ПОДЕЛА ТРОУГЛА НА ЈЕДНАКЕ ДЕЛОВЕ

Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац

Ученицима 6. разреда познато је да се сваки троугао може поделити на два једнака дела (два дела једнаких површина) конструкцијом било које од тежишних линија. У овом чланку показаћемо како се троугао може поделити на $2, 3, \ldots, n$ једнаких делова правама које садрже унапред задату тачку на једној од страница троугла.

Нека је M произвољна тачка странице AB троугла ABC. Прво ћемо показати како се врши половљење, подела на два једнака дела, $\triangle ABC$ правом p која садржи тачку M (сл. 1). Затим ћемо тај исти троугао поделити на три једнака дела двема правама које садрже M. На крају ћемо указати на поступак поделе $\triangle ABC$ на произвољан број једнаких делова правама које све садрже тачку M.

(а) *Подела троугла на два једнака дела.* На страници AB троугла ABC дата је тачка M. Задатак је да се конструише права p која садржи M и дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина. Приметимо да се конструкција своди на ону из увода уколико се тачка M поклапа са неким од темена A и B. Због тога можемо узети да је $M \neq A$ и $M \neq B$. До тражене праве p долази се на следећи начин.

Кроз теме A конструише се права паралелна са MC и са D означи њен пресек са правом BC. Затим се одреди тачка N - средиште дужи BD. У зависности од положаја тачке N даља конструкција иде у два правца. Међутим, у оба случаја важи

$$P_{ABC} = P_{MBD}. \tag{1}$$

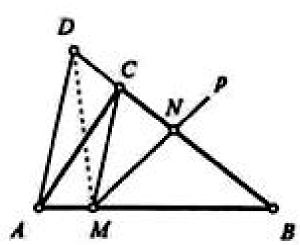
Заиста, због $AD \| MC$ троуглови MCA и MCD имају једнаке висине из A и D. Како је уз то основица MC заједничка, њихове површине су једнаке

$$P_{MCA} = P_{MCD}.$$

Из тога следи

$$P_{ABC} = P_{MCA} + P_{MBC} = P_{MCD} + P_{MBC} = P_{MBD}.$$

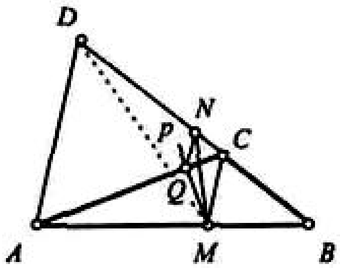
(1) *N припада дужи BC (сл. 1).* Тада је MN тражена права p. Докажимо то.



Сл. 1.

Како је N средина странице BD, MN је тежишна дуж у $\triangle MBD$. Стога је $P_{MBN} = \frac{1}{2} P_{MBD}$. Како је с обзиром на (1) $P_{MBD} = P_{ABC}$, следи $P_{MBN} = \frac{1}{2} P_{ABC}$, односно $P_{MBN} = P_{AMNC}$.

(2) *N је између C и D (сл. 2).* Кроз N се конструише права q паралелна са MC и AD и са Q обележи њен пресек са страницом AC. Права MQ је тражена права p.



Сл. 2.

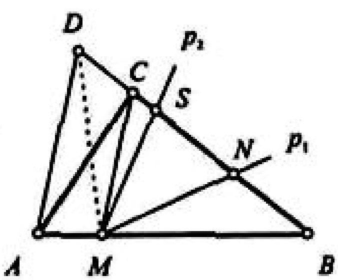
Имајући у виду (1) довољно је да се покаже да је

$$P_{MBCQ} = \frac{1}{2}P_{MBD}. \qquad (2)$$

Слично као у (1), из паралелности правих MC и QN следи $P_{MCQ} = P_{MCN}$. Отуда је $P_{MBCQ}=P_{MBC}+P_{MCQ}=P_{MBC}+P_{MCN}=P_{MBN}=\frac{1}{2}P_{MBD}$, што је и требало да се докаже.

(б) *Подела троугла на три једнака дела.* Слично као у (а), кроз тачку M која припада страници AB троугла ABC треба да се конструишу праве p_1 и p_2 које тај троугао деле на три једнака дела. Најпре се, исто као у (а), конструише тачка D, $AD \| MC$. Затим се тачкама N и S дуж BD подели на три једнака дела, тако да је $BN = NS = SD$. Могући су следећи случајеви:

(1) *N и S припадају страници BC, укључујући случај $S \equiv C$ (сл. 3).* Тада су MN и MS тражене праве p_1 и p_2.

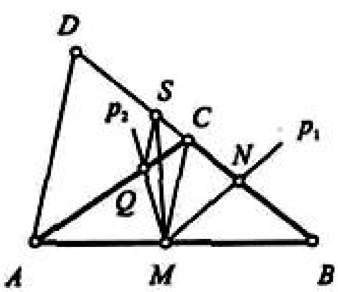


Сл. 3.

Како је $BN = NS = \frac{1}{3}BD$, следи $P_{MBN} = P_{MNS} = \frac{1}{3}P_{MBD}$. То, с обзиром на (1), даје

$$P_{MBN} = P_{MNS} = P_{MSCA} = \frac{1}{3}P_{ABC}.$$

(2) *N припада страници BC, а S дужи CD, $C - S - D$ (сл. 4).* Тада се кроз тачку S конструише права паралелна са MC (односно AD) и са Q означи њена тачка пресека са страницом AC. Тражене праве p_1 и p_2 су MN и MQ.



Сл. 4.

Како је, као у (1), $P_{MBN} = \frac{1}{3}P_{ABC}$, конструкција ће бити доказана уколико се покаже да је и $P_{MNCQ} = \frac{1}{3}P_{ABC}$. Као у случају (а)(2) констатујемо да је $P_{MCQ} = P_{MCS}$. Из тога следи $P_{MNCQ} = P_{MCQ}+P_{MNC}=P_{MCS}+P_{MNC}=P_{MNS}=\frac{1}{3}P_{MBD} = \frac{1}{3}P_{ABC}$.

(3) *N и S припадају дужи CD, $C-N-S-D$.* Тада се кроз тачке N и S конструишу праве q_1 и q_2, паралелне са MC и AD. Ако се са Q_1 и Q_2 обележе њихове тачке пресека са страницом AC, тада су MQ_1 и MQ_2 тражене праве p_1 и p_2. Доказ је сличан претходном и оставља се као вежба читаоцу.

(в) *Подела троугла на n ($n \geq 2$) једнаких делова.* Кроз тачку M која припада страници AB троугла ABC треба конструисати $n-1$ правих $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ које тај троугао деле на n једнаких делова. Као у случају (б) конструише се тачка D ($AD \| MC$), а затим дуж BD тачкама $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ подели на n једнаких делова. Тражене праве $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ добијају се као у (б). С обзиром да се своди на претходне и овај доказ се препушта читаоцу.

Специјални задатак

Кроз дату тачку M која припада страници AB троугла ABC конструиши 4 праве које деле троугао ABC на 5 делова једнаких површина.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија