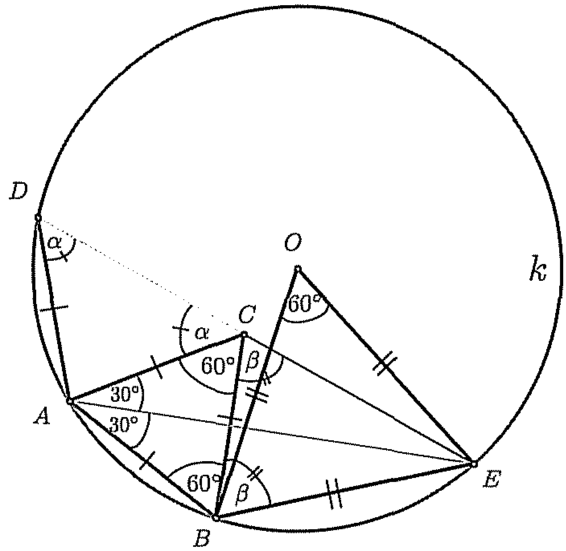
ЈБМО 2008

1. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што
$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$
Решение. *Прв начин*. Имаме
$$\begin{aligned}400=20^2&=(a+b+c+d)^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+300,\end{aligned}$$
па затоа $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Според тоа,
$$\begin{aligned}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2&=\\=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)&\\=3\cdot 100-2\cdot 150=0.&\end{aligned}$$
Оттука следува дека $a=b=c=d$ и како $a+b+c+d=20$, добиваме $a=b=c=d=5$.
Втор начин. Како и во првиот начин добиваме дека
$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$
Ако искористиме дека $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, добиваме
$$150=ab+ac+ad+bc+bd+cd\le\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=150,$$
па затоа $a=b=c=d=5$.

2. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k. Точката $D\neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD}=\overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E. Определи ја должината на отсечката CE.

Решение. Од $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{AC}$ следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Да означиме
$$\alpha=\measuredangle ADC=\measuredangle ACD \text{ и } \beta=\measuredangle BCE.$$
Тогаш $\alpha+\beta=120^\circ$. Од тетивниот четириаголник $ABED$ следува
$$\measuredangle ABE=180^\circ-\alpha.$$



Тогаш

$$\measuredangle CBE = 120^\circ - \alpha = \beta,$$

што значи дека $\triangle CBE$ е рамнокрак и четириаголникот $ABEC$ е делтоид. Оттука следува дека AE е симетрала на $\measuredangle BAC$, бидејќи е дијагонала која го дели делтоидот на два еднакви дела. Затоа $\measuredangle EAB = 30^\circ$, од што следува дека централниот агол над тетивата BE е еднаков на 60°. Според тоа, триаголникот чии темиња се B, E и центарот O на кружницата е рамностран, т.е. $\overline{BE} = 1$.

Конечно, од $\triangle CBE$ следува дека $\overline{CE} = \overline{BE} = 1$.

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$r(p-q) = 5q - p.$$

Од последната равенка следува $p \neq q$ и

$$r = \frac{4q}{p-q} - 1. \qquad (1)$$

Бидејќи r е природен број, заклучуваме дека $p-q \mid 4q$. Но, q е прост број, па затоа $p-q = q, 2q$ или $4q$, тогаш $p = 2q, 3q$ или $5q$, што противречи на фактот дека p и q се прости броеви. Одделно ќе ги разгледаме останатите случаи.

Ако $p-q=1$, тогаш $p=3, q=2$ и (1) следува $r=7$.

Ако $p-q=2$, тогаш $p=q+2$ и $r=2q-1$. Ако $q\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $p=q+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа бидејќи p е прост број добиваме $p=3$. Но, тогаш $q=1$, па затоа овој случај отпаѓа. Ако $q\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $r=2q-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа $r=3$. Но, тогаш $q=2$ и $p=4$, па затоа и овој случај отпаѓа. Ако $q=3$, тогаш $p=r=5$ и ова е уште едно решение на задачата.

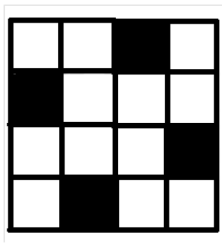
Ако $p-q=4$, тогаш $p=q+4$ и $r=q-1$. Од $r=q-1$ следува $r=2$ и $q=3$, па затоа $p=7$.

Конечно, решени на дадената равенка е

$$(p,q,r)\in\{(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)\}.$$

4. Секое поле на табла 4×4 е обоено со бела боја. Во еден потез е дозволено да се промени бојата на произволно поле заедно со неговите соседни полиња (белата боја во црна, црната во бела). Две полиња се соседни ако имаат заедничка стран. Определи ги сите n такви што по n потези може да се добие табла со сите полиња обоени во црно.

Решение. Прво да забележиме дека во еден потез најмногу 5 полиња може да ја сменат бојата. Бидејќи таблата има 16 полиња, потребни се најмалку 4 потези. Да забележиме 4 штрафирани полиња како на цртежот десно. Очигледно со примена на операцијата од задачата на овие полиња добиваме дека со $n=4$ потези може да се смени бојата на сите полиња во црна.



Да забележиме дека со последователна примена на операцијата на исто поле, ефектот е како ништо да не сме направиле. Оттука следува дека за секој парен број n кој е поголем или еднаков на 4 сите полиња на таблата ќе бидат црни.

Ќе докажеме дека за непарно n не може да се постигне во n потези сите полиња на таблата да се црни. Навистина, повторно ги разгледуваме четирите штрафирани полиња од горниот цртеж. Во било кој потез без разлика кое поле го бираме ќе се смени бојата на еднао од штрафираните полиња. Последното значи дека во секој потез се менува парноста на на црните и белите полиња на штрафираните полиња. На почетокот бројот на белите полиња бил 4, па затоа во секој непарен потез бројот на белите полиња меѓу штрафираните е непарен, т.е. 1 или 3. Значи, при непарен потез имаме барем едно бело поле на таблата. Значи, за непарен n не може да се постигне сите полиња на таблата да се црни.