

Регионален натпревар 2005

I година

1А. Од 7 листови хартија одреден број листови се исечени на по 10 делови. Од добиените листови, одреден број листови повторно е исечен на по 10 делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 2005 листови?

Решение. Нека во првиот чекор се исечени n_1 листови. Тогаш после сечењето ќе има вкупно

$$10n_1 + (7 - n_1) = 7 + 9n_1$$

листови (при тоа $1 \leq n_1 \leq 7$). Ако во вториот чекор се исечени n_2 листови ќе се добијат вкупно

$$10n_2 + (7 + 9n_1 - n_2) = 7 + 9n_1 + 9n_2$$

листови. Продолжувајќи на сличен начин заклучуваме дека при секое ново сечење, бројот на листовите се зголемува за некој број помножен со 9. Според тоа, на крајот, ќе има вкупно $7 + 9n$ листови. Значи треба да важи равенството $2005 = 7 + 9n$, т.е. $9n = 1998$. Бројот 1998 е делив со 9 значи одговорот е потврден.

1Б. Во златарска работилница треба да се направи 9 kg смеса во која златото и среброто ќе бидат во однос 7:11. На залиха има две смеси. Во првата количествата злато и сребро се наоѓаат во однос 4 : 5, а во втората во однос 2 : 5. По колку треба да се земе од секоја смеса, за да се добие новата смеса во зададениот однос?

Решение. Нека во новата смеса има a kg злато и b kg сребро. Од системот

$$\begin{cases} a : b = 7 : 11 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

се добива дека $a = 3,5$ и $b = 5,5$. Нека од првата смеса се земени x kg, а до втората y kg. Тогаш во новата смеса ќе има $(\frac{4}{9}x + \frac{2}{7}y)$ kg злато и $(\frac{5}{9}x + \frac{5}{7}y)$ kg сребро, т.е.

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x + \frac{2}{7}y = 3,5 \\ \frac{5}{9}x + \frac{5}{7}y = 5,5 \end{cases},$$

од каде се добива дека $x = 5,85$ и $y = 3,15$.

2. Ако за реалните броеви x , y и z важи $xyz = 1$, докажи дека:

$$(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 + (z + \frac{1}{z})^2 - (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})(z + \frac{1}{z}) = 4.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
& \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = \\
& = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{xyz}(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \\
& = 6 + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}{x^2 y^2 z^2} - (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \\
& = 6 + x^2 + y^2 + z^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 - (x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1)(z^2 + 1) \\
& = 6 + x^2 + y^2 + z^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 - \\
& \quad - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 - x^2 z^2 - x^2 - y^2 z^2 - y^2 - z^2 - 1 \\
& = 6 - x^2 y^2 z^2 - 1 = 6 - 1 - 1 = 4,
\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

3. Три отсечки ги сврзуваат средината на висината на тетраедар со темињата на основата. Докажи тие се попарно нормални меѓу себе.

Решение. Нека

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = a,$$

SO -висина во тетраедарот $ABCS$, и O_1

-середина на SO . Тогаш

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

каде D е подножје на висината на ABC ,

кој е рамностран. Тогаш

$$\overline{SO} = \sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

па е $\overline{OO_1} = \frac{1}{2} \overline{SO} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Конечно,

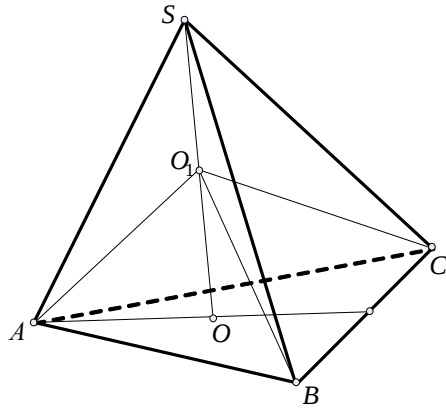
$$\overline{AO_1} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OO_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Слично се добива $\overline{BO_1} = \overline{CO_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Бидејќи,

$$\overline{AO_1}^2 + \overline{BO_1}^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 = \overline{AB}^2$$

следува дека $\triangle ABO_1$ е правоаголен со $\angle AO_1 B = 90^\circ$ од каде $AO_1 \perp BO_1$. Слично,

се докажува дека $AO_1 \perp CO_1$ и $BO_1 \perp CO_1$ што требаше да се докаже.



