

Регионален натпревар 1990

I година

1. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $n^7 - n$ е делив со 7.

Решение. Доволно е да докажеме дека за $n=1,2,3,4,5,6,7$ бројот $n^7 - n$ е делив со 7. Имаме:

$$\begin{aligned} 1^7 - 1 &= 0, & 2^7 - 2 &= 126 = 7 \cdot 18, & 3^7 - 3 &= 2184 = 7 \cdot 312, \\ 4^7 - 4 &= 16380 = 7 \cdot 2340 & 5^7 - 5 &= 78120 = 7 \cdot 11160 & 6^7 - 6 &= 279930 = 7 \cdot 39990 \\ 7^7 - 7 &= 7(7^6 - 1). \end{aligned}$$

2. Да се упрости изразот

$$\frac{x^{12} + 28x^6 + 4096}{(x^3 - 4x^2 + 8x - 8)^2}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} x^{12} - 128x^6 + 4096 &= (x^6 - 64)^2 = (x^3 - 8)^2 (x^3 + 8)^2 \\ &= (x-2)^2 (x^2 + 2x + 4)^2 (x+2)^2 (x^2 - 2x + 4)^2 \\ x^3 - 4x^2 + 8x - 8 &= (x^3 - 8) - 4x(x-2) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4 - 4x) \\ &= (x-2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

Значи,

$$\begin{aligned} \frac{x^{12} + 28x^6 + 4096}{(x^3 - 4x^2 + 8x - 8)^2} &= \frac{(x-2)^2 (x^2 + 2x + 4)^2 (x+2)^2 (x^2 - 2x + 4)^2}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 4)^2} \\ &= (x+2)^2 (x^2 + 2x + 4)^2. \end{aligned}$$

3. По патеката покрај стрмна пруга се движи пешак (по надолнина) со брзина од 6 km/h. Тој забележал дека возот што доаѓа од спротивен правец минува крај него за 12,6 секунди. Со истиот воз, со кој по угорнина се движел со брзина од 3,6 km/h се разминувал 15 секунди. Колку е долг возот и колкава му е брзината?

Решение. Нека брзината на возот е x m/sec, а неговата должина е y m. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} 12,6x + 6 \cdot 12,6 = y \\ 15x - 3,6 \cdot 15 = y \end{cases}$$

Од каде добиваме $x = 15$, $y = 210$. Значи, брзината на возот е 15 m/sec = 54 km/h, а неговата должина е 210 m.

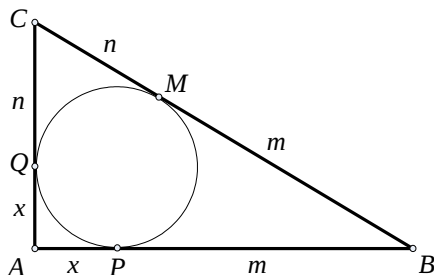
4. Даден е правоаголен триаголник ABC и во него е впишана кружница, која што ја допира хипотенузата BC во точката M . Ако $\overline{BM} = m$, $\overline{MC} = n$, тогаш

$$P_{ABC} = mn.$$

Докажи!

Решение. Нека P и Q се допирните точки на впишаната кружница со катетите AB и AC соодветно (види цртеж). Тогаш имаме $\overline{BP} = \overline{BM} = m$, $\overline{CQ} = \overline{CM} = n$. За плоштината P_{ABC} имаме:

$$\begin{aligned} 2P_{ABC} &= (x+m)(x+n) \\ &= x^2 + (m+n)x + mn. \end{aligned}$$



Според Питагоровата теорема,

$$(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2,$$

т.е. $x^2 + (m+n)x = mn$, што значи дека $P_{ABC} = mn$.

II година

1. Нека

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

каде i е имагинарна единица. Пресметај $f(1986) + f(1990)$!

