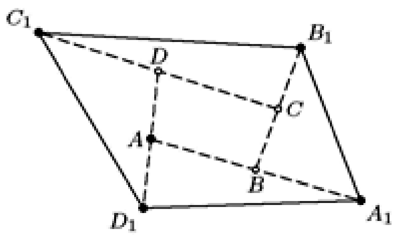
Ристо Малчески
Скопје

ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД СТЕРЕОМЕТРИЈА

Стереометријата како област не е многу застапена како на националните математички олимпијади, така и на меѓународните математички натпревари. Токму затоа, авторите на материјалите за подготовка на учениците за учество на математичките олимпијади многу малку ја разработуваат оваа област. Во оваа статија ќе направиме исклучок, со тоа што ќе разгледаме повеќе стереометриски задачи, меѓу кои ќе се најдат и геометриски неравенства. Овде уште ќе забележиме дека повеќето од разгледаните задачи биле задавани на национални математички олимпијади во други земји или на традивционални силни математички турнири.

1. Во просторот се дадени $n \geq 4$ точки такви што никои четири не се во иста рамнина. Дозволено е да се изберат две точки A и B и точката A да се премести во средината на отсечката AB. Ако по неколку вакви операции може да се добие истото множество точки, определи ја најмалата можна вредност на n.

   Решение. Ако $n = 4$, тогаш дадените точки се темиња на тетраедар чиј волумен се намалува при секое поместување, па затоа не може да се добие почетното множество точки. Значи $n \geq 5$.



   За $n = 5$ имаме пример. Нека A, B, C, D се некомпланарни точки и нека A_1, B_1, C_1, D_1 се последователно симетричните точки на точките A, B, C, D во однос на точките B, C, D, A (цртеж десно). Множеството точки A_1, B_1, C_1, D_1, A ги задоволува условите на задачата. Навистина, ако A последователно се поместува во однос на точките A_1, B_1, C_1, D_1, тогаш се добива почетното множество точки.

2. Должините на рабовите на еден тетраедар се природни броеви такви што производот на должините на секои два спротивни раба е еднаков на 6. Докажи дека тетраедарот е правилна триаголна пирамида и аголот меѓу околниот раб и основата не е помал од 30°.

   Решение. Можни должини на рабовите на тетраедарот $ABCD$ се 1, 2, 3 и 6. Ако некој од рабовите на тетраедарот, на пример AB, има должина 1, тогаш CD има должина 6. Сега од неравенството на триаголник за $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ следува дека овие триаголници имаат уште по една страна со должина 6.

Ако, на пример $\overline{AD}=6$, од условот следува дека $\overline{BC}=1$ и тогаш $\overline{BD}=6$ и $\overline{AC}=1$.

Ако ниту еден од рабовите на тетраедарот нема должина 1, што значи и 6, три рабови се со должина 2, а спротивните три се со должина 3. Можеме да сметаме дека $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=3$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=2$ или $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=2$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=3$.

И во трите случаи пирамидата е правилна. Нека $\alpha=\measuredangle(AD,ABC)$. Јасно, α е најмал во третиот случај. Тогаш $R_{ABC}=\sqrt{3}$, па затоа $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\alpha=30^\circ$.

3. Во триаголна пирамида $ABCD$ сите рамнински агли во темињата не се прави агли, а ортоцентрите на триаголниците ABC, ABD и ACD лежат на една права. Докажи дека центарот на опишаната сфера околу пирамидата лежи во рамнината која минува низ средините на рабовите AB, AC и AD.

Решение. Нека AB_1, AC_1 и AD_1 се висините на пирамидата соодветни на ѕидовите ACD, ABD и ABC. Ортоцентрите на овие ѕидови лежат на правите AB_1, AC_1 и AD_1, и се различни од A. Бидејќи тие лежат на една права l, заклучуваме дека правите AB_1, AC_1 и AD_1 лежат во рамнината α определена со l и A (јасно, A не лежи на l). Значи, точките B_1, C_1 и D_1 припаѓаат на пресечната права на рамнините α и BCD.