4A. Може ли бројот $a+b+c+d$ да биде прост, ако $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ и важи $ab = cd$?

Решение. Од $ab = cd$ имаме

$$d = \frac{ab}{c} \Rightarrow c = m \cdot n, a = ma_1, b = nb_1, m, n, a_1, b_1 \in \mathbb{N}.$$

Сега: $d = \frac{ab}{c} = a_1b_1$, па

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= ma_1 + mb_1 + mn + a_1b_1 \\ &= (ma_1 + mn) + (nb_1 + ab_1) \\ &= m(a_1 + n) + b_1(a_1 + n) \\ &= (a_1 + n)(m + b_1). \end{aligned}$$

Бидејќи $a_1, b_1, m, n \geq 1 \Rightarrow a_1 + n \geq 2, m + b_1 \geq 2$, па $(a_1 + n)(m + b_1)$ е сложен број т.е. $a + b + c + d$ не може да биде прост број.

4Б. Од првите 10 000 природни броеви колку се такви што завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$?

Решение. Бидејќи 5^m завршува на 5, треба 8^n да завршува на 6. Имаме

$$8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4096, 8^5 > 10000.$$

Значи $n = 4$ па од

$$5^m + 8^n \leq 10000 \Rightarrow 5^m \leq 5904.$$

Бидејќи

$$5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625,$$

$$5^5 = 3125, 5^6 = 15625, 15625 > 5904 \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Следува дека постојат 5 броја помали од 10 000, кои завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$. Тоа се:

$$4101 = 5^1 + 8^4, 4121 = 5^2 + 8^4, 4221 = 5^3 + 8^4, 4721 = 5^4 + 8^4 \text{ и } 7211 = 5^5 + 8^4.$$

II година

1. Реши го системот:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = n \end{cases}$$

каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ако ги собереме сите равенки од системот добиваме

$$(n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) = 1 + 2 + \dots + n,$$

т.е.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = \frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Ако од последната равенка ја одземеме i -тата равенка на системот се добива

$$x_i = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - i; i = 1, 2, \dots, n.$$

2А. Ако z е комплексен број таков што $|z| = 1$, докажи дека

$$\left| \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \right| = 1, \text{ каде } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Решение. Нека $|z| = 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \right| &= \left| \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \cdot \frac{\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{a_2 z |z|^2 + a_1 |z|^2 + a_0 \bar{z}}{\bar{a}_0 z |z|^2 + \bar{a}_1 |z|^2 + \bar{a}_2 \bar{z}} \right| \\ &= \left| \frac{a_2 z + a_1 + a_0 \bar{z}}{a_0 z + a_1 + a_2 \bar{z}} \right| = \left| \frac{a_2 z + a_1 + a_0 \bar{z}}{a_2 z + a_1 + a_0 \bar{z}} \right| = 1 \end{aligned}$$

2Б. Најди ги сите броеви $n \in \mathbb{N}$, такви што бројот $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ е реален, каде i е имагинарна единица.

Решение. Имаме

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6+5i+i^2}{4-i^2} = 1+i.$$

Разгледувајќи ги степените на $1+i$ заклучуваме дека само за $n = 4k, k$ е природен број, z е реален број.

3. Во правоаголникот $ABCD$, точките P и Q се точки од страните AB и BC соодветно, така што триаголниците APD , PBQ и QCD имаат иста плоштина.

Најди го количникот $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

Решение. Воведуваме ознаки

$$\overline{AP} = p_1, \overline{PB} = p_2, \overline{QB} = q_2 \text{ и } \overline{QC} = q_1.$$

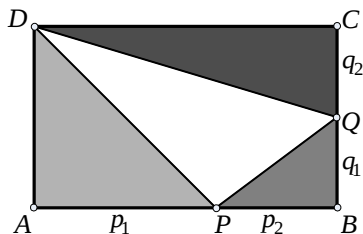
Од равенството

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot q_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) p_1$$

добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$, а од

$$\frac{1}{2}(q_1 + q_2) p_1 = \frac{1}{2} q_2 p_2$$

добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1 + q_2}$.



Според тоа

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1 + q_2} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_2} + 1} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_2} + 1}. \text{ Значи, } \frac{p_1}{p_2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

4А. Производот на еден корен на квадратната равенка $ax^2 + bx + b = 0$ со еден корен на квадратната равенка $ax^2 + ax + b = 0$ е 1.

Најди ги корените на равенките.

Решение. Нека y и z се корени на равенките

$$ax^2 + ax + b = 0 \text{ и } ax^2 + bx + b = 0,$$

соодветно, за кои $yz = 1$. Тогаш $z = \frac{1}{y}$ и $a \frac{1}{y^2} + b \frac{1}{y} + b = 0$, т.е. $by^2 + by + a = 0$. Ако

ги собереме равенките $ay^2 + ay + b = 0$ и $by^2 + by + a = 0$ добиваме

$$(a+b)y^2 + (a+b)y + a + b = 0,$$

т.е.

$$(a+b)(y^2 + y + 1) = 0.$$

Изразот $y^2 + y + 1$ е позитивен, за секој $y \in \mathbb{R}$. Според тоа $a + b = 0$, т.е. $b = -a$.

Значи, равенките се $ax^2 + ax - a = 0$ и $ax^2 - ax - a = 0$. Равенките се квадратни па $a \neq 0$. Според тоа дадените равенки се

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ и } x^2 - x - 1 = 0.$$

Нивни решенија се $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, соодветно.

4Б. Две цевки полнат еден базен. Втората цевка, сама, ќе го наполни базенот за 5 часа подолго отколку првата цевка. Ако се пуштат истовремено двете цевки базенот ќе се наполни за 6 часа. Пресметај за колку време втората цевка може сама да го наполни базенот.

Решение. Нека првата цевка сама го полни базенот за t часа. Тогаш за 6 часа ќе наполни $\frac{6}{t}$ делови од базенот. Според условот втората цевка го полни базенот за $t + 5$ часа. За еден час полни $\frac{1}{t+5}$ делови од базенот, а за 6 часа $\frac{6}{t+5}$ делови од базенот. Бидејќи за 6 часа со истовремена работа на двете цевки базенот ќе се наполни, равенката е:

$$\frac{6}{t} + \frac{6}{t+5} = 1 \Leftrightarrow \frac{6(t+5)+6t}{t(t+5)} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 7t - 30 = 0, (t \neq 0; t \neq -5)$$

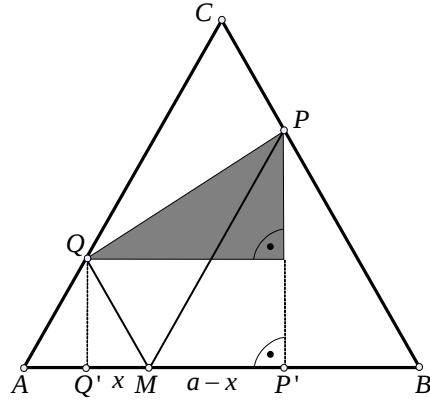
чиј решенија се $t_1 = 10$; $t_2 = -3$.

Бидејќи времето не може да биде негативно единствено решение е $t = 10$. Значи времето потребно втората цевка да го наполни базенот е $t = t + 5$, т.е. 15 часа.

III година

1. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC избрана е точка M . Низ точката M повлечени се прави паралелни со страните BC и AC , при што се добиени точките $P \in BC$ и $Q \in AC$. Одреди ја положбата на точката M така што отсечката PQ да има најмала должина.

Решение. Со повлекувањето на паралелните прави се добиваат триаголниците $\triangle MBP$, $\triangle AMQ$ кои се слични со $\triangle ABC$, па оттука се и рамнострани. Нека P' , Q' се подножјата на нормалите



спуштени од точките P, Q соодветно на страната AB . Нека $\overline{AM} = x$. Тогаш $\overline{MB} = a - x$. Од правоаголниот $\triangle QRP$, $\overline{QP}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2$. Од рамностраните триаголници важи

$$\overline{QQ'} = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{PP'} = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2}.$$

Од друга страна $\overline{PR} = \overline{PP'} - \overline{QQ'}$ па со замена добиваме $\overline{PR} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$. Исто така,

$$\overline{QR} = \overline{Q'P'} = \overline{Q'M} + \overline{MP'} = \frac{x}{2} + \frac{a-x}{2} = \frac{a}{2}.$$

Конечно,

$$\overline{QP}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}\right)^2 = 3x^2 - 3ax + a^2.$$

Отсечката PQ има најмала должина ако $\overline{QP}^2$ има најмала вредност. Бидејќи $\overline{QP}^2$ е квадратна функција по променливата x , нејзиниот график е парабола која има минимум, и тоа во темето $x = -\frac{-3a}{6} = \frac{a}{2}$. Значи, бараната положба на точката M е на растојание $\frac{a}{2}$ од точката A .

2A. Докажи дека $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$, каде a, b, c се должини на страните на триаголник, а α и β се неговите агли.

Решение. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}{\sin^2(\pi-\gamma)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \gamma} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma}.
 \end{aligned}$$

Ако ја искористиме синусната теорема, имаме

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \text{ и } \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c},$$

од каде со замена се добива бараното равенство.

2Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$3^{\log_3 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9.$$

Решение. Дефиниционата област на равенката е $x > 0$ и $x \neq 1$. Логаритмираме со основа 3 и се добиваат еквивалентните равенства

$$\log_3 (3^{\log_3 3} \cdot x^{\log_3 x}) = \log_3 9 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 3 + (\log_3 x)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + (\log_3 x)^2 = 2.$$

Воведуваме смена $\log_3 x = u$, односно $x = 3^u$, со што равенката го добива обликот $\frac{1}{u} + u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow u^3 - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u^2 + u - 1) = 0$. Решенијата на оваа равенка се $u_1 = 1, u_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, па решенијата на почетната равенка се $x_1 = 3$ и $x_{2,3} = 3^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$. Притоа x_1, x_2, x_3 припаѓаат на дефиниционата област.

3А. Докажи дека за секои $a, b \in (0, 1)$ важи неравенството

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1.$$

Решение. Ако $a, b \in (0, 1)$, тогаш и $ab \in (0, 1)$, па $\sqrt{ab} > ab$. Користејќи го ова, и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > ab$, односно $\frac{2ab}{a+b} < 1$. Да означиме $c = \frac{2ab}{a+b}$. Притоа $0 < c < 1$. Да претпоставиме спротивно дека

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} < 1,$$

односно $\log_a c \cdot \log_b c < 1$. Тогаш користејќи ги својствата на логаритмите се добива

$$\frac{1}{\log_c a} \cdot \frac{1}{\log_c b} < 1 \Leftrightarrow \log_c a \cdot \log_c b > 1$$

(логаритмите се добро дефинирани затоа што $a, b, c \in (0, 1)$). Повторно од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_c a + \log_c b}{2} \geq \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}.$$

Според тоа

$$1 < \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b} \leq \frac{\log_c a + \log_c b}{2} = \frac{1}{2} \log_c ab = \log_c \sqrt{ab}.$$

Значи $\log_c \sqrt{ab} > 1 = \log_c c$. Бидејќи $0 < c < 1$, функцијата $\log_c x$ е опаѓачка, па за аргументите важи неравенството $\sqrt{ab} < c = \frac{2ab}{a+b}$. Со квадрирање, последното неравенство го добива обликот $(a+b)^2 < 4ab$, односно $(a-b)^2 < 0$, што не е можно. Според тоа, $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

3Б. Докажи дека во секој остроаголен триаголник важи

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{2sr}{R},$$

каде a, b, c се страните, α, β, γ се аглиите на триаголникот, r, R се радиусите на впишаната и опишаната кружница, соодветно, а s е полусумарот на страните.

