III олимпијада

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2 \end{cases}$$

каде што a и b се реални параметри. Кои услови треба да ги задоволуваат параметрите a и b за да системот има позитивни и по парови различни решенија.

Решение. Имаме

$$x+y+z=a \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \qquad (2)$$

$$xy=z^2 \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$(x+y)^2=b^2+z^2,$$

а од (1), $(x+y)^2=(a-z)^2$, од што следува $a^2-2az=b^2$. Ако $a=0$ тогаш и $b=0$ па од (2) се добива решението $(0,0,0)$. Кога $a\neq 0$ тогаш

$$z=z_0=\frac{a^2-b^2}{2a} \qquad (4)$$

Ако од (4) замениме во (1) и (3) добиваме

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a} \quad \text{и} \quad xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2} \qquad (5)$$

што значи дека x и y се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\frac{a^2+b^2}{2a}t+\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}=0 \qquad (6)$$

т.е. x и y се

$$t_{1/2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

Значи, ако $a\neq 0$, тогаш системот има две решенија (t_1,t_2,z_0) и (t_2,t_1,z_0).

Системот (1) – (3) има позитивни и различни решенија ако и само ако равенката (6) има позитивни и различни решенија и ако $z_0>0$.

За да равенката (6) има позитивни и различни решенија потребно и доволно е

$$(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)>0,$$

(решенијата се реални и различни) и

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a}>0,\ xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

(решенијата се позитивни) .

Од условот $z_0 > 0$ следува дека $a^2 > b^2$. Од овде се добива бараниот потребен и доволен услов $3b^2 > a^2 > b^2$ односно

$$|b| < a < \sqrt{3}\,|b|.$$

2. Даден е триаголник со должини на страни a, b и c и плоштина P. Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ќе ја користиме Хероновата формула за плоштина на триаголник

$$P = \sqrt{\tfrac{a+b+c}{2}\,\tfrac{a+b-c}{2}\,\tfrac{a-b+c}{2}\,\tfrac{-a+b+c}{2}}.$$

Секој од множителите под коренот е позитивен па за оценка на производот $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ ќе го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, т.е. неравенството

$$xyz \leq \tfrac{(x+y+z)^3}{27}.$$

Ако ставиме $x = a+b-c$, $y = a-b+c$, $z = -a+b+c$, добиваме

$$4P = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leq \sqrt{(a+b+c)\tfrac{(a+b+c)^3}{27}}$$
$$= \tfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \tfrac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \tfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

3. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. 1) Ако $n = 2m$, тогаш $\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x$.

Бидејќи $\cos^{2m} x \leq 1 \leq 1 + \sin^{2m} x$, добиваме дека $\sin x = 0$ и $\cos x = \pm 1$, т.е. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) За $n = 1$ равенката го добива обликот $\cos x - \sin x = 1$, т.е. обликот

$$1 = \cos x - \cos(x - \tfrac{\pi}{2}) = -2\sin\tfrac{\pi}{4}\sin(x - \tfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\sin(x - \tfrac{\pi}{4}).$$

Според тоа $x = 2k\pi$ или $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Нека $n = 2m+1$, $m \geq 1$. За $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ добиваме

$$1 = \cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x.$$

Оттука

$$1 \leq \cos^2 x\,|\cos^{2m-1} x| + \sin^2 |\sin^{2m-1} x| < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

што не е можно. Затоа решенијата можат да бидат од облик $x=\frac{k\pi}{2}$. Во овој случај равенката ја задоволуваат случаи кога едниот собирок е 1 а вториот 0 или првиот собирок е 0 а вториот -1. Решенија се $x=2k\pi$ и $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. Даден е триаголникот $P_1P_2P_3$ и произволна точка P од неговата внатрешност. Нека Q_1,Q_2,Q_3 се пресечните точки на правите P_1P и P_2P_3, P_2P и P_1P_3, P_3P и P_1P_2, соодветно. Докажи дека меѓу количниците

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}, \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}}, \frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$$