Решение. Ако $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, тогаш $z_1^2 = i$, $z_2^2 = -i$, $z_1^4 = z_2^4 = -1$. Користејќи го тоа, добиваме:

$$\begin{aligned} f(1986) + f(1990) &= z_1^{1986} + z_2^{1986} + z_1^{1990} + z_2^{1990} \\ &= z_1^{1986}(1 + z_1^4) + z_2^{1986}(1 + z_2^4) \\ &= z_1^{1986}(1 - 1) + z_2^{1986}(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

2. Ако a, b, c се непарни броеви, тогаш корените на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ не се рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $a = 2k+1$, $b = 2m+1$, $c = 2n+1$, тогаш

$$\begin{aligned} D &= (2m+1)^2 - 4(2k+1)(2n+1) = 4m(m+1) - 8(2kn+k+n) - 3 \\ &= 4m(m+1) - 8(2kn+k+n+1) + 5 \end{aligned}$$

Бројот $m(m+1)$ е парен, па бројот $4m(m+1)$ е делив со 8. Значи, $D = 8p+5$. За корените на равенката да бидат рационални броеви, треба $D = 8p+5$ да биде потполн квадрат. Но D е непарен број па $D = (2q+1)^2 = 4q(q+1)+1$, т.е. D не

може да биде потполн квадрат. Следователно, корените на равенката не може да се рационални броеви.

3. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 341 \\ xy + yx^2 = 330 \end{cases}$$

Решение. Ако втората равенка ја помножиме со 3, а потоа двете равенки ги собереме, добиваме $(x+y)^3 = 11^3$, од каде што $x+y=11$. Заменувајќи во втората равенка добиваме $xy=30$. На крајот имаме $x=5, y=6$ или $x=6, y=5$.

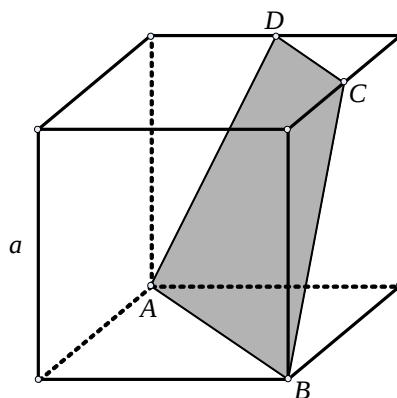
4. Коцка со раб a пресечена е со рамнина која минува низ дијагоналата на еден сид и низ средините на два соседни раба од спротивниот сид. Да се пресмета плоштината на пресекот.

Решение. Пресекот $ABCD$ (види цртеж) е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB} = a\sqrt{2}$, $\overline{CD} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и крак $\overline{BC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. За висината h на трапезот ќе имаме

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2})\right)^2 = \frac{9a^2}{8}.$$

Значи,

$$P = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$



III година

1. Да се реши равенката

$$5^x \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500.$$

Решение. Со степенување на дадената равенка добиваме

$$5^{x^2} \cdot 8^{x-1} = 2^{2x} \cdot 5^{3x}, \text{ т.е. } 5^{x^2-3x} = 2^{3x}.$$

Понатаму, со логаритмирање ќе имаме

$$(x^2 - 3x) \log_2 5 = 3 - x,$$

$$(x-3)(x \log_2 5 + 1) = 0$$

од каде што добиваме $x_1 = 3, x_2 = -\log_5 2$.

2. Да се реши равенката

$$\log_{(3x+7)}(9+12x+4x^2) + \log_{(2x+3)}(6x^2+23x+21) = 4.$$

Решение. Бидејќи

$$9 + 12x + 4x^2 = (3 + 2x)^2, \quad 6x^2 + 23x + 21 = (2x + 3)(3x + 7),$$

дадената равенка се сведува на равенката

$$2\log_{(3x+7)}(2x+3) + 1 + \log_{(2x+3)}(3x+7) = 4,$$

т.е.

$$2[\log_{(3x+7)}(2x+3)]^2 - 3\log_{(3x+7)}(2x+3) + 1 = 0,$$

од каде што добиваме

$$\log_{(3x+7)}(2x+3) = 1, \quad \log_{(3x+7)}(2x+3) = \frac{1}{2}.$$

Решавајќи ги овие равенки добиваме $x_1 = -4$, $x_2 = -2$ и $x_3 = -\frac{1}{4}$. Лесно се проверува дека решение на равенката е само $x_3 = -\frac{1}{4}$.