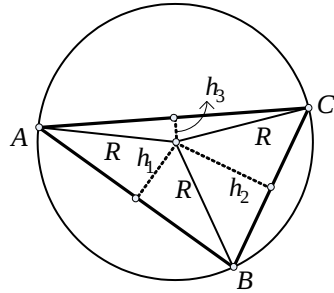
Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот. Важи

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle BOC} + P_{\triangle AOC}. \quad (1)$$

Од триаголникот AOB имаме дека $P_{\triangle AOB} = \frac{ch_1}{2}$,

каде $\frac{h_1}{R} = \cos \gamma$, при тоа користејќи дека $\angle AOB = 2\gamma$ како централен агол за аголот γ над

ист кружен лак. Значи $P_{\triangle AOB} = \frac{cR \cos \gamma}{2}$.



Аналогно се добива дека $P_{\triangle BOC} = \frac{aR \cos \alpha}{2}$ и $P_{\triangle AOC} = \frac{bR \cos \beta}{2}$.

Ако уште земеме предвид дека $P_{\triangle ABC} = sr$ и замениме во (1) се добива

$$sr = \frac{cR \cos \gamma}{2} + \frac{aR \cos \alpha}{2} + \frac{bR \cos \beta}{2} = \frac{R}{2} (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma),$$

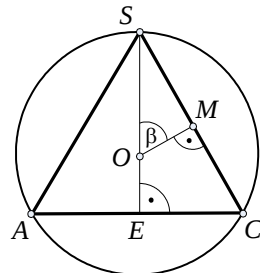
односно

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{2sr}{R},$$

што и требаше да се докаже.

4. Во сфера е впишана пирамида чија основа е правоаголник со дијагонала d . Бочните рабови на пирамидата се наклонети кон рамнината на основата под агол β . Најди го радиусот на сферата.

Решение. Нека O е центарот на сферата опишана околу пирамидата $SABCD$ со основа правоаголникот $ABCD$, нека R е радиусот на сферата, нека E е пресекот



на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ и нека M е средината на работ CS . Тогаш, триаголникот SEC е правоаголен со остар агол $\beta = \angle SCE$, а точката O лежи на правата SE и е еднакво оддалечена од точките S и C , па затоа $OM \perp CS$. Бидејќи $\angle SOM = \angle SCE = \beta$, како агли со заемно нормални краци, имаме

$$R = \overline{OS} = \frac{\overline{SM}}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \frac{\overline{CE}}{\cos \beta \sin \beta} = \frac{d}{2 \sin 2\beta}.$$

IV година

1. Нека a е позитивен реален број. Најди го геометриското место на центрите на кружниците кои ги допираат кружницата $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ и y -оската.

Решение. Нека $k_1: (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r^2$ е кружница чиј центар $M(X, Y)$ припаѓа на бараното геометриското место. Бидејќи y -оската е тангента на k_1 , следува дека $X = r$ или $X = -r$.

1) Ако $X = r$, добиваме дека

$$k_1: x^2 - 2xX + y^2 - 2yY + Y^2 = 0.$$

Сега, од системот

$$\begin{cases} x^2 - 2xX + y^2 - 2yY + Y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases},$$