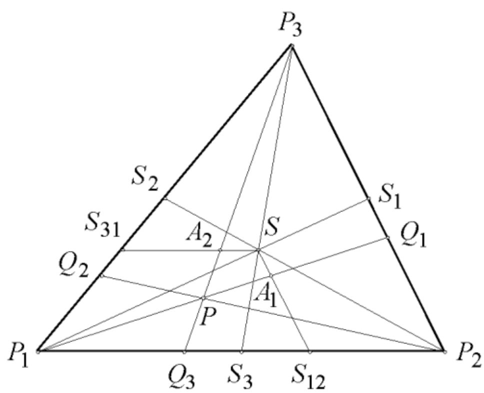
постои барем еден кој не е поголем од 2 и барем еден кој не е помал од 2.

Решение. Нека S е тежиште на триаголникот $P_1P_2P_3$, а P_1S_1, P_2S_2 и P_3S_3 се неговите тежишни линии.

Ако $P=S$ тогаш сите спомнати коефициенти се еднакви на 2 и тврдењето е точно.

Нека $P\neq S$. Тогаш точката P лежи во внатрешноста или на некој раб од шесте триаголници на кои е разделен триаголникот со тежишните линии. Нека тоа е триаголникот P_1S_3S.

Избираме точки S_{12} и S_{31} кои ги делат страните P_1P_2 и P_3P_1 во однос $2:1$, соодветно. Тогаш $S_{12}S \parallel P_2P_3$ и $S_{31}S \parallel P_1P_2$. Триаголникот P_1S_3S лежи во трапезот $P_1S_3SS_{31}$. Правата P_3Q_3 ја сече отсечката $S_{31}S$ во точка A_2 која е меѓу точките P_3 и P. Според тоа



$$\frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}} \geq \frac{\overline{P_3A_2}}{\overline{A_2Q_3}} = 2:1$$

На сличен начин, триаголникот P_1S_3S лежи во триаголникот $P_1S_{12}S$. Правата P_1P ја сече правата SS_{12} во точка A_1 која е внатрешна точка на отсечката PQ_1. Според тоа

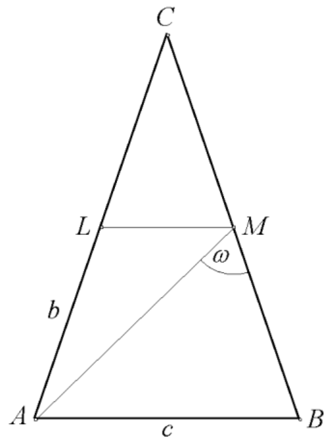
$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}} \leq \frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{A_1Q_1}} = 2:1$$

што и требаше да се докаже.

5. Конструирај триаголник ABC ако е дадено: $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ и $\measuredangle BMA=\omega$, $(\omega<90^\circ)$, каде M е средина на страната BC. Докажи дека задачата има решение ако и само ако $b\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\le c<b$.

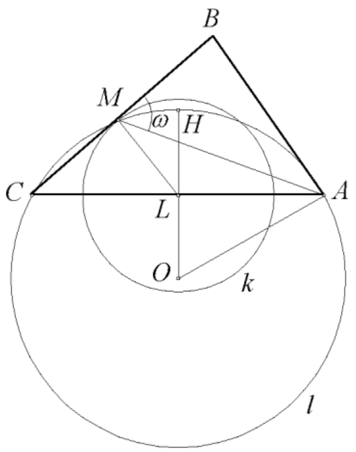
Кога важи знакот за равенство?

Решение. *Анализа.* Нека ABC е бараниот триаголник, $\measuredangle AMC=\pi-\omega>\frac{\pi}{2}$, L е средина на страната AC. Отсечката ML е средна линија на триаголникот ABC и нејзината должина е $\frac{c}{2}$, (цртеж десно).



