата Oz е нормална на рамнината Σ . Во однос на така избраниот координатен систем $Oxyz$ точките A, B и C нека имаат координати:

$$A(x_1,y_1,2a),\qquad B(x_2,y_2,2b)\qquad \text{и}\qquad C(x_3,y_3,2c).$$



Цртеж 1.

Од правите a, b и c барем две се различни, бидејќи Σ_{ABC} и Σ не се паралелни. Тежиштето T на триаголникот ABC има координати:

$$T(S_1,S_2,S_3) = \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{2(a+b+c)}{3}\right].$$

Точките A′, B′, C′, L, M и N имаат координати:

$$A'(x_1',y_1',0),\qquad B'(x_2',y_2',0),\qquad C'(x_3',y_3',0),$$

$$L\left[\frac{x_1+x_1'}{2}, \frac{y_1+y_1'}{2}, a\right],\qquad M\left[\frac{x_2+x_2'}{2}, \frac{y_2+y_2'}{2}, b\right]\qquad \text{и}$$

$$N\left[\frac{x_3+x_3'}{2}, \frac{y_3+y_3'}{2}, c\right].$$

Тежиштето G на триаголникот LMN има координати:

$$G\left[\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{2\cdot 3}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{2\cdot 3}, \frac{a+b+c}{3}\right].$$

Нека S′ е тежиште на $\Delta A'B'C'$. Тогаш S′ има координати (S′,S′,0), а координатите на G се:

$$G\left[\frac{S_1+S_1'}{2}, \frac{S_2+S_2'}{2}, \frac{S_3+0}{2}\right].$$

Гледаме дека третата координата на G е еднаква на $S_3 = z = \dfrac{a+b+c}{3}$. Нека Σ_1 е рамнина која минува низ G и е паралелна со рамнината Σ. Тежиштетот G го дели растојанието меѓу S и S' на половина. Значи, бараното геометриско место е подмножество од рамнината Σ_1.

Ќе покажеме и дека секоја точка од Σ_1 е од бараното геометриско место на точки, со што ќе покажеме дека бараното геометриското место на точки е рамнината Σ_1.

Навистина, нека $G'\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{a+b+c}{3}\right)\in\Sigma_1$. Треба да покажеме дека постојат точки A', B' и C' од Σ со координати како погоре, за кои:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{6},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{6}.$$

Но тоа е можно, бидејќи за произволно избрани точки A' и B' можеме горните равенства да ги разгледаме како равенки по x_3' и y_3' кои се решаваат на едноставен начин. ∎

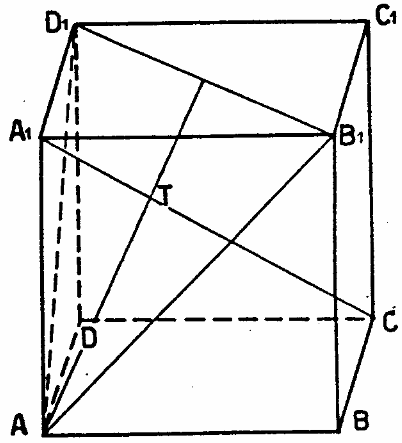
Задача 13. *Дадена е коцка* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Нека* A_1B_1, A_1A *и* A_1D_1 *се три рабa од коцката. Да се докаже дека:*

а) *Тежиштето* T *на триаголникот* AB_1D_1 *припаѓа на дијагоналата* A_1C *и* $\overline{A_1T}=\frac{1}{3}\cdot\overline{A_1C}$.

б) *Рамнината* AB_1D_1 *е нормална на* A_1C.

Решение. Ќе работиме со вектори користејќи го цртеж 1.

а) $$\overrightarrow{A_1T}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{2}{3}\cdot(\overrightarrow{A_1B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1})=\overrightarrow{A_1A}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB_1}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}$$
$$=\overrightarrow{A_1A}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{C_1D_1}$$
$$=\overrightarrow{A_1A}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A_1C}.$$



Цртеж 1.

б) $$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1T} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \;;$$

$$\overrightarrow{A_1T} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \qquad \text{и}$$

$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{A_1T} = \frac{2}{9}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A} + \frac{2}{9}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC} +$$

$$+ \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} +$$

$$+ \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$$

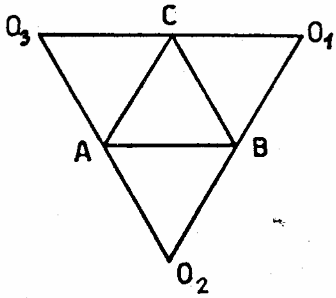
$$= -\frac{2}{9}\cdot a^2 + \frac{1}{9}\cdot a^2 + \frac{1}{9}\cdot a^2 = 0.$$

Слично се покажува дека и $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{A_1T} = 0$. Од овде следува дека $\overrightarrow{A_1T} \perp \overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{A_1T} \perp \overrightarrow{BT}$. Затоа $A_1T \perp \Sigma_{AB_1D_1}$. ■

4.3. ПРОСТОРНА ГЕОМЕТРИЈА - ПРЕСМЕТУВАЊА

Задача 1. *Основата на една пирамида е рамностран триаголник, а плоштините на околните страни се еднакви. Да се најде должината на работ при оонoвата ако се знае дека должините на два од околните раба се 7 и 9.*

Решение. Нека OABC е дадената пирамида. По услов на задачата $AB=BC=CA$ и $S_{OAB}=S_{OBC}=S_{OCA}$. Затоа $h_1=h_2=h_3$, каде што h_1, h_2 и h_3 се височините во ΔOBC, ΔOCA и ΔOAB соодветно. Нека r_1, r_2 и r_3 се проекциите на h_1, h_2 и h_3 врз основата. Тогаш $r_k=\sqrt{h_k^2-H^2}$ за $k\in\{1,2,3\}$, каде што H е височината на пирамидата. Затоа $r_1=r_2=r_3$, па проекцијата O′ на врвот O врз основата е центар на впишана кружница или центар на припишана кружница за ΔABC. Забележуваме дека O′ не е центар на впишана кружница за ΔABC, бидејќи во спротивно би добиле дека сите



Цртеж 1.

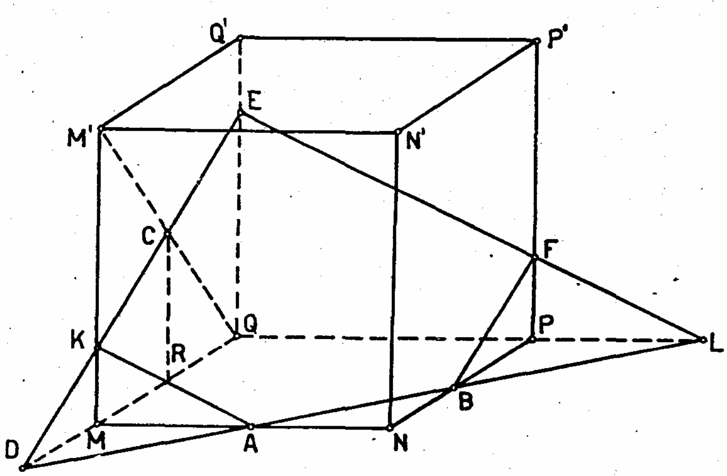
околни рабови се еднакви што противречи на условот на задачата. Затоа $O'=O_1$ или $O'=O_2$ или $O'=O_3$, каде O_1, O_2 и O_3 се такви точки за кои A, B и C се средини на отсечките O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2 соодветно. Не се губи од општоста ако се претпостави дека $O'=O_1$. Тогаш $\overline{OB}=\overline{OC}<\overline{OA}$, па мора да е $\overline{OB}=7$ и $\overline{OA}=9$. Нека $x=\overline{AB}$, тогаш $\overline{AO_1}=x\sqrt{3}$ и $\overline{BO_1}=x$. Од Питагоровата теорема добиваме:

$$7^2 = x^2 + H^2 \quad \text{и} \quad 9^2 =(\sqrt{3}x)^2 + H^2$$

и од овде се наоѓа $x=4$. ∎

Задача 2. *Дадена е коцка* $MNPQM'N'P'Q'$ *со рабови* MM', PP', QQ' *и* NN'. *Низ средините на рабовите* MN *и* NP *и низ центарот* C *на страната* $MQQ'M'$ *е повлечена рамнина. Да се најде односот на волумените на деловите на коцката, на кои е поделена рамнината .*

Решение. Пресекот е петаголникот $ABFEK$ прикажан на цртеж 1. Нека страната на коцката ја означиме со b. Од складноста на триаголниците $\Delta DAM\cong\Delta ANB\cong\Delta BPL$ следува дека $\overline{PL} = \overline{MD} = \frac{b}{2}$ и $\overline{QD} = \frac{3b}{2} = \overline{QL}$. Ако $CR\perp DQ$, тогаш $\Delta DEQ \sim \Delta DRC$.



Цртеж 1.

Според тоа, $\dfrac{\overline{QE}}{\overline{QD}} = \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RD}}$, т.е. $\overline{QE} = \dfrac{\overline{RC}\cdot\overline{QD}}{\overline{RD}} = \dfrac{3b}{4}$. Но и $\Delta DMK \sim \Delta DRC$, па затоа $\dfrac{\overline{KM}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{CR}}{\overline{RD}}$, т.е. $\overline{MK} = \dfrac{\overline{CR}\cdot\overline{MD}}{\overline{RD}} = \dfrac{b}{4}$.

Лесно се проверува дека $\overline{KM} = \overline{FP}$. Нека V е волуменот на коцката. Да го определиме волуменот V_1 на делот од коцката кој го содржи темето Q. Но $V_1 = V_2-(V_3+V_4)$, каде што V_2 е волуменот на пирамидата DLQE, а V_3 и V_4 се волумените на пирамидите DAMK и BLPF соодветно. Притоа:

$$V_2 = \frac{\overline{QE}\cdot\overline{QD}\cdot\overline{QL}}{6} = \frac{9b^3}{32} \quad \text{и} \quad V_3 = V_4 = \frac{\overline{KM}\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MD}}{6} = \frac{b^3}{96}.$$

Значи, $V_1 = \dfrac{25b^3}{96}$ и бараниот однос е $\dfrac{V}{V-V_1} = \dfrac{25}{71}$. ∎

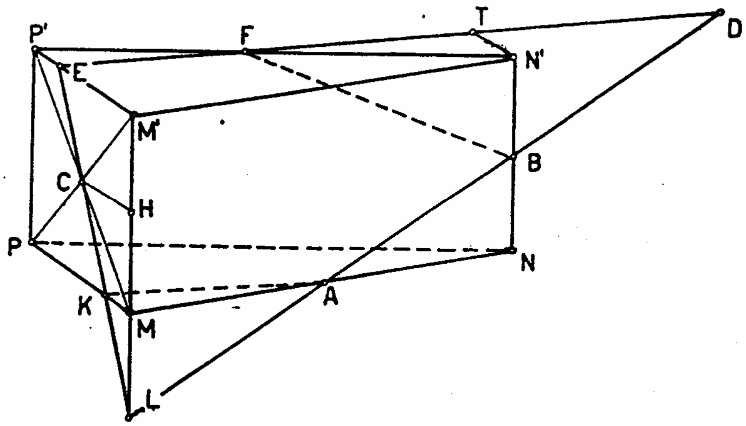
Задача 3. ***Дадена е правилна тристрана призма*** MNPM′N′P′ *со околни рабови* MM′, NN′ *и* PP′. ***Низ средините на*** MN, NN′ *и центарот на* ***страната*** MPP′M′ ***поминува рамнина. Да се најде*** *односот* ***на волумените на деловите од призмата*** *кои се* *определени со* ***дадената рамнина.***

Решение. Дадената рамнина α со рамнините MNN′M′, MPP′M′ и M′N′P′ ќе образува пирамида. Низ A и B повлекуваме права која со продолженијата на M′N′ и MM′ ќе се сече во точки D и L соодветно. Повлекуваме права p низ L и C и нека $p \cap PM = K$, $p \cap P'M' = E$.

Повлекуваме права q низ D и E и нека $q \cap P'N' = F$. Пресекот е петаголникот ABFEK. За познати величини ги сметаме должините b и h на основниот раб и висината на призмата. Тогаш волуменот на призмата е:

$$V = \frac{b^2\cdot h\cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Волуменот V_1 на делот од призмата во кој се наоѓа M′ е еднаков на разликата на волуменот V_2 на пирамидата $LM'DE$ и волумените V_3 и V_4 на пирамидите $LMAK$ и $BN'DF$.



Цртеж 1.

Но $V_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,\overline{EM'}\cdot\overline{M'D}\cdot sin60^o\cdot\overline{LM'}$.

Бидејќи $\overline{ML} = \overline{NB} = \frac{h}{2}$, добиваме $\overline{LM'} = 3\frac{h}{2}$ и $\overline{LH} = h$, каде CH е нормала на MM'. Но сега од сличноста на $\Delta EM'L$ со ΔCHL и ΔKML и на $\Delta DM'L$ со ΔAML наоѓаме:

$$\frac{\overline{EM'}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{LM'}}{\overline{LH}} \quad \text{и} \quad \overline{EM'} = \frac{\overline{CH}\cdot\overline{LM'}}{\overline{LH}} = \frac{3b}{4}\ ;$$

$$\frac{\overline{KM}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LH}} \quad \text{и} \quad \overline{KM} = \frac{\overline{CH}\cdot\overline{LN}}{\overline{LH}} = \frac{b}{4}\ ;$$

$$\frac{\overline{DM'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{LM'}}{\overline{LN}} \quad \text{и} \quad \overline{DM'} = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{LM'}}{\overline{LN}} = \frac{3b}{2}\ .$$

Според тоа: $V_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3b}{4}\cdot\frac{3b}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3h}{2} = \frac{9b^2\cdot h\cdot\sqrt{3}}{64}$.

За V_3 добиваме:

$$V_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\overline{KM}\cdot\overline{MA}\cdot sin60^o\cdot\overline{LM} = \frac{b^2\cdot h\cdot\sqrt{3}}{192}\ .$$

За да го определиме V_4 треба да го знаеме $\overline{FN'}$. Низ N' повлекуваме права $N'T$ паралелна на $M'E$. Од сличноста на

$\Delta EM'D$ со $\Delta TN'D$ и $\Delta FTN'$ со $\Delta FEP'$ наоѓаме:

$$\frac{\overline{EM'}}{\overline{TN'}} = \frac{\overline{DM'}}{\overline{DN'}}, \quad \text{т.е.} \quad \overline{TN'} = \frac{\overline{EM'} \cdot \overline{DN'}}{\overline{DM'}} = \frac{b}{4} \;;$$

$$\frac{\overline{FN'}}{\overline{FP'}} = \frac{\overline{TN'}}{\overline{EP'}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\overline{FN'}}{b-\overline{FN'}} = \frac{\frac{b}{4}}{b - \frac{3}{4}b}, \quad \text{т.е.} \quad \overline{FN'} = \frac{b}{2}.$$

Значи,

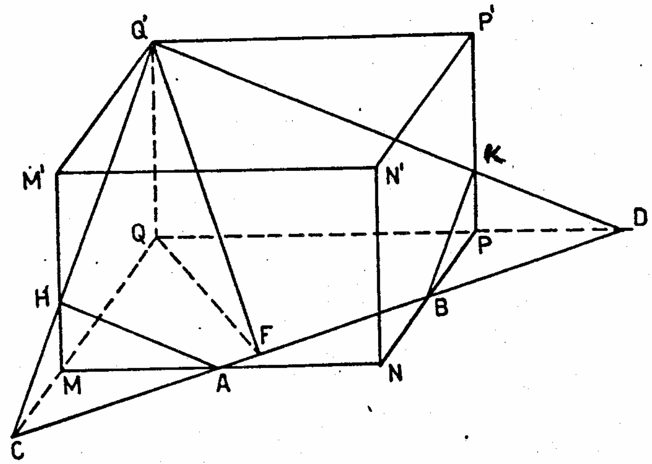
$$V_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{FN'}\cdot\overline{N'D}\cdot sin120^o\cdot\overline{BN'} = \frac{b^2\cdot h\cdot\sqrt{3}}{96}.$$

На крајот, $V_1 = V_2-(V_3+V_4) = \frac{b^2\cdot h\cdot\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}V$, што значи дека рамнината α ја дели призмата на два дела со еднакви волумени. ■

Задача 4. *Даден е правоаголен паралелопипед:* $MNPQM'N'P'Q'$ *со рабови* MM', NN', PP' *и* QQ'. *Должините на рабовите* $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ *и* $\overline{MM'}$ *се соодветно* 20cm, 15cm *и* 24cm. *Да се најде плоштината на пресекот на рамнината која минува низ средината на рабовите* MN, NP *и низ темето* Q'.

Решение. Пресекот е петаголникот $ABKQ'H$ прикажан на цртеж 1. Од складноста на триаголниците $\Delta CAM \cong \Delta ABN \cong \Delta BDP$, следува дека $\overline{BD} = \overline{CA} = \overline{AB} = \frac{\overline{MP}}{2} = 12,5$cm.

Бидејќи рамнината α низ точките A, B и Q' ги сече спротивните рамнини соодветно по правите HQ', BK, AH и KQ', овие прави се две по две паралелни, т.е. триаголниците ΔAHC и $\Delta BQ'C$, ΔBKD и $\Delta CQ'D$ се слични. Бидејќи $\overline{CA} = \overline{BD} = \frac{1}{3}\cdot\overline{CD}$ заклучуваме дека плоштината на секој од ΔAHC и ΔBKD е еднаква на $\frac{1}{9}$ од плоштината S_1 на триаголникот $\Delta CQD'$. Значи, плоштината на петаголникот $ABKQ'H$ е $S = \frac{7}{9}\cdot S_1$. Но бидејќи $Q'F\perp\overline{CD}$, следува дека $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{Q'F}$. Од друга страна, $\overline{QF} = \frac{3}{4}\cdot\overline{QN} = \frac{3}{4}\cdot25=18,75$cm; $\overline{CD}= 3\cdot\overline{CA} =3\cdot12,5=37,5$cm и $\overline{Q'F} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \overline{QQ'}^2} = \sqrt{18,75^2 + 24^2} = \sqrt{927,5625}$ cm.



Цртеж 1.

Според тоа,

$$S = \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot(37,5)\cdot\sqrt{927,5625} = \frac{87,5}{6}\cdot\sqrt{927,5625}\ \text{cm}^2. \blacksquare$$

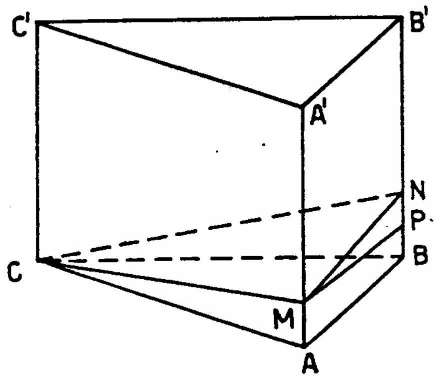
Задача 5. *Должините на основните рабови на права тристрана призма се соодветно* 6cm, 8cm *и* $4\sqrt{6}$cm. *Низ темето на најголемиот агол на основата поминува рамнина, чиј пресек со призмата е рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на пресекот.*

Решение. Нека $\overline{BC} = 8$cm, $\overline{AC} = 6$cm, $\overline{AB} = 4\sqrt{6}$cm, $\overline{MA}=x$ и $\overline{BN}=y$, (цртеж 1.). Бидејќи $\overline{MN}=\overline{NC}=\overline{MC}$, добиваме:

$$x^2+36=y^2+64=(y-x)^2+96,$$

од што го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 28 \\ 2xy - x^2 = 32 \end{cases}.$$



Цртеж 1.

Ако ставиме $\frac{y}{x} = z$, добиваме

$$\begin{cases} x^2 - x^2z^2 = 28 \\ 2x^2z - x^2 = 32. \end{cases}$$

Според тоа, $x^2 = \frac{32}{2z - 1}$, т.е. $\frac{1 - z^2}{2z - 1} = \frac{7}{8}$. Решенијата на последната равенка се:

$$z_1 = \frac{3}{4} \text{ и } z_2 = -\frac{5}{2}.$$

Но, од $x>0$ и $y>0$ следува дека $z>0$, па значи $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$.

Во натамошнта постапка го решаваме системот:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4} \cdot x \\ x^2 - y^2 = 28 \end{cases}$$

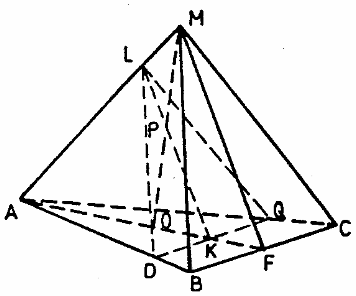
чие позитивно решение е $x = 8$, $y = 6$.

Од ΔAMC ја определуваме $\overline{CM}$ и добиваме $\overline{CM}^2 = 64 + 36$, т.е. $\overline{CM} = 10cm$. Според тоа плоштината на пресекот е:

$$S = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2, \quad \text{т.е.} \quad S = 25 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 . \blacksquare$$

Задача 6. *Плоштината на обвивката на правилна тристрана пирамида е еднаква на* $108cm^2$. *Низ средината на висината на пирамидата поминува рамнина, паралелна на една од околните страни. Да се пресмета плоштината на добиениот пресек.*

Решение. Нека P е средина на висината OM на пирамидата. Бидејќи рамнината α на пресекот е паралелна со рамнината β на страната BMC, пресеците на α и β со рамнината γ на ΔAFM ќе бидат паралелни. Според тоа пресекот на α и γ ќе го добиеме ако низ P повлечеме права паралелна на MF. Точките во кои оваа права ги сече правите AM и AF од рамнината γ ги



Цртеж 1.

означуваме со L и K. Сега низ K повлекуваме права паралелна на BC. Пресеците на оваа права со AC и AB ги означуваме со Q и D. Триаголникот ΔDQL е бараниот пресек на α со пирамидата. Бидејќи PK е средна линија на ΔOFM, добиваме дека:

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OF} = \frac{1}{6}\cdot\overline{AF}.$$

Според тоа, $\overline{AK} = \frac{5}{6}\cdot\overline{AF}$. Но $\Delta AKL \sim \Delta AFM$, па значи:

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AF}} = \frac{5}{6}, \quad \text{т.е.} \quad \overline{KL} = \frac{5}{6}\cdot\overline{FM}.$$

Исто така $\Delta DQL \sim \Delta BCM$, што значи дека:

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{FM}} = \frac{5}{6} \quad \text{т.е.} \quad \overline{DQ} = \frac{5}{6}\cdot\overline{BC}.$$

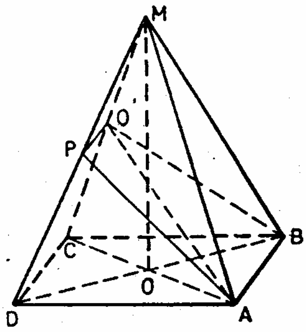
Според тоа,

$$\frac{P_{\Delta DQL}}{P_{\Delta BCM}} = \frac{25}{36}$$

и бидејќи $P_{\Delta BCM} = 36cm^2$, добиваме дека $P_{\Delta DQL} = 25cm^2$. ∎

Задача 7. *Дадена е правилна четиристрана пирамида* MABCD *со основа* ABCD. *Низ точките* A, B *и средината* Q *на работ* MC *е повлечена рамнина. Да се најде односот на волумените на деловите од пирамидата, на кои е поделена со дадената рамнина.*

Решение. Ќе го определиме волуменот на делот T_1 од пирамидата кој не ја содржи точката M. Ја соединуваме Q со четирите точки A, B, C и D. Тогаш T_1 се разложува на пирамидите QABCD и APQD чии волумени ќе ги означиме со V_1 и V_2.



Цртеж 1.

Бидејќи пирамидата QABCD има основа и висина еднакви на основата и половина од висината на дадената пирамида, добиваме дека $V_1 = \frac{1}{2}V$, каде V е волуменот на дадената пирамида. Плоштината на ΔPDQ е $\frac{1}{4}$ од плоштината на ΔCMD и затоа V_2 е $\frac{1}{4}$ од волуменот на пирамидата CDMA, односно од пирамидата ACDM. Според тоа, добиваме дека $V_2 = \frac{1}{8}\cdot V$.

Значи волуменот на делот T_1 изнесува $\frac{1}{2}\cdot V + \frac{1}{8}\cdot V = \frac{5}{8}\cdot V$, а волуменот на делот T_2 изнесува $\frac{3}{8}\cdot V$, па бараниот однос на волумените изнесува $3 : 5$. ■

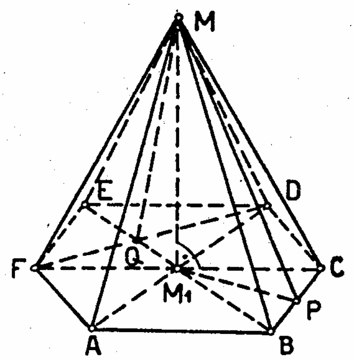
Задача 8. *Плоштината на правилна шестстрана пирамида е* $\frac{3}{2}\cdot m^2\cdot\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{2})$. *Дијагоналните пресеци на пирамидата имаат еднакви плоштини. Да се определи должината на радиусот на кружницата впишана во основата на пирамидата.*

Решение. Нека b и R се должините на основниот раб и радиусот на кружницата, впишана во основата. Притоа важи $R=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, што значи плоштината P_1 на пирамидата треба да се изрази преку b. Од условот на задачата имаме $P_{\Delta FCM} = P_{\Delta FDM}$, од што следува дека:

$$\overline{FC}\cdot\overline{MM_1} = \overline{FD}\cdot\overline{QM}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\overline{MM_1}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FC}}.$$

Но $\overline{FD} = \overline{FQ} + \overline{QD} = \frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3}$ и $\overline{FC} = 2b$, па значи

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{QM}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Цртеж 1.

Со замена $\overline{QM} = 2\cdot x$ се добива дека $\overline{MM_1} = x\cdot\sqrt{3}$ и $\overline{QM_1} = \sqrt{\overline{QM}^2 - \overline{MM_1}^2} = x$. Но од друга страна, FM_1DE е паралелограм, па значи:

$$\overline{QM_1} = \frac{\overline{EM_1}}{2} = \frac{b}{2}.$$

Според тоа:

$$x = \frac{b}{2} \quad \text{и} \quad \overline{MM_1} = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Од друга страна, $\overline{PM_1} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, па значи:

$$h = \overline{MP} = \sqrt{\overline{PM_1}^2 + \overline{MM_1}^2} = \sqrt{2\cdot\frac{3b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{6}}{2}.$$

Тогаш,

$P_1 = \dfrac{6bh}{2} + \dfrac{6b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3b^2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{2}$ и $P_1 = \dfrac{3}{2}\cdot m^2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}+1)$, од што следува дека $b = m$. Според тоа, $R = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$. ∎

Задача 9. *Дадена е пирамида со висина* h. *Како треба да се повлечат две рамнини, паралелни на рамнината на основата, така што должините на висините на определените тела – една пирамида* T_3 *и две пресечени пирамиди* T_1 *и* T_2 *заедно со волумените на овие тела да формираат последователни членови на аритметичка прогресија ?*

Решение. Нека $\overline{MO_1}=h$, $\overline{O_2O_3}=x$, $\overline{O_1O_2}=x-y$ и $\overline{O_3M}=x+y$. Од $\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3} + \overline{O_3M} = h$ следува дека $x = \dfrac{h}{3}$. Од зависноста меѓу волумените V_1, V_2, V_3 и V на телата T_1, T_2, T_3 и дадената пирамида и од тоа што тие се последователни членови на аритметичка прогресија, следува дека:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V \quad \text{и} \quad 2V_2 = V_1 + V_3.$$

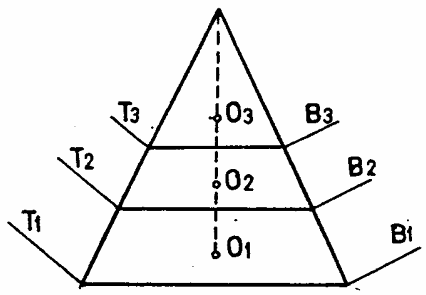
Од овие две равенства следува дека $V_2 = \frac{1}{3} \cdot V$. Ова равенство, заедно со:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h;$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (B_2 + B_3 + \sqrt{B_2 \cdot B_3})x \ ;$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{(2x+y)^2}{h^2} \quad \text{и}$$

$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{(x+y)^2}{h^2}$$



Цртеж 1.

