ЗАНИМЛИВОСТИ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Природните броеви се неисцрпна инспирација на бројни математичари, кои ги проучваат од памтивек. Нивниот труд, покрај теориските резултати, довел до откривање на низа занимливости во множеството природни броеви. Во овој напис ќе презентираме некои релации меѓу природните броеви, кои поради својата привлечност, веруваме, ќе го побудат вашето внимание.

1. "Комутирачки" двоцифрени броеви

За неколку парови двоцифрени броеви важи следното интересно својство: Производот на еден таков пар броеви не се менува, ако цифрите кај секој множител си ги разменат местата. На пример:

$$12\cdot 42=21\cdot 24 \quad \text{или} \quad 36\cdot 84=63\cdot 48.$$

Постојат и други парови "комутирачки" двоцифрени броеви кои го имаат разгледуваното својство. Како е дојдено до нив? Веројатно и сами го насетувате одговорот: треба да ја решиме равенката

$$\overline{xy}\cdot\overline{ab}=\overline{yx}\cdot\overline{ba}$$

т.е.

$$(10x+y)(10a+b)=(10y+x)(10b+a), \tag{1}$$

каде што x, y, a, b се цифри, различни од нула. Притоа ја добиваме релацијата $99ax=99by$, т.е.

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{a}. \tag{2}$$

Имајќи ја предвид релацијата (2), можете да ги запишете сите парови "комутирачки" двоцифрени броеви. Сторете го тоа сами и утврдете колку такви парови има.

2. За равенката $a^3+b^3+c^3+...=(a+b+c+...)^2$

Францускиот математичар Луивил, разгледувајќи ја равенката

$$a^3+b^3+c^3+...=(a+b+c+...)^2 \tag{3}$$

и барајќи нејзини решенија во множеството природни броеви, дошол до интересен резултат, кој ќе го објасниме на следниот пример:

Делители на бројот 24 се броевите: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Секој од овие броеви има точно

$$1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \tag{*}$$

делители, соодветно. Броевите во низата (*) се решенија на равенката (3). Навистина

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+8^3=(1+2+2+3+4+5+6+8)^2.$$

Едноставно, но ефикасно, зар не? Проверете ја оваа постапка за други броеви.

3. Триаголник на Никомах

Античкиот математичар Никомах од непарните природни броеви го составил следниот триаголник: во првиот ред го запишал бројот 1, во вториот ред броевите 3 и 5, во третиот ред броевите 7, 9, 11, во четвртиот ред наредните четири непарни природни броеви, итн. (Како што е покажано).

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	
31	33	35	37	39	41
..	..	..	..	..	..

Притоа тој докажал дека збирот на броевите запишани во n-от ред е n^3. Проверете го тоа за испишаните редови во табелата.

Во врска со триаголникот на Никомах ќе разгледаме две задачи.

Задача 1. *Ако a_n е првиот член во n-от ред на триаголникот на Никомах, тогаш $a_n = n^2 - n + 1$. Докажи!*

Решение. Задачата ќе ја решиме со математичка индукција. За $n = 1$ тврдењето е очигледно: $a_1 = 1 - 1 + 1 = 1^3$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = k > 1$, т.е. дека важи $a_k = k^2 - k + 1$. Ако $n = k + 1$, тогаш бројот a_{k+1} е $(k+1)$-от член на аритметичка прогресија со почетен член на аритметичка прогресија со почетен член a_k и диференција $d = 2$, па имаме:

$$a_{k+1} = a_k + (k+1-1)\cdot 2 = k^2 - k + 1 + 2k = (k+1)^2 - (k+1) + 1$$

Значи, ако тврдењето е точно за a_k, тогаш е точно и за a_{k+1}, па според принципот на математичката индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број n.

Задача 2. *Докажи дека збирот на броевите во n-от ред на триаголникот на Никомах е n^3.*

Решение. Во n-от ред на триаголникот на Никомах има n последователни непарни природни броеви. Тие се членови на аритметичка прогресија со диференција 2 и прв член $n^2 - n + 1$, што покажавме во претходната задача. Нивниот збир е:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2(n^2 - n + 1) + (n-1)^2\right) = \frac{n}{2}\left(2n^2 - 2n + 2 + 2n - 2\right) = n^3.$$

4. Интересни констелации на броеви

Како и ѕвездите, и броевите можат да бидат групирани во разни констелации. Една таква констелација чинат броевите: 2, 3, 7 и 1, 5, 6. Таа е интересна по тоа што збирот на првите три броја е еднаков на другите три. И уште повеќе, еднакви се и збировите на нивните квадрати. Значи:

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6 \quad \text{и} \quad 2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2$$