Конструкција. Над отсечката AC конструираме кружен лак l од кој таа се гледа под агол $\measuredangle AMC$, а во точката L, која е средина на отсечката AC, опишуваме кружница k со радиус $\frac{c}{2}$. Точката M е пресечната точка на кружницата k и лакот l. Потоа ја конструираме отсечката BC за која M е средина (цртеж лево).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



Дискусија. За да постои решение, потребно и доволно е кружницата k да го сече лакот l. Нека O е центар на кружницата на која лежи лакот l. Бидејќи $\omega<\frac{\pi}{2}$, точката O лежи надвор од $\triangle AMC$. Нека $OH\perp AC$ е радиус кој го преполовува кружниот лак AC, а M бараната точка на лакот AH (или CH). Од $\triangle OML$ имаме

$$R=\overline{OM}\le\overline{OL}+\overline{LM}=R-\overline{HL}+\frac{c}{2},$$

т.е. $\frac{b}{2}\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\le\frac{c}{2}$, каде $\overline{HL}=\frac{b}{2}\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$ е висина на лакот.

Според условите од задачата $\measuredangle BMA=\omega<90^\circ<180^\circ-\omega=\measuredangle AMC$, па затоа $b=\overline{AC}>\overline{AB}=c$. Условот $\frac{b}{2}\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\le\frac{c}{2}<\frac{b}{2}$ е потребен. Ако $\overline{LM}=\frac{c}{2}<\frac{b}{2}=\overline{LA}$, тогаш крајната точка A на лакот l лежи надвор од кружницата k и ако уште висината на лакот е $h=\frac{b}{2}\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}<\frac{c}{2}$, темето H на лакот l лежи во кружницата k. Лакот l и кружницата k се сечат меѓу точките A и H. Истото го добиваме и за пресекот меѓу точките C и H. Ако $h=\frac{c}{2}$, тогаш кружницата и лакот се допираат, $M \equiv H$, $\triangle AMC$ е рамнокрак, $AB \| LM \perp AC$ и во овој случај триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето A.

6. Дадена е рамнина ε и три неколинеарни точки A, B, C кои лежат на иста страна од рамнината, такви што рамнината определена со овие точки не е паралелна со рамнината ε. Нека A', B' и C' се произволни точки во рамнината ε и L, M и N се средините на отсечките AA', BB' и CC', соодветно. Најди го геометриското место на тежиштето G на триаголникот LMN (ако тој не е дегенериран), кога точките A', B' и C' независно една од друга се менуваат во рамнината ε.

Решение. Во просторот поставуваме координатен систем така што оските OX и OY лежат во рамнината ε, а оската OZ е нормална на XOY. Точките A, B и C имаат координати $A(x_1, y_1, 2a)$, $B(x_2, y_2, 2b)$, $C(x_3, y_3, 2c)$ соодветно, и барем два од броевите a, b и c се различни меѓу себе. Координатите на тежиштето на триаголникот ABC се

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{2(a+b+c)}{3}\right).$$

Точките A', B' и C' имаат координати $A'(x_1', y_1', 0)$, $B'(x_2', y_2', 0)$, $C'(x_3', y_3', 0)$, а средини на отсечките AA', BB', CC' се точките L, M, N соодветно,

$$L\left(\frac{x_1+x_1'}{2}, \frac{y_1+y_1'}{2}, a\right), \quad M\left(\frac{x_2+x_2'}{2}, \frac{y_2+y_2'}{2}, b\right), \quad N\left(\frac{x_3+x_3'}{2}, \frac{y_3+y_3'}{2}, c\right).$$

Тежиштето G на триаголникот LMN има координати

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Бараното геометриско место на точки е во рамнината

$$z = \frac{a+b+c}{3} \qquad (*),$$

која е паралелна со рамнината ε и која го полови нормалата повлечена од тежиштето на триаголникот ABC и рамнината ε. Ќе докажеме дека секоја точка од оваа рамнина припаѓа на бараното множество точки. Нека $G(\overline{x}, \overline{y}, \frac{a+b+c}{3})$ е точка од рамнината (*). Координатите (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) се дадени. Секогаш кога ќе избереме x_2', x_3', според горната релација за тежиште G можеме да го одредиме x_1', а исто така, секогаш кога ќе избереме y_2', y_3' можеме да го одредиме y_1'.

Забелешка. Условот рамнината која минува низ точките A, B и C да не е паралелна со рамнината ε не е важен за решавање на задачата.