повлекува дека:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{B_1(2x+y)^2}{h^2} + \frac{B_1(x+y)^2}{h^2} + \frac{B_1(2x+y)(x+y)}{h^2} \right] x.$$

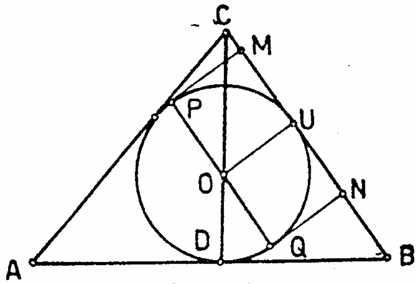
Со замена $x = \frac{h}{3}$ и по средување на изразот добиваме:

$$27y^2 + 27yh - 2h^2 = 0 \ .$$

Позитивниот корен на оваа равенка е $y = \frac{h}{18} \cdot \left(\sqrt{105} - 9 \right)$ и на крајот добиваме: $\overline{O_1O_2} = \frac{h}{18} \cdot \left(15 - \sqrt{105} \right)$, $\overline{O_2O_3} = \frac{h}{3}$ и $\overline{O_3M} = \frac{h}{18} \cdot \left(\sqrt{105} - 3 \right)$. ∎

Задача 10. *Околу сфера со радиус* R *е опишан конус. Растојанието од врвот на конусот до допирната рамнина на сферата, која е нормална на една од изводниците на конусот е* d. *Да се пресмета волуменот на конусот.*

Решение. Кон сферата има две допирни рамнини со дадената особина и допирните точки P и Q се на краевите на еден нејзин дијаметар. Да го разгледаме првиот случај, кога рамнината и сферата се допираат во точка P. Од условот на задачата следува дека $\overline{CM} = d$. Четириаголникот OUMP е квадрат со страна R. Но $\overline{CU} = d + R$.



Цртеж 1.

Тогаш $\overline{CD} = R + \sqrt{(d+R)^2 + R^2}$. Од сличноста на ΔDBC и ΔOUC добиваме дека $\overline{DB}:\overline{OU} = \overline{CD}:\overline{CU}$, односно

$$\overline{DB} = \frac{R\left(R + \sqrt{(d+R)^2 + R^2}\right)}{d+R}.$$

Според тоа,

$$V = \frac{\pi R^2\left(R + \sqrt{(d+R)^2 + R^2}\right)^3}{3(d+R)^2}.$$

За другата допирна рамнина аналогно наоѓаме:

$$\overline{CD} = R + \sqrt{(d-R)^2 + R^2}, \qquad \overline{DB} = \frac{R\left(R + \sqrt{(d+R)^2 + R^2}\right)}{(d-R)}$$

и

$$V = \frac{\pi R^2\left(R + \sqrt{(d+R)^2 + R^2}\right)^3}{3(d-R)^2}. \blacksquare$$

Задача 11. *Во конус се впишани две сфери со радиуси* R_1 *и* R_2. *Сферите надворешно се допираат. Да се пресмета:*

(а) Плоштината на обвивката на пресечениот конус, чии основи се круговите определени со допирните кружници на сферите со конусот и

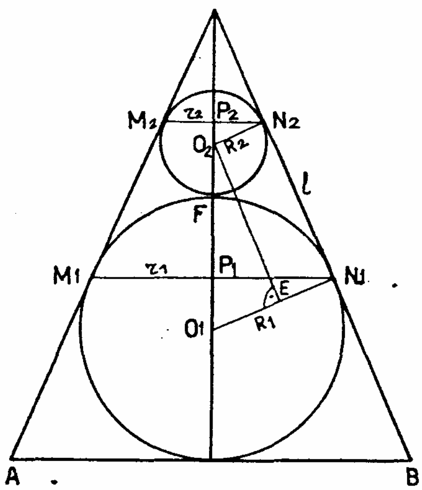
(б) Волуменот на делот од просторот ограничен од површините на сферите и конусот.

Решение. Со ознаките од цртеж 1, во триаголникот ΔEO_1O_2 имаме:

$$\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$$

$$\overline{EO_2} = \overline{N_1N_2} = L$$

$$\overline{EO_1} = R_1 - R_2 .$$



Цртеж 1

Значи,

$$L = \sqrt{(R_1+R_2)^2 - (R_1-R_2)^2} = 2\cdot\sqrt{R_1R_2}$$

Од сличноста на:

$$\Delta O_1N_1P_1 \quad \text{со} \quad \Delta O_1O_2E$$

и на:

$$\Delta O_2N_2P_2 \quad \text{со} \quad \Delta O_1O_2E ,$$

следува дека:

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{L}{R_1+R_2} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{R_2} = \frac{L}{R_1+R_2}, \quad \text{т.е.}$$

$$r_1 = \frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2} .$$

За плоштината на обвивката на дадениот пресечен конус добиваме:

$$O = 4\pi R_1R_2.$$

(б) Волуменот на делот од просторот ограничен од површините на сферите и конусот, е еднаков на разликата од волуменот на пресечениот конус и збирот на волумените на двата сферни сегменти. Но:

$$\overline{P_1F} = R_1 - \overline{O_1P_1} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - \left[\frac{2R_1\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}\right]^2} = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \quad \text{и}$$

$$\overline{P_2F} = R_2 - \overline{O_2P_2} = R_2 - \sqrt{R_2^2 - \left[\frac{2R_2\sqrt{R_1R_2}}{R_1+R_2}\right]^2} = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} .$$

Притоа:

$$V_1 + V_2 = \pi\cdot\overline{P_1F}^2\cdot(R_1 - \frac{1}{3}\,\overline{P_1F}) + \pi\cdot\overline{P_2F}^2\cdot(R_2 - \frac{1}{3}\,\overline{P_2F})$$

$$= \frac{4\pi R_1^2R_2^2}{3(R_1+R_2)^3}\cdot\left[3R_1^2 + 3R_2^2 + 2R_1R_2\right] .$$

Висината на пресечениот конус е:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1F} + \overline{P_2F} = \frac{4R_1R_2}{R_1+R_2} ,$$

а волуменот е

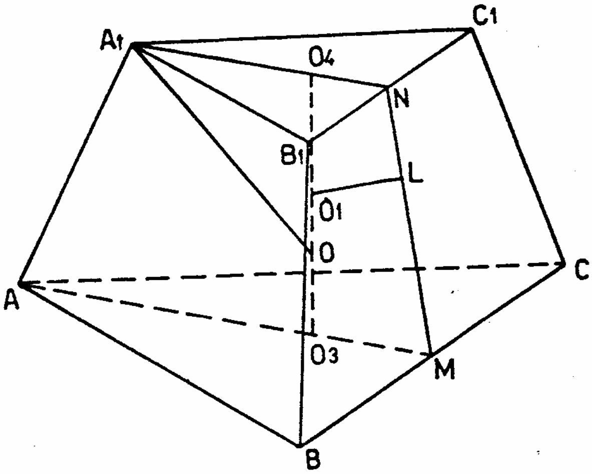
$$V = \frac{16\pi R_1^2R_2^2}{3(R_1+R_2)^2}\cdot\left[R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right] .$$

Според тоа,

$$V - (V_1 + V_2) = \frac{4\pi R_1^2R_2^2}{3(R_1+R_2)} . \blacksquare$$

Задача 12. *Во правилна тристрана пресечена пирамида средната линија на страната на обвивката има 20cm, а растојанието помеѓу центрите на опишаната и впишаната сфера е* $10\sqrt{3}$ cm *(претпоставено е дека внатре во пирамидата може да се впише сфера). Да се пресмета волуменот на пресечената пирамида.*

Решение. Нека $\overline{BC} = 20+x$ и $\overline{B_1C_1} = 20-x$ (цртеж 1). Тогаш:



Цртеж 1.

$$\overline{AO_3} = \frac{(20+x)\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{O_3M} = \frac{(20+x)\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{A_1O_4} = \frac{(20-x)\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{O_4N} = \frac{(20-x)\sqrt{3}}{6}\ .$$

Но O_3, L и O_4 се допирни точки на впишаната сфера, па затоа $\overline{O_3M} = \overline{LM}$ и $\overline{O_4N} = \overline{LN}$.

Според тоа:

$$\overline{NM} = \overline{ML} + \overline{LN} = \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3}\ ,$$

$$\overline{KM} = \overline{ML} - \overline{LN} = \frac{x\cdot\sqrt{3}}{3}\ ,$$

$$\overline{O_3O_4} = \overline{NK} = \sqrt{\overline{NM}^2 - \overline{KM}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{400 - x^2} \quad \text{и}$$

$$\overline{O_1O_3} = \overline{O_1O_4} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{400 - x^2}\ .$$

Правоаголните триаголници ΔAO_3O и ΔA_1O_4O имаат еднакви хипотенузи и затоа, $\overline{AO_3}^2 + \overline{O_3O}^2 = \overline{A_1O_4}^2 + \overline{O_4O}^2$ од што следува дека:

$$\left[\frac{(20+x)\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{400 - x^2} - 10\cdot\sqrt{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(20-x)\sqrt{3}}{3}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{400 - x^2} + 10\sqrt{3}\right]^2\ .$$

Позитивниот корен на оваа квадратна равенка по x е $x = 12$. Според тоа:

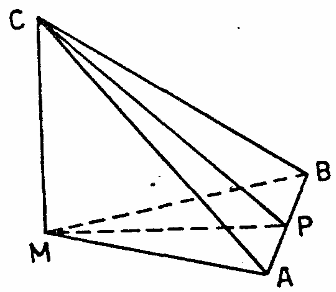
$\overline{BC} = 32\text{cm}$, $\overline{B_1C_1} = 8\text{cm}$, $\overline{O_4O_3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ и $V = 1792\text{cm}^3$. ■

Задача 13. *Плоштината на основата* ABC *на тристрана пирамида* MABC *е* $14cm^2$, *а должините на околните рабови се последователни членови на аритметичка прогресија со разлика* 2cm. *Околните страни на пирамидата се две по две нормални. Да се пресмета волуменот на пирамидата.*

Решение. Нека $\overline{MC} = x$, $\overline{MA} = x-2$, $\overline{MB} = x+2$ (цртеж 1).

Висината на ΔABC низ темето C да ја означиме со CP. Од условот на задачата имаме $CM \perp AB$ (околните страни на пирамидата се две по две нормални). Но, тогаш:

$AB \perp CM$ и $AB \perp CP$,



Цртеж 1

па значи AB е нормална на рамнината низ точките C, M и P, односно и на секоја права во оваа рамнина. Според тоа, $AB \perp MP$. Но, како и $MB \perp MA$ и $CM \perp MP$ добиваме:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x+2)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{2x^2+8} \;;$$

$$\overline{MP} = \frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{x^2-4}{\sqrt{2x^2+8}} \quad \text{и}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{2x^2+8} + x^2} = \sqrt{\frac{3x^4+16}{2x^2+8}} \;.$$

Плоштината на ΔABC е $14cm^2$, што значи:

$$14 = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CP}\;, \quad \text{т.е.} \quad 14 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2x^2+8}\cdot\sqrt{\frac{3x^4+16}{2x^2+8}}\;,$$

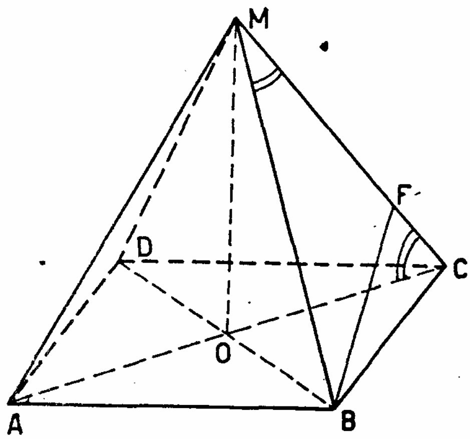
од каде што следува дека $3x^4 = 784-16$, т.е. $x = 4$.

Според тоа, бараниот волумен е $V = \frac{1}{6}\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot\overline{MC}$, т.е.

$$V = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 2\cdot 6 = 8cm^3 \ . \ \blacksquare$$

Задача 14. *Основниот раб на правилна четиристрана пирамида има должина* b, *а аголот при врвот на страната при обвивката е еднаков на аголот, што околниот раб го зафаќа со рамнината на основата. Да се најде должината на радиусот на сферата, впишана во пирамидата.*

Решение. На страната BCM низ B повлекуваме права, нормална на MC (цртеж 1). Добиениот триаголник ΔBFM е складен со триаголникот ΔOCM, бидејќи имаат еднакви хипотенузи, двата се правоаголни и имаат еднакви остри агли. Од ΔOCM и ΔBCF добиваме:



Цртеж 1.

$$\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{и}$$

$$\overline{BF}^2 = \overline{MO}^2 = b^2 - \left(\overline{MC} - \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 ,$$

односно

$$\overline{MC} = \frac{b\sqrt{2}}{4}\cdot(1+\sqrt{5}) \quad \text{и} \quad \overline{MO} = \frac{b}{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{5}} \ .$$

Според тоа,

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{MC}\cdot\overline{BF} + b^2 = b^2\cdot\left[1 + \sqrt{2+\sqrt{5}}\right]$$

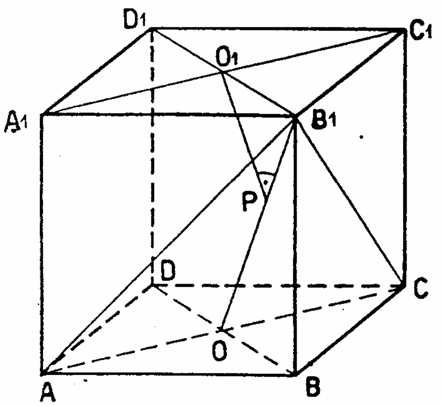
$$V = \frac{1}{3}\cdot b^2\cdot\frac{b}{2}\cdot \qquad .$$

Но за пирамида со волумен V и плоштина S радиусот на вписаната сфера е $R = \frac{3V}{S}$, што се добива од фактот дека волуменот на пирамидата V е еднаков на збирот од волумените на пирамидите чии основи се страните на пирамидата, а центарот на впишаната сфера им е заеднички врв. Според тоа,

$$R = \frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}} . \blacksquare$$

Задача 15. *Страната на коцка е* b. *Да се најде најкратко растојание помеѓу разминувачките дијагонали на две соседни страни.*

Решение. Да го определиме растојанието помеѓу дијагоналите AB_1 и A_1C_1. Низ една од нив, на пример низ AB_1 поставуваме рамнина паралелна на A_1C_1. Тоа е рамнината на ΔAB_1C.



Цртеж 1.

Отсечката $\overline{OB_1}$ е пресек на ΔAB_1C со дијагоналниот пресек BB_1D_1D. Во рамнината на дијагоналниот пресек низ O_1 кон OB_1 повлекуваме нормална права која OB_1 ја сече во точката P. Најкраткото растојание помеѓу AB_1 и A_1C_1 е растојанието $\overline{O_1P}$.

Од правоаголниот ΔOB_1O_1 наоѓаме $\overline{O_1P}\cdot\overline{OB_1} = \overline{OO_1}\cdot\overline{B_1O_1}$ и бидејќи $\overline{OO_1} = b$, следува дека $\overline{OB_1} = \frac{b\sqrt{6}}{2}$ и $\overline{B_1O_1} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Значи, $\overline{O_1P} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$. $\blacksquare$

4.4. ПРОСТОРНА ГЕОМЕТРИЈА - ОДНОСИ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. *Конус и пресечен конус имаат еднакви висини и еднакви волумени. Да се докаже, дека постои триаголник чии страни се радиусите на основите на конусите. Да се определи најголемиот агол во овој триаголник.*

Решение. Од условот на задачата следува дека:

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r_1^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3) \,, \qquad \text{т.е.}$$

$$r_1^2 = r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3 \,.$$

Според тоа,

$$r_1^2 < r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3 = (r_2+r_3)^2, \qquad \text{т.е.} \qquad r_1 < r_2+r_3 \,.$$

Исто така,

$$r_1^2 > r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 = (r_2-r_1)^2, \qquad \text{т.е.} \qquad |r_2-r_3| < r_1 \,.$$

Овие неравенства повлекуваат $|r_2-r_3| < r_1 < r_2+r_3$, што покажува, дека постои триаголник чии страни се радиусите на основите на конусите.

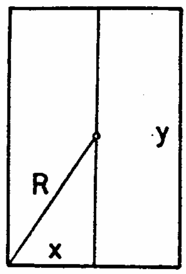
Очигледно r_1 е најголемиот од трите броеви r_1, r_2 и r_3. Но тогаш од

$$r_1^2 = r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3 \qquad \text{и} \qquad r_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3\cdot\cos\alpha$$

следува дека $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, односно $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. ∎

Задача 2. *Дадена е сфера со радиус R. Да се определи најголемата плоштина на површината на цилиндар, впишан во сферата.*

Решение. Нека со x и y ги означиме радиусот на основата и висината на впишаниот цилиндар. Тогаш:



Цртеж 1.

$$P = 2\pi xy + 2\pi x^2 . \qquad (1)$$

Но $y = \sqrt{4R^2 - 4x^2}$, и ако ставиме $\frac{P}{2\pi} = u$, (1) може да се запише во обликот:

$$u = x^2 + x\sqrt{4R^2 - 4x^2} . \qquad (2)$$

Од (2) следува дека $(u-x^2)^2 = (x\cdot\sqrt{4R^2 - 4x^2})^2$, од што се добива дека $5x^4 - 2(R^2+u)x^2 + u^2 = 0$.

Бидејќи x^2 е реален број, добиваме:

$$(2R^2+u^2)^2 - 5u^2 \geq 0 . \qquad (3)$$

Бидејќи u е позитивен, од (3) следува дека $u \leq R^2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Најголемата вредност на u е $R^2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, најголемата плоштина на површината на цилиндарот, впишан во сферата, е:

$$P = 2\pi u = \pi\cdot R^2\cdot(1+\sqrt{5}) . \blacksquare$$

Задача 3. *Да се докаже дека за волуменот V и плоштината на обвивката S за произволен прав кружен конус важи неравенството:*

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(2S/\pi\sqrt{3} \right)^3 .$$

Кога важи равенството ?

Решение. Нека r и s се радиусот на основата и директрисата на дадениот конус. Тогаш $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot x^2\cdot\sqrt{y^2-x^2}$ и $S = \pi\cdot x\cdot y$. Заменувајќи ги овие вредности на V и S во неравенството, треба да се докаже дека

$$4(x^2y^2-x^6) \le \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot x^3\cdot y^3 \quad ,$$

т.е. дека:

$$\frac{x}{y} - (\frac{x}{y})^3 \le \frac{2}{3\sqrt{3}} .$$

Забележуваме дека еден корен на равенката $t-t^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ е $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Имајќи го тоа предвид, претходното неравенство лесно се трансформира во неравенството

$$(\frac{x}{y} - \frac{1}{\sqrt{3}})^2\cdot(\frac{x}{y} + \frac{2}{\sqrt{3}}) \ge 0 \ ,$$

и ова неравенство е очигледно задоволено. Притоа равенството важи акко $x/y = \sqrt{3}/3 = cos(\pi/3)$, односно акко директрисата зафаќа агол од $\pi/3$ со основата на конусот. ∎

Задача 4. *Во тристрана пирамида* MABC *трите агли при врвот* M *се прави. Со* h *да ја означиме должината на висината спуштена кон страната* ABC, *со* r *да го означиме радиусот на впишаната сфера во пирамидата, а* V *нека е волуменот на пирамидата. Да се докаже неравенството:*

$$V \ge \frac{9}{2}\cdot(\frac{hr}{h-r})^3 .$$

Кога важи равенството ?

Решение. Плоштината на пирамидата да ја означиме со P. Тогаш $V=r\cdot S/3$ и $V=S_{ABC}\cdot h/3$, па $S=3V/r$ и $S_{ABC}=3V/h$. Од друга страна, пак, $S=S_{ABC} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$, каде a, b и c се должините на рабовите кои излегуваат од M. Одовде добиваме:

$$2(S-S_{ABC}) = ab+bc+ca \geq 3(abc)^{2/3} = 3(6V)^{2/3}.$$

Заменувајќи ги S и S_{ABC} преку V, r и h се добива неравенството:

$$\frac{6V(h-r)}{hr} \geq 3(6V)^{2/3} \quad .$$

и тоа лесно се трансформира до бараното неравенство. Притоа равенството важи ако и само ако $ab=bc=ca$, т.е. $a=b=c$. ∎

Задача 5. *Во тристрана пирамида* MABC *барем два од аглите* $\angle AMB$, $\angle BMC$ *и* $\angle CMA$ *не се еднакви меѓу себе. Да се докаже дека ако бисектрисите на тие два агла со бисектрисата на третиот агол образуваат еднакви агли, тогаш важи неравенството:*

$$8a_1b_1s_1 \leq a^2a_1 + b^2b_1 + c^2c_1 \ ,$$

каде што $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$, $a_1=\overline{MA}$, $b_1=\overline{MB}$ *и* $c_1=\overline{MC}$. *Кога важи равенството ?*

Решение. На отсечките MA, MB и MC или на нивните продолженија нанесуваме точки A_1, B_1 и C_1 соодветно така што $\overline{MA_1}=\overline{MB_1}=\overline{MC_1}=1$. Со P, Q и R да ги означиме средините на отсечките A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 соодветно. Нека $\alpha = \angle AMB$, $\beta = \angle BMC$, $\gamma = \angle CMA$ и $\alpha \neq \beta$. Тогаш $\overline{MP} = \cos\alpha/2$, $\overline{MQ} = \cos\beta/2$ и $\overline{MR} = \cos\gamma/2$. Одовде и од косинусната теорема наоѓаме:

$$\overline{PR}^2 = \cos^2\alpha/2 + \cos^2\gamma/2 - 2\cdot\cos\alpha/2\cdot\cos\gamma/2\cdot\cos(\angle PMR) \quad \text{и}$$

$$\overline{QR}^2 = \cos^2\beta/2 + \cos^2\gamma/2 - 2\cdot\cos\beta/2\cdot\cos\gamma/2\cdot\cos(\angle QMR) \ .$$

Од друга страна, пак, според конструкцијата е:

$$\overline{PR} = \overline{B_1C_1}/2 = \sin\beta/2 \qquad \text{и} \qquad \overline{QR} = \overline{A_1B_1}/2 = \sin\alpha/2$$

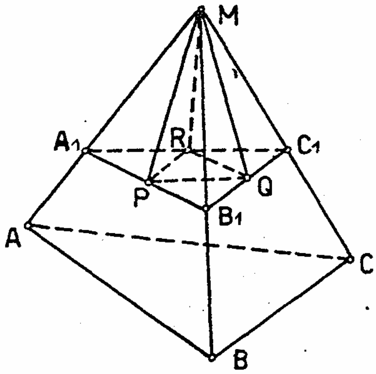
и затоа:

$$\cos(\angle PMR) = (\cos^2\alpha/2+\cos^2\gamma/2-\sin^2\beta/2)/(2\cdot\cos\alpha/2\cdot\cos\gamma/2)$$

$$= (1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)/(4\cdot\cos\alpha/2\cdot\cos\gamma/2) \ .$$

Аналогно се добива дека:

$$\cos(\angle QMR) = (1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)/(4\cdot\cos\beta/2\cdot\cos\gamma/2) \ .$$



Цртеж 1.

Од условот $\angle PMR = \angle QMR$ кога ќе се искористи дека $\cos\alpha \neq \cos\beta$ се добива дека:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1 \ . \qquad (1)$$

Ги изразуваме $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ според косинусната теорема:

$$\cos\alpha = \frac{a_1^2+b_1^2-c^2}{2a_1b_1} \ , \quad \cos\alpha = \frac{b_1^2+c_1^2-a^2}{2b_1c_1} \ , \quad \cos\alpha = \frac{c_1^2+a_1^2-b^2}{2c_1a_1} \ .$$

Заменувајќи го тоа во (1) добиваме:

$$\frac{a_1^2+b_1^2}{2a_1b_1} + \frac{b_1^2+c_1^2}{2b_1c_1} + \frac{c_1^2+a_1^2}{2c_1a_1} + 1 = (a^2a_1+b^2b_1+c^2c_1)/(2a_1b_1c_1) \ .$$

Користејќи дека $\frac{m^2+n^2}{2mn} \geq 1$ се добива:

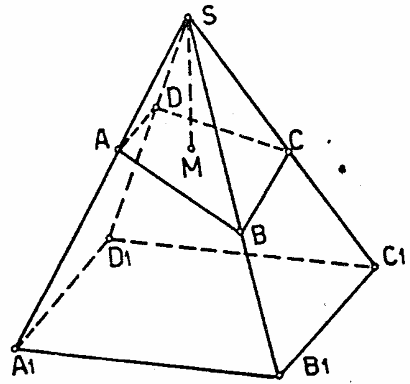
$$4 \leq (a^2a_1+b^2b_1+c^2c_1)/(2a_1b_1c_1) \ ,$$

од каде што следува бараното неравенство. Притоа, равенство се постигнува само ако е $a_1=b_1=c_1$. ■

Задача 6. *Нека рамнината* Π *ги сече бочните рабови* SA_1, SB_1, SC_1 *и* SD_1 *на правилна четиристрана пирамида* $SA_1B_1C_1D_1$ *во точките* A, B, C *и* D *соодветно. Ако* $S \notin \Pi$, *докажи дека:*

$$\frac{1}{\overline{AS}} + \frac{1}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{BS}} + \frac{1}{\overline{DS}} .$$

Решение. Нека рамнината Π ја сече висината во точка M. Забележуваме дека $\angle ASC = \angle BSD$ и SM е симетрала на аглите $\angle ASC$ и $\angle BSD$. Нека $\alpha = \angle ASM$. Тогаш добиваме:



Цртеж 1.

$$P_{ASC} = P_{SAM} + P_{SCM} = \frac{1}{2}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{SA}\cdot sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\overline{SM}\cdot\overline{SC}\cdot sin\alpha \quad \text{и}$$

$$P_{ASC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{SA}\cdot\overline{SC}\cdot sin2\alpha ,$$

и одовде:

$$\overline{SA}\cdot\overline{SC}\cdot sin2\alpha = \overline{SM}\cdot sin\alpha\cdot(\overline{SA}+\overline{SC}) ,$$

$$2\cdot\overline{SA}\cdot\overline{SC}\cdot sin\alpha\cdot cos\alpha = sin\alpha\cdot\overline{SM}\cdot(\overline{SA}+\overline{SC}) \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SC}} = \frac{2cos\alpha}{\overline{SM}} .$$

Аналогно се покажува дека:

$$\frac{1}{\overline{SB}} + \frac{1}{\overline{SD}} = \frac{2cos\alpha}{\overline{SM}} .$$

Од последните две равенства се добива дека:

$$\frac{1}{\overline{AS}} + \frac{1}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{BS}} + \frac{1}{\overline{DS}} . \blacksquare$$

Задача 7. *Дадени се 37 точки во просторот чии координати се цели броеви. Да се докаже дека постојат три различни точки чие тежиште има целобројни координати.*

Решение. Нека се дадени точките $A_i(x_i,y_i,z_i)$ за $1\le i\le 37$ и нека:

$$x_i = 3k_i + r_i, \qquad r_i \in \{0,1,2\} \ .$$

Бидејќи $3\cdot 12 = 36$ и $3\cdot 13 = 39$, според принципот на Дирихле постојат 13 точки чии први координати имаат ист остаток 0, 1 или 2 при делење со 3 .

