XXVIII олимпијада

1. Нека $S_n=\{1,2,...,n\}$. Со $P_n(k)$ го означуваме бројот на пермутации на множеството S_n кои имаат точно k фиксни точки $(k\geq 0, n\geq 1)$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$$

Забелешка. j е фиксна точка за пермутацијата f ако $f(j)=j$.

Решение. *Прв начин*. Јасно, $P_n(k)=\binom{n}{k}P_{n-k}(0)$, за $0\leq k\leq n$, при што ставаме $P_0(0)=1$. Тогаш,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)&=\sum_{k=1}^{n} kP_n(k)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}P_{n-k}(0)\\&=\sum_{k=0}^{n} k\tfrac{n!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(0)\\&=n\sum_{k=1}^{n}\tfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}P_{(n-1)-(k-1)}(0)\\&=n\sum_{j=0}^{n}\tfrac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}P_{n-1-j}(0)\\&=n\sum_{j=0}^{n-1}P_{n-1}(j)=n(n-1)!=n!.\end{aligned}$$

Втор начин. На секоја пермутација од множеството S_n ѝ придружуваме $n-$торка $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ при што $a_i=1$ ако i е фиксна точка за таа пермутација и $a_i=0$ ако i не е фиксна точка. Од дефиницијата на бројот $P_n(k)$ следува дека постојат точно $P_n(k)$ $n-$ торки во кои има точно k координати кои се еднакви на 1. Според тоа, збирот $\sum\limits_{k=0}^{n} kP_n(k)$ е еднаков на бројот на единиците во сите можни $n!$ пермутации. Да фиксираме произволен број $i, 1\leq 1\leq n$. Меѓу сите $n!$ пермутации, бројот на оние за кои $a_i=1$ е $(n-1)!$. Затоа вкупниот број на сите единици во сите $n!$ пермутации изнаесува $n(n-1)!$, т.е. $\sum\limits_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$.

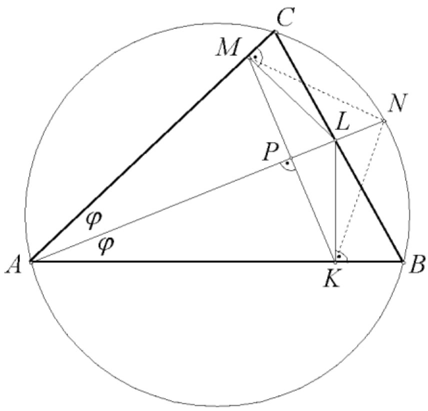
Забелешка. Може да се докаже дека

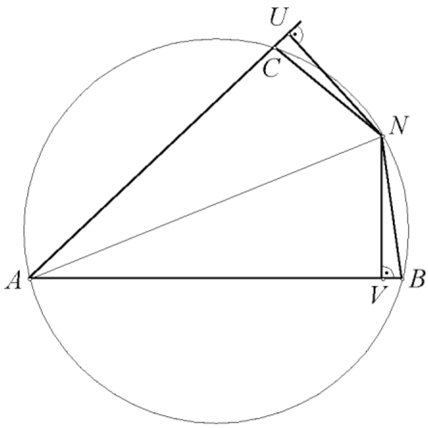
$$P_n(k)=\tfrac{n!}{k!}(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-...+(-1)^{n-k}\tfrac{1}{(n-k)!}).$$

2. Низ темето A на остроаголниот $\triangle ABC$ повлечена е симетрала на аголот, која ја сече страната BC во точка L, а кружницата опишана околу триаголни-

кот ABC во точки A и N. Од L на AB и на AC се спуштени нормали LK и LM, соодветно, при што $K \in AB$, $M \in AC$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $AKNM$ е еднаква на плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Нека точките се означени како на долниот лев цртеж. Имаме, $LM \perp AC$, $LK \perp AB$; $\triangle ALM \cong \triangle ALK$ па според тоа $\overline{ML} = \overline{LK}$. Тоа значи





$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABL} + P_{\triangle ALC} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{LK} + \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{LM} = \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})\cdot\overline{LK}$$

$$P_{AKNM} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ANM} = \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{KP} + \tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{MP} = \overline{AN}\cdot\overline{KP}$$

$$= \overline{AN}\cdot\overline{AK}\sin\phi = \overline{AN}\cdot\overline{AL}\sin\phi\cos\phi = \overline{AN}\cdot\overline{LK}\cos\phi.$$

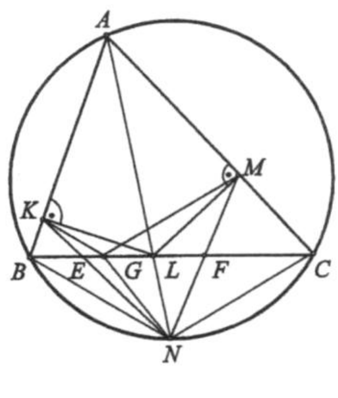
Значи,

$$P_{\triangle ABC} = P_{AKNM} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \overline{AN}\cos\phi.$$

Ова е точно бидејќи $\triangle NVB \cong \triangle NUC$, (цртеж десно горе), па според тоа

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}) = \tfrac{1}{2}(\overline{AV}+\overline{VB}+\overline{AU}-\overline{UC}) = \overline{AV} = \overline{AN}\cos\phi.$$

Втор начин. Нека $KN \cap BC = E$ и $MN \cap BC = F$ (цртеж десно). Четириаголникот $AKLM$ е тетивен бидејќи $\measuredangle AKL = \measuredangle AML = 90^\circ$. Кружницата опишана околу $AKLM$ ја сече правата BC освен во точката L уште и во точката G. Ако оваа кружница ја допира правата BC, тогаш $G \equiv L$. Ќе претпоставиме (види цртеж) дека точката G е меѓу точките B и L. Случаите кога G е меѓу L и C или кога $G \equiv L$ се разгледуваат аналогно.



Од условот на задачата и изборот на точката G следува

$$\measuredangle MGL = \measuredangle MAL = \measuredangle BAN = \measuredangle BCN.$$

Затоа $GM \parallel NC$ и четириаголникот $MGNC$ е трапез. Исто така

$$\measuredangle KGB = 180^\circ - \measuredangle KGL = \measuredangle KAL = \measuredangle NAC = \measuredangle CBN ,$$

па затоа $KG \parallel BN$ и четириаголникот $KGNB$ е трапез. Од тоа што четириаголникот $MGNC$ е трапез следува $P_{\triangle GNF} = P_{\triangle CMF}$, а од тоа што четириаголникот $KGNB$ е трапез следува $P_{\triangle NGE} = P_{\triangle KBE}$. Од овие две равенства следува равенството $P_{\triangle ABC} = P_{AKNM}$.

3. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$, не сите еднакви на нула и такви што $| a_i | \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ и

$$| a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n | \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} .$$

Решение. *Прв начин*. Доволно е да го разгледаме случајот кога сите $x_i \geq 0$ (бидејќи ако најдеме такви a_i кои ги задоволуваат условите за $(| x_1 |, | x_2 |, ..., | x_n |)$, ќе добиеме соодветни за $(x_1, x_2, ..., x_n)$ со промена на знакот на a_i за негативните x_i). Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i | \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n} .$$

Бидејќи $| a_i | \leq k-1$ за $i = 1, 2, ..., n$ добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i | \leq (k-1) \sum_{i=1}^{n} | x_i | \leq (k-1)\sqrt{n} ,$$

што значи, сите збирови од облик $\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |$ за $a_i \in \{0, 1, 2, .., k-1\}$, $i = 1, 2, ..., n$ припаѓаат на интервалот $[0, (k-1)\sqrt{n}]$. Овој интервал го делиме на $k^n - 1$ интервали со еднакви должини. Според принципот на Дирихле, бидејќи збирови од горниот облик има k^n, два од добиените збирови за различни $n-$торки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ мора да се наоѓаат во ист интервал. Нека тоа се збировите $\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |$ и $\sum_{i=1}^{n} | b_i x_i |$, за кои важи

$$0 < | \sum_{i=1}^{n} | b_i x_i | - \sum_{i=1}^{n} | a_i x_i | | \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} ,$$

$$0 < | \sum_{i=1}^{n} (| b_i | - | a_i |) | x_i | | \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1} .$$

Дефинираме броеви c_i, $i=1,2,...,n$ на следниов начин:

$$c_i=\begin{cases}|b_i|-|a_i|, & x_i\geq 0,\\ |a_i|-|b_i|, & x_i<0.\end{cases}$$

Броевите c_i, $i=1,2,...,n$ се цели, не се сите еднакви на нула и $|c_i|\leq k-1$. Освен тоа, $c_ix_i=|(|b_i|-|a_i|)|x_i|$, па затоа важ- неравенството

$$|c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n|\leq\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

Втор начин. Ако претпоставиме дека $|a_i|\leq k-1$ за $i=1,2,...,n$ и земеме предвид дека $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$, тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ix_i|\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leq(k-1)\sqrt{n}.$$

Понатаму продолжуваме како при првиот начин на решавање на задачата.

4. Докажи дека не постои функција $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ таква што

$$f(f(n))=n+1987\text{, за секој } n\in\mathbb{N}_0.$$

Решение. Ако постои таква функција f, тогаш

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987,$$

од што со индукција добиваме

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k\text{, за } k,n\in\mathbb{N}_0.$$

Од множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ избираме произволен број m и нека

$$f(m)=1987q+r,\ q,r\in\mathbb{N}_0,\ r\leq 1986.$$

Тогаш

$$f(f(m))=f(1987q+r)=f(r)+1987q\text{ и } f(f(m))=m+1987,$$

па затоа

$$f(r)+1987q=m+1987.$$

Но, $m\leq 1986$, па затоа $q=0$ или $q=1$. Ако $q=1$, тогаш $f(m)=1987+r$ и $f(r)=m$, па не е можно да биде $r=m$. Ако $q=0$, тогаш $f(m)=r$ и $f(r)=m+1987$ и пак не е можно да биде $r=m$. Значи, множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ е поделено на парови (r,m) такви што $r\neq m$ и

$$f(m)=1987+r\text{ и } f(r)=m\text{ или } f(m)=r\text{ и } f(r)=m+1987.$$

Последното противречи на фактот дека множеството $\{0,1,2,...,1986\}$ има непарен број елементи.

5. Докажи дека за секој природен број $n\geq 3$ во рамнината постојат n точки, такви што

а) растојанието меѓу било кои две од нив е ирационален број,
б) секои три точки определуваат недегенериран триаголник (т.е. се неколинеарни) и тој триаголник има рационална плоштина.

Решение. *Прв начин*. Произволно избираме n точки во јазлите на целобројна решетка, такви што било кои три од нив не се колинеарни, кои ги означуваме со $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, плоштината на секој триаголник $T_i T_j T_k$ е цел број или половина од цел број. Навистина, секоја од нив е разлика на плоштина на правоаголник и плоштини на правоаголни триаголници чии должини на катети се природни броеви.

Нека $S = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \,|\, i \neq j; i, j = 1, 2, ..., n\}$. Избираме прост број $p > \max S$. Земаме хомотетија χ со центар во еден од јазлите на решетката и коефициент $k = \sqrt{p}$, и ги разгледуваме точките $\chi(T_i), i = 1, 2, ..., n$. Плоштините на новодобиените триаголници се рационални броеви, бидејќи старите плоштини се зголемуваат p пати. Должините на сите отсечки сега се зголемуваат $\sqrt{p}$ пати, т.е. тие припаѓаат на множеството $\{\sqrt{ps} \,|\, s \in S\}$. Според изборот на бројот p бројот sp е делив со p, но не е делив со p^2. Значи, sp не е точен квадрат, па $\sqrt{sp}$ и ирационален број за секој $s \in S$.
Јасно, сликите при разгледуваната хомотетија на вака избраните n точки ги задоволуваат условите на задачата.

Втор начин. Во координатната рамнина избираме точки $T_i(i, i^2), i = 1, 2, ..., n$. Очигледно дека плоштината на секој триаголник $T_i T_j T_k$ е рационален број лесно се докажува дека

$$|T_i T_k| = \sqrt{(k-i)^2 + (k^2 - i^2)^2} = (k-i)\sqrt{1 + (i+k)^2}$$

за $i < k$ е ирационален број.

6. Даден е природен број $p, p \geq 2$. Докажи дека ако бројот $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{p}{3}}$, тогаш $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \leq k \leq p - 2$.

Решение. Нека $f(x) = x^2 + x + p$ и нека y е најмалиот природен број таков што $y \leq p - 2$ и $f(y)$ не е прост број и q е најмалиот прост делител на $f(y)$. Ќе докажеме дека $q > 2y$.
Да го претпоставиме спротивното, т.е. $q \leq 2y$. Од

$$f(y) - f(x) = (y - x)(y + x + 1),$$

следува дека кога x се менува од 0 до $y-1$, $y-x$ се менува од 1 до y, а $y+x+1$ се менува од $y+1$ до $2y$. Ако $q \leq 2y$, тогаш ќе постои x, $0 \leq x \leq y-1$, таков што $q | f(y)-f(x)$. Меѓутоа $f(x)$ е прост број и $q | f(y)$, па затоа мора да е $f(x)=q$. Сега од

$$y-x \leq p-2 < p+x+x^2 = f(x)=q \text{ и}$$

$$y+x+1 \leq p+x-1 < p+x+x^2 = f(x)=q$$

следува дека $f(x)=q \nmid (y-x)(y+x+1)$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $q > 2y$.

Бројот q е најмал прост делител на $f(y)$ па затоа $q \leq \sqrt{f(y)}$, т.е. $f(y) \geq q^2$. Затоа

$$y^2+y+p \geq (2y+1)^2 = 4y^2+4y+1,$$

односно $y < \sqrt{\frac{p}{3}}$, што противречни на претпоставката. Затоа x^2+x+p е прост број за секој цел број k таков што $0 \leq k \leq p-2$.