3. Во конус се поставени две топки со радиуси 2 и 1. Поголемата топка ја допира основата и обвивката. Да се пресмета волуменот на конусот.

Решение. Да го разгледаме напречниот пресек на конусот (види цртеж). Нека $\overline{CO_1} = x$. Од сличноста на триаголниците CO_1M и CO_2N добиваме

$$\overline{CO_1} : \overline{CO_2} = \overline{O_1M} : \overline{O_2N}, \text{ т.е. } x : (x+3) = 1 : 2,$$

од каде што $x = 3$. За висината H на конусот ќе имаме

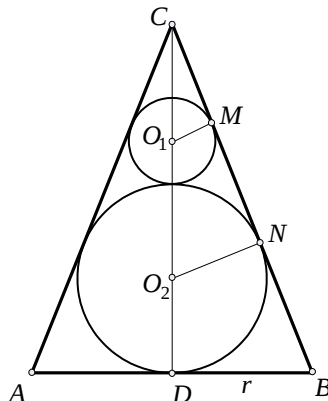
$$H = \overline{CD} = \overline{CO_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2D} = 8.$$

Од сличноста, на триаголниците CO_1M и CDB добиваме

$$\overline{O_1M} : \overline{CM} = r : \overline{CD}.$$

Бидејќи $\overline{O_1M} = 1$, $\overline{CD} = 8$ и $\overline{CM}^2 = \overline{O_1C}^2 - \overline{O_1M}^2 = 8$, добиваме $r = 2\sqrt{2}$. Значи,

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{64\pi}{3}.$$



4. Да се докаже дека

$$\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ \cos 72^\circ &= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} \\ &= \frac{2 \cos 72^\circ \sin 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} \\ &= \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

IV година

1. Ако $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, тогаш $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$ ја добиваме равенката

$$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0 \text{ чии решенија се}$$

$$x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Бидејќи $\frac{1}{x_1} = x_2$, имаме:

$$\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n \\ &= \cos n\alpha + i \sin n\alpha + \cos n\alpha - i \sin n\alpha \\ &= 2 \cos n\alpha. \end{aligned}$$

Втор начин. Нека

$$S_n = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

Прво да забележиме дека

$$S_{n+1} = S_n S_1 - S_{n-1}.$$

Да претпоставиме дека равенството важи за секој природен број помал или еднаков на n . Тогаш имаме

$$S_{n+1} = 4 \cos n\alpha \cos \alpha - 2 \cos(n-1)\alpha = 2(2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha) = 2 \cos(n+1)\alpha$$

Следствено, според принципот на математичка индукција, равенството важи и за секој природен број.

2. Нека A_1 е средината на отсечката AB . Со A_2 ја означуваме средината на AA_1 , со A_3 средината на A_1A_2 , со A_4 средината на A_2A_3 итн. Да се најде границата кон која тежи низата од должините на отсечките $AA_1, AA_2, AA_3, \dots$

Решение. Нека $\overline{AB} = a$; тогаш

$$\overline{AA_n} = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \frac{a}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).$$

Значи,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{AA_n} = \frac{a}{3}.$$

3. Да се докаже дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. За таа цел, левата страна на даденото неравенство да ја означиме со S_n . Имаме

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Да претпоставиме дека $S_k > 1$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \\ &= S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ &= S_k + \frac{1}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > S_k > 1 \end{aligned}$$

Значи, според принципот на математичката индукција, неравенството е точно за секој природен број n .

4. Дадена е отсечка AB ($\overline{AB} = 2a$). Да се најде геометриско место на точките M , за кои важи $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2c$ ($c = \text{const}$).

Решение. Избираме правоаголен координатен систем, така што x -оската е правата AB , а y -оската симетралата на отсечката AB . Тогаш имаме $A(-a, 0)$,

$B(a, 0)$. Од условот $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2c$, добиваме

$$(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2 = 2c$$

Од каде што, пак, добиваме $x = \frac{c}{2a}$. Значи, бараното геометриско место е права нормална на отсечката AB .