Пак според принципот на Дирихле, помеѓу тие 13 точки постојат 5 точки чии втори координати имаат ист остаток 0, 1 или 2 при делење со 3. Без губење на општост, нека се тоа, на пример, точките $A_i(x_i,y_i,z_i)$, $1\le i\le 5$. Тогаш $x_i=3k_i+r$ и $y_i=3p_i+s$ за $1\le i\le 5$.

За $1\le i\le 5$, нека $z_i = 3q_i+t_i$ за некои $t_i \in \{0,1,2\}$.

Ако за сите $1\le i\le 5$: $t_i \in \{0,1\}$; или $t_i \in \{0,2\}$; или $t_i \in \{1,2\}$, т.е. ако остатоците при делење на z_i со 3 примаат само две вредности, тогаш според принципот на Дирихле ќе постојат барем три точки за кои тие остатоци се еднакви. Нека се тоа точките $A_i(x_i,y_i,z_i)$ за $1\le i\le 3$. Тогаш $x_i=3k_i+r$, $y_i=3p_i+s$ и $z_i=3q_i+t$ за $1\le i\le 3$, од што следува дека координатите на тежиштето на $\Delta A_1A_2A_3$ се:

$$x = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) = k_1+k_2+k_3+r \in \mathbb{Z} \ ,$$

$$y = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) = p_1+p_2+p_3+s \in \mathbb{Z} \quad \text{и}$$

$$z = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3) = q_1+q_2+q_3+t \in \mathbb{Z} \ ,$$ т.е. се цели броеви .

Ако помеѓу точките A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 не постојат три точки за кои $z_i=3q_i+t$ $1\le j\le 3$, тогаш според горната дискусија остатоците t_i ги примаат сите вредности 0, 1 и 2. Без губење на општоста, нека за точките A_1, A_2 и A_3 важи:

$$x_i=3k_i+r, \quad y_i=3p_i+s \quad \text{и} \quad z_i=3q_i+i-1.$$

Тогаш координатите на тежиштето на $\Delta A_1A_2A_3$ се:

$x = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) = k_1+k_2+k_3+r \in \mathbb{Z}$,

$y = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) = p_1+p_2+p_3+s \in \mathbb{Z}$ и

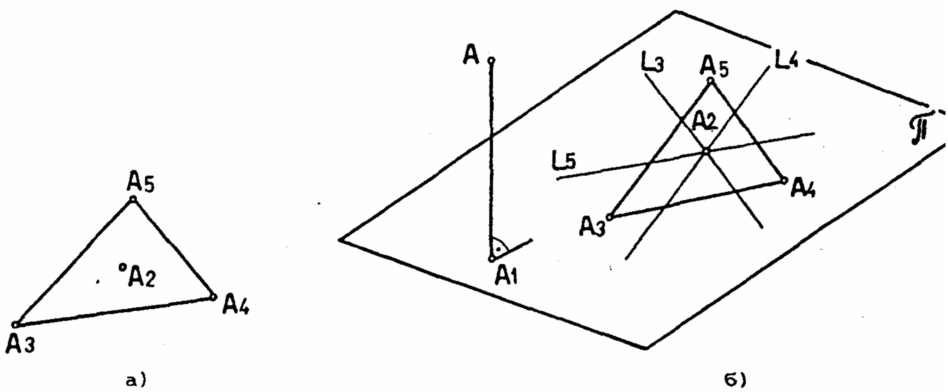
$z = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3) = q_1+q_2+q_3+1 \in \mathbb{Z}$, т.е. се цели броеви, што требаше да се докаже . ∎

Задача 8. *Нека* E *е конечно множество на некомпланарни точки во просторот такви што никои три не се колинеарни. Да се докаже дека барем еден од следниве услови е исполнет:*

а) E *содржи барем* 5 *точки кои се темиња на конвексна пирамида која со* E *нема други заеднички точки;*

б) *Постои рамнина која содржи точно три точки од* E .

Решение. Да ги разгледаме сите рамнини Π определени со три точки од E и да ги разгледаме точките A од $E\setminus\Pi$. Бидејќи бројот на сите парови (Π, A) е конечен, постојат рамнина Π и точка A така што растојанието од A до Π е минимално. Нека еден таков пар е парот (Π, A).



Цртеж 1

Ако парот (Π, A) содржи само три точки од E тогаш е исполнет условот б).

Во спротивно, постојат точки $A_2, A_3, A_4, A_5 \in E\cap\Pi$, така што $Q=A_2A_3A_4A_5$ е четириаголник што не содржи други точки од E. Нека Q не е конвексен. Нека, на пример, A_2 е внатре во триаголникот $A_3A_4A_5$, цртеж 1. а).

Нека A_1 е проекција од A на Π и нека L_3, L_4 и L_5 се прави кои минуваат низ A_2 и се паралелни со A_4A_5, A_3A_5 и A_3A_4 соодветно. Полурамнините определени со L_i и A_i, за $i \in \{3,4,5\}$ ја покриваат целата рамнина Π. Тогаш A_1 припаѓа во една од нив, на пример, за $i=3$. Но тогаш растојанието од A_2 до рамнината $A_1A_4A_5$ е помало од растојанието d на точката A_1 до рамнината AA_4A_5, цртеж 1. б). Бидејќи d е помало од растојанието од A до Π, доаѓаме до спротивност со минималноста на парот (Π, A). Значи, $Q=A_2A_3A_4A_5$ е конвексен. Според тоа, пирамидата $AA_2A_3A_4A_5$ е конвексна и не содржи други точки од E, што следува од минималноста на парот (Π, A). ∎

Задача 9. *Нека S е множество од n точки во просторот во општа положба, т.е. кои било четири точки не се компланарни. Некои парови точки од S се споени со отсечки, така што вкупниот број на отсечки е еднаков на $\left[n^2/4\right]$ и постојат три од тие отсечки кои формираат триаголник. Ако од некоја од тие точки поаѓа максимален број отсечки, да се докаже дека таа точка е теме на триаголникот. Притоа, $\left[n^2/4\right]$ е цел дел од $n^2/4$, т.е. $\left[n^2/4\right]$ е најголемиот цел број помал или еднаков $n^2/4$.*

Решение. Множеството S има конечен број точки, па според тоа постои точка $P_1\in S$ од која поаѓаат максимален број отсечки. Задачата ќе ја решиме со контрадикција.

Нека P_1 не е теме на триаголник и нека $A=\{P_2,\dots,P_d\}$ се точките од S кои се споени со P_1, а $B=\{P_{d+1},\dots,P_n\}$ кои не се споени со P_1. Бидејќи P_1 не е теме на триаголник, никои две точки од A не се споени и секоја отсечка со почеток во A има крај во B. Нека $N(P_i)$ е бројот на отсечки кои поаѓаат од P_i. Тогаш $N(P_1)=d-1$, и

$$\left[n^2/4\right] \le N(P_{d+1})+N(P_{d+2})+\dots+N(P_n)+N(P_1\ ) \ . \qquad (1)$$

Во (1) важи равенството ако во B ниедни две точки не се споени меѓу себе. Бидејќи $N(P_i)\le N(P_1)=d-1$ и $d\le n$, добиваме дека:

$$N(P_{d+1})+N(P_{d+2})+\dots+N(P_n)+N(P_1) \le (n-d+1)(d-1) \ . \qquad (2)$$

Ќе ја искористиме следнава задача.

Задача ✱. *Нека* $d,n \in \mathbb{N}$ *и нека* $d\le n$. *Тогаш:*

$$(n-d+1)(d-1)\le\left[n^2/4\right] \ .$$

Решение на задачата ✱. Разгледуваме два случаја: $n=2k$ и $n=2k+1$.

Нека $n=2k$. Тогаш: $(n-d+1)(d-1)=2kd-2k-d^2+d+d+1$, и од

$$\begin{aligned} 2kd-2k-d^2+d+d+1\le k^2 &\iff k^2-2kd+d^2+2k-2d+1 \ge 0 \\ &\iff (k-d)^2+2(k-d)+1 \ge 0 \\ &\iff ((k-d)^2+1)^2 \ge 0 \ , \end{aligned}$$

следува дека $(n-d+1)(d-1)\le k^2=\left[n^2/4\right]$.

Нека сега $n=2k+1$. Тогаш:

$$(n-d+1)(d-1) = 2kd+3d-2k-2-d^2 \ ,$$

$$\left[n^2/4\right] = \left[\frac{4k^2+4k+1}{4}\right] = k^2+k$$

и важат следните еквивалентности:

$$2kd+3d-2k-2-d^2 \le k^2+k \iff k^2+k-2kd-3d+2k+2+d^2 \ge 0$$
$$\iff (k-d)^2+3(k-d)+2 \ge 0$$
$$\iff a^2+3a+2 \ge 0 \ , \quad \text{каде} \quad a=k-d \ .$$

Но $a^2+3a+1<0$ само за $-2<a<-1$, што значи дека $a^2+3a+1\ge0$ за секој цел број a. □

Продолжуваме со решавање на задачата 9.