добиваме

$$-2xX - 2yY + 2ax + Y^2 = 0.$$

Оттука, ако $Y \neq 0$, имаме

$$y = \frac{1}{2Y}(-2xX + 2ax + Y^2) = \frac{a-X}{Y}x + \frac{Y}{2}.$$

Со замена во втората равенка од системот, добиваме

$$x^2 + \frac{(a-X)^2}{Y^2}x^2 + (a-X)x + \frac{Y^2}{4} - 2ax = 0.$$

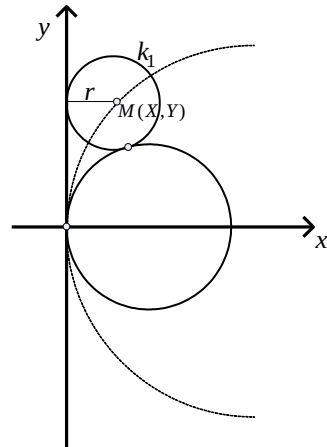
Бидејќи двете кружници имаат единствена пресечна точка, следува дека мора дискриминантата на последната равенка да е нула. Значи,

$$(X+a)^2 - Y^2\left(1 + \frac{(a-X)^2}{Y^2}\right) = 0.$$

Со средување на последново равенство добиваме $Y^2 = 4aX$. Значи бараното геометриското место во овој случај е параболатата $y^2 = 4ax$.

Ако $Y = 0$, се добива

$$\begin{cases} x^2 - 2xX + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases}$$



Оттука $2(a - X)x = 0$. Уште и $a \neq X$ (во спротивно кружниците би се совпаѓале), па $x = 0$ и $y = 0$. Според тоа двете кружници се допираат. Во овој случај бараното геометриско место на точки е позитивниот дел од x -оската.

2) Ако $X = -r$ и $Y = 0$, работејќи слично како во 1) го добиваме системот

$$\begin{cases} x^2 + 2xr + y^2 - 2yY + Y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases}$$

а потоа и равенката

$$\left(1 + \left(\frac{a+r}{Y}\right)^2\right)x^2 + (r-a)x + \frac{Y^2}{4} = 0,$$

чија дискриминанта е $-Y^2 - 4ar$ и е негативна. Значи кружниците немаат пресечни точки. Ако $Y = 0$ се добива негативниот дел од x -оската.

Конечно, бараното геометриско место на точки е x -оската и параболата $y^2 = 4ax$.

2А. Во една аритметичка прогресија збирот на првите m члена е еднаков на збирот на првите n члена ($m \neq n$).

Докажи дека збирот на првите $m+n$ члена не зависи од a_1 (првиот член) и d (разликата на прогресијата).

Решение. Имаме

$$S_m = ma_1 + \frac{dm(m-1)}{2} \text{ и } S_n = na_1 + \frac{dn(n-1)}{2}.$$

Од $S_m = S_n$ добиваме

$$a_1(m-n) + \frac{d}{2}(m^2 - m - n^2 + n) = 0, \text{ т.е. } a_1(m-n) + \frac{d}{2}(m-n)(m+n-1) = 0.$$

Од последново равенство, заради $m \neq n$, добиваме

$$a_1 + \frac{d}{2}(m+n-1) = 0, \text{ т.е. } 2a_1 + d(m+n-1) = 0.$$

Сега,

$$S_{m+n} = (m+n)a_1 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d = \frac{1}{2}(m+n)(2a_1 + (m+n-1)d) = 0,$$

па S_{m+n} не зависи од a_1 и од d .

2Б. Реши ја равенката $x^3 + (k-1)x^2 - kx = 0$, ако нејзините решенија се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Решенијата на равенката се $0, 1, -k$. Од тоа што тие се последователни членови на една аритметичка прогресија следува дека $k \neq 0, -1$. Значи равенката има три различни реални решенија кои ги исполнуваат условите на задачата. Ако $k \in (-\infty, -1)$, тогаш $-k > 1$, па редоследот на корените е $0, 1, -k$. Разликата на аритметичката прогресија ќе биде $1 - 0 = 1$, па $-k = 2$, т.е. $k = -2$.