Нека A' е проекцијата на A врз рамнината BCD. Од теоремата за трите нормали следува дека точките B_1, C_1 и D_1 се проекциите на A' соодветно на правите CD, BD и BC. Значи, точките A', C, B_1 и D_1 припаѓаат на една кружница (со дијаметар $A'C$), а исто така и точките A', D, B_1 и C_1 лежат на една кружница (со дијаметар $A'D$). Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle(BC,A'C)&=\measuredangle(D_1C,A'C)=\measuredangle(D_1B_1,A'B_1)=\measuredangle(C_1B_1,A'B_1)\\&=\measuredangle(C_1D,A'D)=\measuredangle(BD,A'D),\end{aligned}$$

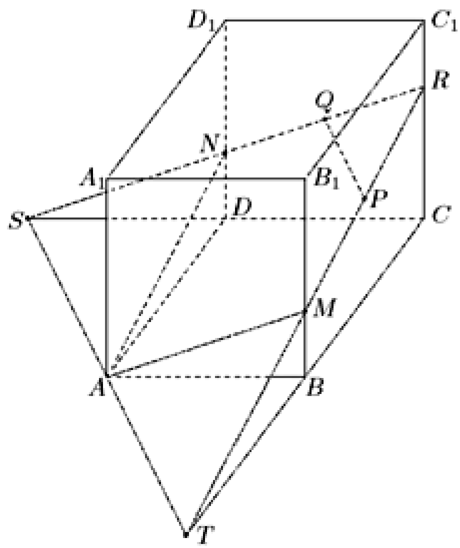
(овде $\measuredangle(a,b)$ означува агол по модул π меѓу правите a и b во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот). Од равенството $\measuredangle(BC,A'C)=\measuredangle(BD,A'D)$ следува дека точката A' припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle BCD$, што значи на сферата S опишана околу пирамидата $ABCD$. Затоа центарот на ова сфера припаѓа на рамнината β која е симетрала на работ AA'. Јасно, средините на рабовите AB, AC и AD исто така припаѓаат на β (триаголниците ABA', ACA' и ADA' се правоаголни), што и требаше да се докаже.

4. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$. Точките M_1, N_1 и P_1 припаѓаат соодветно на рабовите $A'D', A'B'$ и $A'A$, а точките M_2, N_2 и P_2 припаѓаат соодветно на рабовите CB, CD и CC'. Докажи, ако растојанијата меѓу правите M_1N_1 и M_2N_2, N_1P_1 и N_2P_2, P_1M_1 и P_2M_2 се по парови различни, тогаш правите M_1M_2, N_1N_2 и P_1P_2 се сечат во една точка.

Решение. Нека работ на коцката има должина 1. Ако $M_1N_1 \nparallel M_2N_2$ и $N_1P_1 \nparallel N_2P_2$, тогаш $d_1 = d_2 = 1$, што е противречност. Според тоа, барем два од трите пара прави (M_1N_1, M_2N_2), (N_1P_1, N_2P_2) и (P_1M_1, P_2M_2) се паралелни и затоа $(M_1N_1P_1) \| (M_2N_2P_2)$. Значи и трите пара прави се паралелни. Бидејќи правите M_1M_2, N_1N_2 и P_1P_2 не лежат во една рамнина и две по две се сечат, следува дека тие се сечат во една точка.

5. Дадена е коцка со раб 1. Повлечена е рамнина која минува низ теме на основата и центрите на двата околни ѕида кои не го содржат тоа теме. Определи го односот во кое пресекот на рамнината со коцката го дели нејзиниот волумен.

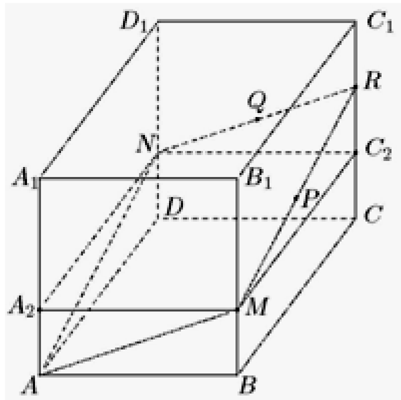
Решение. Нека P и Q се центрите на ѕидовите BCC_1B_1 и DCC_1D_1 и нека $\alpha = (APQ)$, цртеж десно. Бидејќи PQ е средна отсечка во $\triangle DBC_1$ имаме $PQ \| BD$. Според тоа, α ја сече $(ABCD)$ во правата низ A која е паралелна со BD. Со T и S да ги означиме пресечните точки на таа права соодветно со правите CB и CD. Правите TP и SQ го сечат работ CC_1 во една иста точка R (пресечната точка на α со CC_1). Нека



$$M = TR \cap BB_1 \text{ и } N = SR \cap DD_1.$$

Тогаш пресекот на α со коцката е четириаголникот $AMRN$ (лесно се докажува дека тој е ромб). Јасно, $\overline{BT} = \overline{BA} = 1$. Значи, BM е средна отсечка во $\triangle CRT$. Бидејќи $\overline{BM} = \overline{RC_1} = 1 - \overline{RC}$ и $\overline{RC} = 2\overline{BM}$, добиваме $\overline{BM} = \frac{1}{3}$. Аналогно, $\overline{DN}=\frac{1}{3}$.

Нека V е волуменот на полиедарот ограничен со $(ABCD)$, $(AMRN)$ и околните ѕидови на коцката, цртеж десно. Нека A_2 и C_2 се пресечните точки на AA_1 и CC_1 со рамнината низ MN која е паралелна со $(ABCD)$. Тогаш



$$\overline{RC_2}=\overline{RC}-\overline{CC_2}=\overline{MB}=\overline{AA_2}=\frac{1}{3}$$

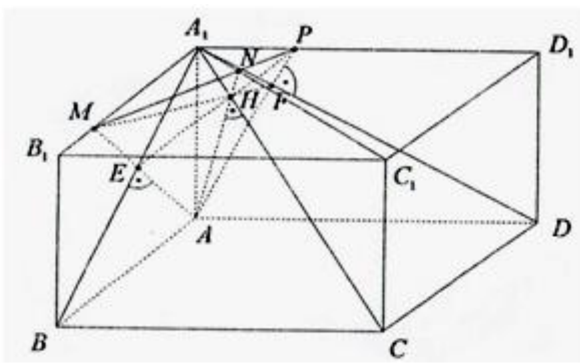
и затоа триаголните пирамиди NMC_2R и NMA_2A имаат еднакви волумени. Тоа покажува дека $V_{ABCDA_2MC_2N}=\frac{1}{3}$, па затоа рамнината α, сметано од основата $ABCD$, го дели волуменот на коцката во однос $1:2$.

6. Даден е правоаголен паралелопипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нормалите од точката A на правите A_1B, A_1C, A_1D ги сечат правите A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 соодветно во точките M, N, P.

а) Докажи дека точките M, N, P се колинеарни.

б) Ако E и F се соодветно подножјата на нормалите повлечени од A кон A_1B и A_1D, докажи дека правите PE, MF и AN минуваат низ една точка.

Решение. а) Ќе докажеме дека правите AM, AN и AP лежат во една рамнина. Нека $H=AN\cap A_1C$. Бидејќи $AE\perp A_1B, AE\perp BC$, добиваме дека AE е нормална на рамнината (A_1BC), т.е. $AE\perp CH$.



Од друга страна, бидејќи $AN\perp CH$ и $AN\perp A_1C$, добиваме $AH\perp CH$. Така добиваме дека $CH\perp(AMN)$. Аналогно докажуваме дека $CH\perp(ANP)$. Но, рамнините (AMN) и (ANP) се сечат во правата AN и оттука следува дека овие две рамнини се совпаѓаат. Значи, AM, AN и AP лежат во една рамнина, која ја сече горната основа на паралелопипедот во права линија. Значи, точките M, N, P се колинеарни.