Од (2) и задачата *, следува дека:

$$N(P_{d+1})+N(P_{d+2})+\ldots+N(P_n)+N(P_1) \le \left[n^2/4\right]. \tag{3}$$

На крајот, од (1) и (3) следува дека

$$N(P_{d+1})+N(P_{d+2})+\ldots+N(P_n)+N(P_1) = \left[n^2/4\right] ,$$

што значи дека во B нема две точки што се споени, па значи не постои триаголник во B. Но бидејќи не постои триаголник и во A, доаѓаме до спротивност со претпоставката во задачата дека постојат три отсечки што формираат триаголник. Затоа P_1 мора да е теме на триаголник. ■

Задача 10. *Коцка со даден раб чија должина е* n, *е разделена на* n^3 *единични коцки со рамнини паралелни со нејзините страни. Да се најде бројот на сите парови од единични коцки што немаат повеќе од две заеднички темиња .*

Решение. Ако две единични коцки имаат најмалку 3 заеднички темиња, тогаш тие имаат заедничка страна. Од друга страна, секоја страна на една коцка која не се содржи во страна од поголема коцка, задава пар на единични коцки со најмалку 3 заеднички темиња. Да го определиме бројот на таквите страни. Бројот на единични коцки е n^3 и секоја од нив има 6 страни, но $6n^2$ страни се подмножества од страните на големата коцка.

Значи, внатре во големата коцка има $6n^3-6n^2$ страни на единични коцки и секоја е прочитана два пати.

Значи, бројот на парови од единични коцки со најмалку 3 заеднички темиња е $3n^3-3n^2$. Бидејќи бројот на сите парови од единични коцки е $\binom{n^3}{2} = \frac{1}{2}\cdot n^3\cdot(n^3-1)$, следува дека бројот на бараните парови коцки е:

$$\frac{1}{2}\cdot n^3\cdot(n^3-1) - (3n^3-3n^2) = \frac{1}{2}\cdot n^2\cdot\left[n(n^3-1) - 6n+6 \right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(n^4-7n+6) .$$

За n=2 имаме: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(16-14+6) = 2\cdot 8 = 16$. ■

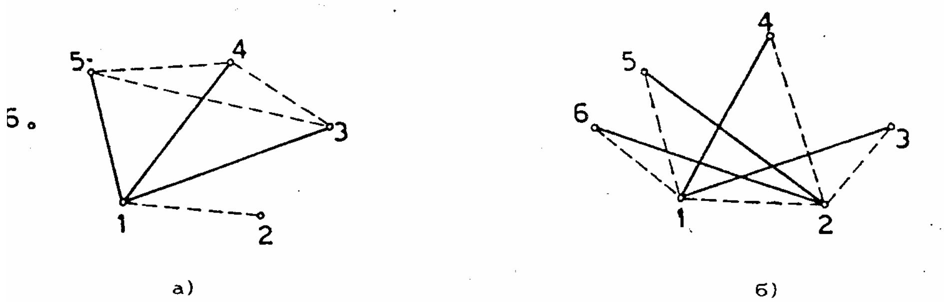
Задача 11. *Дадени се 6 прави во просторот од кои никои 3 не се паралелни, никои 3 не се сечат во иста точка и никои 3 не лежат во иста рамнина. Да се докаже дека во секој случај од нив може да се изберат три прави од кои било кои две се разминувачки.*

Решение. Од условот следува дека помеѓу кои било три прави постојот две разминувачки. Не може три прави по парови да се сечат бидејќи тогаш тие ќе лежат во една рамнина. Формираме биекција меѓу правите и темињата од рамнински конвексен шестаголник 123456, така што ќе ги поврзиме темињата со полни линии ако правите се разминувачки, а со испрекинати линии ако правите не се разминувачки. Тогаш задачата се сведува на следнава задача:

Задача *. *Дадени се 6 точки. Било кои две од нив се поврзани со полна или со испрекината линија, така што секој триаголник со темиња во дадените точки има барем една полна страна. Да се докаже дека постои триаголник чии страни се полни.*

Решение на задача *. Да претпоставиме обратно, т.е. дека таков триаголник не постои. Тогаш постојат две точки кои се поврзани со испрекината линија. Нека се тоа, на пример, точките 1 и 2. Секој од триаголниците 123, 124, 125 и 126 има барем по една полна линија. Значи, секоја од точките 3,4,5 и 6 е поврзана со полна линија со барем една од точките 1 и 2.

Ако некоја од точките 1 и 2 е поврзана со полна линија со три од точките 3,4,5 и 6 (на пример, 1 со 3, 4 и 5), тогаш линиите 54, 53 и 43 мора да се испрекинати, а тоа е во спротивност со условот на задачата за триаголникот 345, како на цртеж 1. а).



Цртеж 1.

Значи, 1 и 2 се поврзани со полни линии со две од точките 3,4,5 и 6. Без губење на општоста, го разгледуваме цртежот 1. б). Да го разгледаме триаголникот 256. Темињата 5 и 6 мора да се поврзани со испрекината линија (по претпоставка), па тогаш триаголникот 156 е само со испрекинати линии што по условот на задачата не е можно. Значи, претпоставката доведува до контрадикција, т.е. постои триаголник за кој сите три страни се полни линии. ∎

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П. Антонов, М.Я. Выгодский, В.В. Никитин, А.И. Санкин; Сборник задач по елементарной математике, Москва 1961.
2. D. Veljan; Kombinatorika s teorijom grafova; Školska knjiga, Zagreb 1989.
3. Збирка задатака са математичких такмичења ученика средњих школа 1990/91, Сомбор, Београд, 1991.
4. Г.И. Зубелевич; Сборник задач московских математических олимпиад; Просвещение, Москва 1967.
5. Избрание задачи из журнала American Mathematical monthly Мир, Москва, 1977.
6. Z. Kadelburg, V. Mičić, V. Janković; Elementarna teorija brojeva, Dirihleov princip, Diferencne jednačine; DMFA - SR Srbije, Beograd, 1976.
7. П.Кендеров, И.Табов; Български олимпиади по математика; Народна просвета, София, 1990.
8. В.Б. Лидский, Л.В. Овсыников, А.Н. Тулаюков, М.И. Шабунин; Задачи по элементарной математике; Наука, Москва, 1968.

9. Е. А. Морозова, И.С.Петраков, В.А.Скворцов; Международные математические олимпиады; Просвещение, Москва 1976.

10. Олимпиады, алгебра, комбинаторика; Наука, Москва, 1979.

11. Предлог задачи за сојузни натпревари за учениците од средните училишта во Југославија, 1977 до 1991 година.

12. Регионални натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр. 9, Скопје, 1989.

13. Републички натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр. 10, Скопје, 1989.

14. F. S. Roberts; Applied Combinatorics, Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1984.

15. "Сигма" број 1 - број 20; СДМ на СРМ, Скопје, 1980-1990.

16. И.Х. Сивашиский; Задачи по математике для внекласных занатий; Просвещение, Москва 1968.

17. H. M. Stark; An introduction to number theory, Markham Publishing company, Chicago, 1970.

18. С. Страшевич, Е. Боровкин; Польские математические олимпиады; Мир, Москва, 1978.

19. 60 zadataka za XIX internacionalnu matematičku olimpijadu; DMFA - SR Srbije, Beograd, 1979.

20. Д.О. Шклярскии, Н.Н. Ченцов, И.М. Яаглом; Избраные задачи и теоремы по елементарной математике; Наука, Москва 1976.

ОП за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело“ – Скопје, ул. Вељко Влаховиќ бр. 15 Градски ѕид блок 4.

За издавачот:
д-р Крсте Ангеловски

*

д-р Дончо Диомовски * д-р Костадин Тренчевски
м-р Ристо Малчески * Борис Јосифовски
ПРАКТИКУМ
ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

*

Лектура
Саветка Димитрова

*

Илустрации
дипл. инж. арх. Снежана Зарева

*

Технички уредник
Блаже Танчевски

*

Корицата ја илустрирал
Ладислав Цветковски

*

Коректор
Дончо Димовски

*

Ракописот е предаден во печат во февруари 1993 година. Печатењето е завршено во март 1993 година. Обем: 248 стр. Формат: 17 x 24 cm. Тираж: 2.500 примероци. Книгата е отпечатена во АД. ГИТ „Гоце Делчев“ – Скопје.

Основен данок на промет се плаќа по повластена стапка, а ослободено од посебен данок на промет мислење на Министерството за култура на Република Македонија бр. 09–3/161 од 22.08.1991 год.

за книгата . . .

Оваа книга е наменета како учебно помагало за студентите на математика при Природно-математичкиот факултет по предметот елементарна математика со практикум, но е пишувана во таква форма да биде од корист и за наставниците по математика и за надарените ученици од средното образование.

Книгата е пишувана во облик на збирка од решени задачи, иако голем дел од тие задачи се познати теореми. Притоа, за голем дел од поимите се дадени кратки дефиниции.

Решенијата на задачите се дадени на концизен математички начин, при што не е изгубено од прецизноста и јасноста на решенијата. За определен број задачи, читателот треба да вложи поголем труд за да може сам да ги реши, но задоволството што се јавува по секоја потешка, точно решена задача е големо, а во оваа книга може да се најдат многу такви задачи.

Изборот на задачите е на високо ниво, при што често се оди постапно од полесни кон потешки задачи, со цел да може да се согледаат повеќе идеи и методи за решавање на такви задачи.

Оваа книга ќе надополни една празнина од ваков вид на книги. Студентите по математика, наставниците по математика и надарените ученици за математика, ќе добијат еден многу добар прирачник од кој ќе можат многу да научат, да навлезат во тајните на методите и идеите за решавање задачи од елементарна математика, како и да можат да составуваат нови задачи од ваков вид.