Ако $k \in (-1, 0)$, тогаш $-k \in (0, 1)$, па редоследот на корените е $0, -k, 1$. Од $-k - 0 = 1 - (-k)$ добиваме $k = -\frac{1}{2}$, т.е. $-k = \frac{1}{2}$. Ако $k \in (0, \infty)$, тогаш $-k \in (-\infty, 0)$, па редоследот е $-k, 0, 1$. Во овој случај прогресијата има разлика 1, па $-k = -1$.

3. За кои $n \in \mathbb{N}$, квадрат со страна n може целосно да се пополни со фигури како на цртежот (без поклопување), ако квадратчињата од кои е составена фигурата имаат страна 1.

Решение. Очигледно бројот на квадратчиња мора да е делив со 4 за да се пополни целосно со вакви фигури. Значи n мора да е парен. Ако n е делив со 4 квадратот може да се подели на квадрати со страна 4, а тие може да се пополнат како на сликата. Ќе докажеме дека ако n не е делив со 4 квадратот не може да се пополни со вакви фигури. Да претпоставиме дека квадратот може да се пополни со вакви фигури. Ако го обоеме квадратот како шаховска табла црно – бело, тогаш секоја фигура ќе има 3 црни и 1 бело или 3 бели и 1 црно квадратче. Нека $n = 2(2k+1)$ тогаш има $(2k+1)^2$ фигури нека m од нив имаат 3 црни и 1 бело квадратче. Тогаш $(2k+1)^2 - m$ фигури се со 3 бели и 1 црно квадратче. Се добива дека има вкупно

$$3m + (2k+1)^2 - m = 2m + (2k+1)^2$$

црни и

$$m + 3((2k+1)^2 - m) = 3(2k+1)^2 - 2m$$

бели квадратчиња. Од друга страна знаеме дека има по $\frac{n^2}{2} = 2(2k+1)^2$ црни и бели квадратчиња. Значи $2m + (2k+1)^2 = 3(2k+1)^2 - 2m = 2(2k+1)^2$, од каде добиваме дека $2m = (2k+1)^2$, т.е. дека парен број е еднаков на непарен што не е можно. Значи квадрат со страна n , таква што n не е делив со 4 не може целосно да се покрие со дадените фигури.

4А. Определи ги сите строго растечки функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што

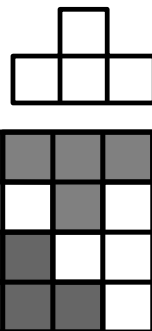
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1.$$

Решение. Од равенката, добиваме

$$f(y + f(x)) = f(x + y) + 1.$$

Значи,

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$



Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме $x + f(y) = y + f(x)$, за секои x и y од множеството реални броеви. Ако во последната добиена равенка замениме $y = 0$, добиваме $f(x) = x + f(0)$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме $x + f(y) + f(0) = x + y + f(0) + 1$, т.е. $f(y) = y + 1$. Значи, ако f го исполнува условот на задачата, тогаш $f(x) = x + 1$. Непосредно се проверува дека функцијата $f(x) = x + 1$ ги исполнува условите на задачата.

4Б. Нека $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}$ за сите $n \geq 2$. Докажи дека

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1,$$

за секој природен број n .

Решение. Имаме

$$a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \Rightarrow 2na_n = 2na_{n-1} - 3a_{n-1} \Rightarrow 3a_{n-1} = 2n(a_{n-1} - a_n).$$

Оттука

$$3a_n + 3a_{n-1} - 3a_n = 2n(a_{n-1} - a_n),$$

$$3a_{n-2} = 2(n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$3a_1 = 2 \cdot 2 \cdot (a_1 - a_2)$$

Ако ги собереме последниве равенства добиваме

$$3s_n - 3a_n = -2na_n + 2(a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1) + 2a_1$$

$$3s_n - 3a_n = -2na_n + 2s_n - 2a_n + 2a_1$$

$$s_n = 2a_1 - (2n-1)a_n$$

$$s_n = 1 - (2n-1)a_n.$$

Бидејќи $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}$ следува дека $a_n > 0$, за $\forall n \in \mathbb{N}$. Затоа

$$s_n = 1 - (2n-1)a_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$