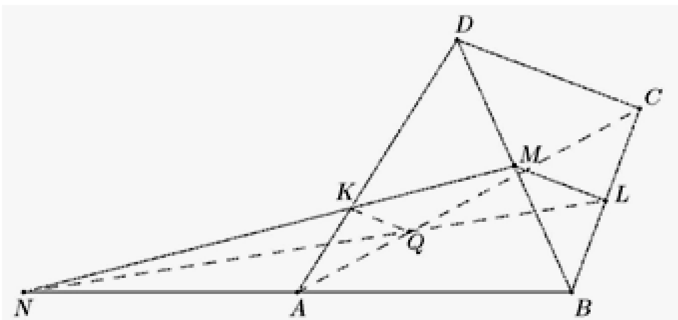
б) Го разгледуваме тетраедарот A_1MAP. Според условот рабовите A_1M, A_1P и A_1A се по парови заемно нормални. Бидејќи $A_1M \perp (A_1AP)$, добиваме $A_1E \perp AE$ и $PE \perp AM$, т.е. PE е висина во $\triangle AMP$.

Од а) имаме $CH \perp (AMN)$, т.е. $A_1H \perp (AMN)$ и од $A_1E \perp AE$ добиваме дека $HE \perp AE$ и $HE \perp AM$. Бидејќи $PE \perp AM$, точката H лежи на PE. Аналогно $H \in MF$ и точката H е ортоцентар на $\triangle AMP$. Така правите PE, MF и AN минуваат низ точката H.

7. Дадена е правилен тетраедар $ABCD$. Нека M е средината на работ DB, N е точка на продолжението на работ AB таква што $2\overline{NA} = \overline{NB}$ и P е точка на висината на $\triangle BCD$ повлечена од темето D. Определи го $\measuredangle MPD$ ако пресекот на пирамидата со рамнината (NMP) е трапез.

Решение. Бидејќи пресекот е четириаголник, правата MP го сече работ BC. Нека $L = MP \cap BC$, $K = NM \cap AD$ и $Q = NL \cap AC$. Бидејќи правите KM и QL не се паралелни, заклучуваме дека $ML \| KQ$. Од друга страна NM и DA се медијани во $\triangle BDN$ и затоа

$$\frac{\overline{NQ}}{\overline{QL}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{KM}} = \frac{2}{1}.$$



Но, AC е медијана во $\triangle NCB$ и како $\frac{\overline{NQ}}{\overline{QL}} = \frac{2}{1}$ следува дека NL е медијана повлечена кон страната BC, па затоа L е средина на BC. Според тоа, $L \equiv P$, $MP \| DC$ и

$$\measuredangle MPD = \measuredangle BLD - \measuredangle BLM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

8. Дадена е правилна четириаголна пирамида $ABCDV$ со основа $ABCD$. Сите рабови на пирамидата се еднакви. Определи го косинусот на аголот меѓу

правите AM и CN каде точката M е средина на работ BV, а точката N е средина на работ DV.

Решение. Нека точката K во рамнината на основата $ABCD$ е таква што $2\overline{AK}=\overline{BD}$ и $AK \parallel BD$. Тогаш $AMNK$ е паралелограм и го бараме кусинусот од аголот меѓу KN и NC.

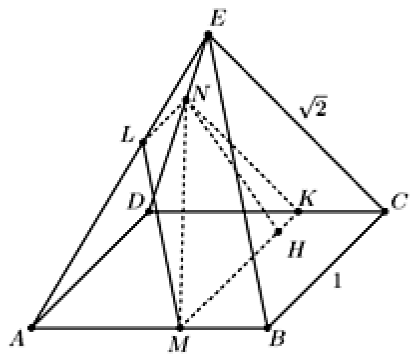
Од правоаголниот триаголник CAK добиваме $\overline{KC}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AK}^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Бидејќи $\overline{AM}=\overline{KN}=\overline{CN}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ од косинусната теорема за триаголникот KCN добиваме $\cos\measuredangle CNK=\frac{3+3-10}{2\cdot 3}=-\frac{2}{3}$.

9. Дадена е правилан четириаголна пирамида $ABCDE$ со основен раб $\overline{AB}=1$ и околен раб $\overline{AE}=\sqrt{2}$. На рабовите AB и DE се избрани точки M и N соодветно, такви што MN е паралелна на рамнината (BCE). Ако $\overline{MN}=1$, определи го растојанието меѓу правите MN и BE.

Решение. Нека рамнината низ MN паралелна со рамнината (BCE) ги сече рабовите CD и AE во точките K и L, соодветно. Тогаш $MK \parallel BC$, $KN \parallel CE$, $ML \parallel BE$ и $NL \parallel AD$. Ако $\overline{AM}=t$, тогаш $\overline{ML}:\overline{BE}=\overline{AM}:\overline{AB}$, па затоа $\overline{ML}=t\sqrt{2}$ и од причина на симетрија $\overline{KN}=t\sqrt{2}$. Исто така

$\overline{NL}:\overline{DA}=\overline{EL}:\overline{EA}=\overline{BM}:\overline{BA}=1-t$,



т.е. $\overline{NL}=1-t$. За висината на рамнокракиот трапез $MKNL$ имаме

$$\overline{NH}=\sqrt{\overline{NK}^2-\overline{KH}^2}=\sqrt{2t^2-\frac{t^2}{4}}$$

и соодветно

$$\overline{MN}^2=\overline{NH}^2+\overline{MH}^2=2t^2-\frac{t^2}{4}+(1-\frac{t}{2})^2=2t^2-t+1.$$

Но, според условот $\overline{MN}=1$ и затоа $t=\frac{1}{2}$, т.е. M е средина на AB и N е средина на ED. Останува да го пресметаме растојанието од темето E до рамнината (MNL). Последователно добиваме

$$V_{ENLM}=\frac{1}{2}V_{ENLB}=\frac{1}{8}V_{EADB}=\frac{1}{16}V_{ABCDE}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{96}.$$

Конечно, за бараното растојание добиваме

$$d=\frac{3V_{ENLM}}{P_{LMN}}=\frac{\sqrt{6}}{32}:\frac{\sqrt{7}}{16}=\frac{\sqrt{42}}{14}.$$

10. Даден е $\triangle ABC$. Точките S и P припаѓаат на различни страни од рамнината на $\triangle ABC$ и се такви што $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$ и $PA\perp PB\perp PC\perp PA$, при што волуменот на пирамидата $PABC$ е двапати поголем од волуменот на пирамидата $SABC$. Докажи дека тежиштето на $\triangle ABC$ припаѓа на отсечката SP.
Решение. Со O и H да ги означиме ортогоналните проекции соодветно на S и P врз рамнината (ABC). Нека G е пресечната точка на SP и рамнината (ABC), направи цртеж. Триаголниците SOA, SOB и SOC се складни, па затоа $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, т.е. O е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.
Од $PA\perp(PBC)$ следува $PA\perp BC$. Освен тоа $PH\perp BC$, па затоа $BC\perp(PAH)$, т.е. $AH\perp BC$. На ист начин добиваме $BH\perp AC$, што значи дека H е ортоцентар на $\triangle ABC$. Ако $O\equiv H$, тогаш $\triangle ABC$ е рамностран и нема што да се докажува.
Ако O и H се различни точки, тогаш G,H,O се колинеарни, бидејќи $SO\parallel PH$ и $G\in SP$. Бидејќи волуменот на $PABC$ е двапати поголем од волуменот на $SANC$, важи $2\overline{SO}=\overline{PH}$ и од сличноста на триаголниците GOS и GHP се добива $\overline{GO}:\overline{GH}=1:2$.
Нека M е средината на отсечката BC и точката G_1 е тежиште на $\triangle ABC$. Бидејќи триаголниците AHG_1 и OMG_1 се слични добиваме $\overline{G_1O}:\overline{G_1H}=1:2$, т.е. $G=G_1$, со што доказот е завршен.