Сигурно се запрашавте дали само овие броеви го имаат ова интересно својство и како е дојдено до нив. За да одговориме на овие прашања, треба, во множеството на природните броеви, да го решиме системот равенки

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2. \end{cases}$$

Овој систем има бесконечно многу решенија во N. Уште во 1750 - 51 година Ојлер и Голдбах го наоѓаат следното решение на системот (4):

$$(5) \qquad \begin{matrix} x_1=a+c, & x_2=b+c, & x_3=2a+2b+c; \\ y_1=c, & y_2=2a+b+c, & y_3=a+2b+c, \end{matrix}$$

каде што a, b, c се кои било природни броеви. На пример, за $a=1$, $b=2$, $c=3$ од (5) ги добиваме броевите: 2, 3, 7 и 1, 5, 6.

Ојлер и Голдбах најдоа уште едно решение (друга група од формули) за системот (4):

$$\begin{matrix} x_1=ad, & x_2=bc, & x_3=ac+bd; \\ y_1=ac, & y_2=bd, & y_3=ad+bc, \end{matrix}$$

каде што a, b, c, d се произволни природни броеви.

Но, упорноста на математичарите е општопозната. Трагајќи по нови "*бројни куриозитети*", дојдоа до многу интересни "откритија", како на пример следните релации:

$$48^2+53^2+62^2=26^2+35^2+84^2$$

$$43^2+52^2+68^2=86^2+25^2+34^2$$

Во овие равенства броевите од десната страна на равенството се "обратни" на броевите од левата страна. Забележуваме и уште едно убаво својство на овие равенства: цифрите се поставени симетрично во однос на знакот за еднаквост.

Како е дојдено до овие, навистина занимливи, равенства?

Прво одредуваме две групи од по три броја, така што збирот од квадратите на броевите од првата група да биде еднаков на збирот од квадратите на броевите од втората група. На пример:

$$4^2+5^2+6^2=2^2+3^2+8^2.$$

Потоа од цифрите 4, 5, 6 и 2, 3, 8 образуваме три двоцифрени броеви, чии десетки се броевите од првата група, а единиците се броевите од втората група. (Притоа, цифрите можеме да ги комбинираме сосема слободно. За овие шест броја постојат вкупно шест можности). По таков начин ќе добиеме три двоцифрени броеви, чиј збир на квадратите ќе биде еднаков на збирот на квадратите на нивните "обратни" броеви. На пример:

$$42^2+58^2+63^2=36^2+85^2+24^2.$$

Треба да бидеме задоволни, бидејќи уште една "препрека" е совладана. Но, и љубопитни. Математичката љубопитност "влече напред". И во овој случај е присутна идејата за генерализација на задачата. Зошто да бидат само три броја? Зар не може таа законитост да важи (како што математичарите најчесто велат) за произволен природен број n. И - потрагата по одговорот започнува.

Се тргнува од равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \tag{6}$$

и се бара барем едно нејзино решение на множеството $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Ова е посложениот дел од задачата.

Потоа е лесно, бидејќи за секои $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, кои што ја задоволуваат равенката (6) го задоволуваат и равенството

$$\overline{x_1y_1}^2 + \overline{x_2y_2}^2 + \ldots + \overline{x_ny_n}^2 = \overline{y_nx_n}^2 + \ldots + \overline{y_2x_2}^2 + \overline{y_1x_1}^2 \tag{7}$$

Докажете го ова тврдење сами, а потоа проверете го за броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Внимавајте, прво треба броевите да ги поделите во две групи за кои важи (6), а потоа формирајте, по сопствен избор, четири двоцифрени броеви, за коишто важи (7). Такви се, на пример броевите:

$$13, 42, 58, 57, 68, 97.$$

За нив, освен (7) точно е и равенството

$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3 = 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3.$$

На крајот ја наведуваме најинтересната констелација на броеви:

$$\begin{aligned}
1+6+7+17+18+23 &= 2+3+11+13+21+22\\
1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2 &= 2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2\\
1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3 &= 2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3\\
1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4 &= 2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4\\
1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5 &= 2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5
\end{aligned}$$

"Клучот" за добивање на овие (и на други) броеви од оваа констелација е идентитетот:

$$a^n + (a+4b+c)^n + (a+b+2c)^n + (a+9b+4c)^n + (a+6b+5c)^n + (a+10b+6c)^n =$$

$$= (a+b)^n + (a+c)^n + (a+6b+2c)^n + (a+4b+4c)^n + (a+10b+5c)^n + (a+9b+6c)^n,$$

којшто важи за произволни броеви a, b и c и за вредности на n од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Димитар Марков
Илија Јанев
Ристо Малчески

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