11. Отсечките A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 се сечат во точката P, но не лежат во иста рамнина. Нека O_{ijk} е центарот на сферата која минува низ точките A_i, B_j, C_k и P. Докажи дека правите $O_{111}O_{222}, O_{112}O_{221}, O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ се сечат во една точка.
Решение. За дадена отсечка XY симетрална рамнина за таа отсечка ќе ја наречеме рамнината π, која е нормална на XY и минува низ нејзината средина.
Множеството точки O_{1jk} лежи на симетралната рамнина α_1 на PA_1. Слично, множеството точки O_{2jk} лежи на симетралната рамнина α_2 на PA_2. Тогаш $\alpha_1\parallel\alpha_2$. Аналогно ги дефинираме симетралните рамнини β_j и γ_k соодевтни на PB_j и PC_k. Тогаш точките O_{ijk} се темиња на паралелопипедот формиран од рамнините α_i, β_j и γ_k. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека дијагоналите на паралелопипедот се сечат во една точка.

12. Околу сфера е опишан полиедар чии ѕидови се обоени во бела и црна боја,

така што секои два црни ѕида немаат заеднички раб. Докажи дека збирот на плоштините на црните ѕидови не е поголем од збирот на плоштините на белите ѕидови.

Решение. Ги поврзуваме темињата $A_1A_2...A_n$ на секој црн ѕид на полиедарот со неговата допирна точка T со сферата и добиваме разбивање на црните ѕидови на полиедарот на триаголници. Според условот A_1A_2 е раб и на бел ѕид. Ако T' е допирната точка на тој ѕид со сферата, тогаш $\overline{A_1T} = \overline{A_1T'}$ и $\overline{A_2T} = \overline{A_2T'}$, па затоа $\triangle A_1A_2T \cong \triangle A_1A_2T'$. Според тоа, за секој црн триаголник постои бел триаголник со еднаква плоштина, од што следува тврдењето на задачата.

13. Сфера е поставена на рамнина. На сферата е означена точка. Докажи дека со тркалање на сферата по рамнината можеме да ја придвижиме точката на врвот на сферата, а сферата да ја вратиме во почетната положба.

Решение. Нека r е радиусот на сферата, а A е почетната положба на дното на сферата. Ја тркаламе сферата по големата кружница низ A и означената точка, додека таа точка не дојде на врвот на сферата. Нека B е положбата на дното на сферата во тој момент. Тогаш $\overline{AB} \le 2\pi r < 4\pi r$ и значи во рамнината постои точка C таква што $\overline{AC} = \overline{BC} = 2\pi r$. Оттука следува дека ако ја тркаламе сферата по отсечката BC и потоа по отсечката CA, означената точка ќе биде на врвот на сферата како кога дното на сферата е во C, така и на крајот кога сферата повторно со дното ќе биде во точката A.

14. Нека $P_i, i = 1,2,3,4$ се различни точки на сферата со радиус 1. Докажи дека изразот $\sum_{i \ne j} \frac{1}{\overline{P_iP_j}}$ достигнува минимум кога $P_i, i = 1,2,3,4$ се темиња на правилен тетраедар.

Решение. Меѓу четири точки постојат $\binom{4}{2} = 6$ отсечки. Затоа од неравенството меѓу хармониската и квадратната средина следува

$$\sum_{i \ne j} \frac{1}{\overline{P_iP_j}} \ge 6^2 \left(\sum_{i \ne j} \overline{P_iP_j}^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\overline{P_iP_j}$ се еднакви, т.е. тие се рабови на правилен тетраедар. Според тоа, изразот $\sum_{i \ne j} \frac{1}{\overline{P_iP_j}}$ достигнува минимум кога $P_i, i = 1,2,3,4$ се темиња на правилен тетраедар.

15. Даден е тетраедар $ABCD$ е во него внатрешна точка O. Со d_1, d_2, d_3, d_4 да

ги означиме растојанијата од O до темињата A, B, C, D, соодветно, а со k_1, k_2, k_3, k_4 да ги означиме растојанијата од O до ѕидовите BCD, ACD, ABD и ABC, соодветно. Докажи дека

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1k_3} + \sqrt{k_1k_4} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_2k_4} + \sqrt{k_3k_4}) .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Прво да забележиме дека $d_i + k_i \geq h_i$, каде h_i е соодветната висина. Ако со S_i ги означиме плоштините на соодветните ѕидови и ги споредиме волумените, добиваме

$$(d_i + k_i)S_i \geq h_i S_i = \sum_{j=1}^{4} k_j S_j .$$

Според тоа,

$$d_1 \geq \frac{S_2}{S_1}k_2 + \frac{S_3}{S_1}k_3 + \frac{S_4}{S_1}k_4,$$
$$d_2 \geq \frac{S_1}{S_2}k_1 + \frac{S_3}{S_2}k_3 + \frac{S_4}{S_2}k_4,$$
$$d_3 \geq \frac{S_1}{S_3}k_1 + \frac{S_2}{S_3}k_2 + \frac{S_4}{S_3}k_4,$$
$$d_4 \geq \frac{S_1}{S_4}k_1 + \frac{S_2}{S_4}k_2 + \frac{S_3}{S_4}k_3.$$

Ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенство

$$\sum_{i=1}^{4} d_i \geq \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{4} \left(\frac{S_i}{S_j}k_i + \frac{S_j}{S_i}k_j\right). \tag{1}$$

Од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секој собирок во (1) важи

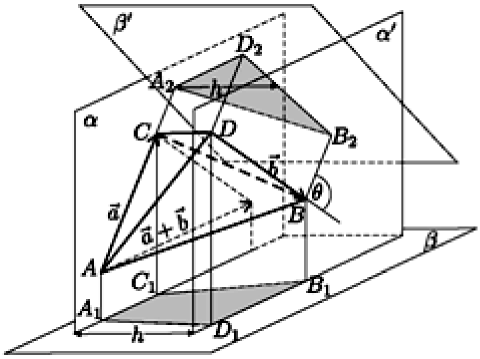
$$\frac{S_i}{S_j}k_i + \frac{S_j}{S_i}k_j \geq 2\sqrt{k_i k_j} , \tag{2}$$

па затоа бараното неравенство следува од неравенствата (1) и (2). За да важи знак за равенство треба да имаме равенство во сите искористени неравенства. Оттука, заради $d_i + k_i = h_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ следува дека височините на тетраедарот $ABCD$ мора да се сечат во една точка (ортогонален тетраедар). Понатаму лесно се покажува дека тетраедарот $ABCD$ мора да е правилен и O е негов центар.

16. Докажи дека за произволен тетраедар постојат две рамнини такви што односот на плоштините на проекциите на тетраедарот на тие две рамнини не е помал од $\sqrt{2}$.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот тетраедар, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $a \geq b$ и нека аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не е остар (во спротивно можеме да ги замениме местата на буквите B и D) и нека е еднаков на θ. Да ги воочиме двете паралелни рамнини α и α' кои ги содржат разминувачките прави AC и BD. Нека растојанието меѓу нив е h.

Рамнините кои се бараат во задачата ќе ги бараме меѓу рамнините нормални на α. Да поставиме нормално на рамнината α рамнина β, која е паралелна на векторот $\vec{a}+\vec{b}$. Исто така да поставиме рамнина β' нормална на рамнината α и на векторот $\vec{a}$. Ќе докажеме дека рамнините β и β' се бараните рамнини.



Проекцијата на тетраедарот на рамнината β е трапез $A_1D_1B_1C_1$ со основи A_1C_1 и D_1B_1 и визина h, при што важи $\overline{A_1C_1}+\overline{D_1B_1}=|\vec{a}+\vec{b}|$. Тогаш

$$P_{A_1D_1B_1C_1}=\frac{1}{2}(\overline{A_1C_1}+\overline{D_1B_1})h=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|\cdot h.$$

Проекцијата на тетраедарот на рамнината β' е $\triangle A_2B_2D_2$ чија плоштина е

$$P_{\triangle A_2B_2D_2}=\frac{1}{2}h\cdot\overline{B_2D_2}=\frac{1}{2}hb\sin\theta.$$

Конечно,

$$\begin{aligned}\frac{P_{A_1D_1B_1C_1}}{P_{\triangle A_2B_2D_2}}&=\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{b\sin\theta}\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\theta)}}{b\sin\theta}\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}{b\sin\theta}\\&\geq\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b\sin\theta}\\&\geq\frac{\sqrt{2b^2}}{b\sin\theta}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}\geq\sqrt{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.