Сојузен натпревар 1990

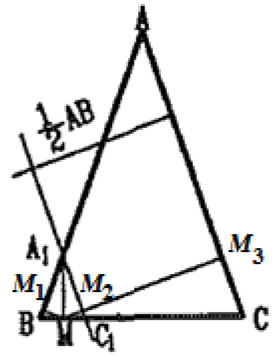
Седмо одделение

1. Определи го најголемиот природен број таков што било кои две соседни цифри запишпани во истиот редослед формираат двоцифрен број делив со 23.
   Решение. Двоцифрени броеви деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Броеви кои го задоволуваат условот на задачата се: 23, 46923, 6923 и 923. Најголем од овие броеви е 46923.

2. Ако во еден трицифрен број делив со 7 двете негови последни цифри се еднакви, докажи дека збирот на цифрите на тој број е делив со 7.
   Решение. Дадениот трицифрен број можеме да го запишеме во обликот $A=\overline{xyy}=100x+10y+y=7(14x+y)+2(x+2y)$, каде x и y се цифри. Ако 7 е делител на A, тогаш 7 е делител на $2(x+2y)$ и како $\mathrm{NZD}(2,7)=1$ заклучуваме дека 7 е делител на $x+2y=x+y+y$, т.е. на збирот на цифрите на бројот A.

3. За броевите a,b,c,d важи $d>c$, $a+b=c+d$, $a+d<b+c$. Подреди ги овие броеви по големина.
   Решение. Од $a+d<b+c$ следува $a+b+d<2b+c$, па ако се искористи дека $a+b=c+d$, добиваме $c+2d<2b+c$, од каде следува $d<b$. Сега, од $a+b=c+d$ и $d<b$ следува $c-a=b-d>0$, па затоа $c>a$. Конечно, $a<c<d<b$.

4. На основата BC на рамнокракиот остроаголен триаголник ABC определи точка M така што разликата на нејзините растојанија до краците ќе биде еднаква на половина од должината на кракот AB.
   Решение. Конструираме права p паралелна на кракот AC на дадениот триаголник, на растојание еднакво на половина од должината на кракот AB, така што го сече кракот AB во точката A_1, а основата BC во точката C_1. Нека M е подножјето на нормалата повлечена од A_1 на BC.

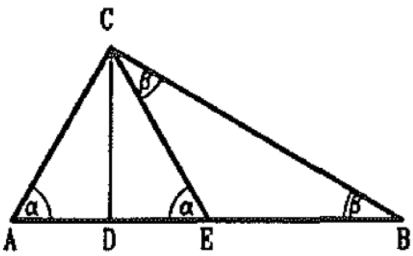


Ќе докажеме дека оваа права ги исполнува условите на задачата. Нека M_1 и M_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците A_1B и A_1C_1 на рамнокракиот триаголник A_1BC_1, а M_3 подножјето на нормалата од M на AC. Точката M е средина на основата на триаголникот A_1BC_1, па затоа $MM_1 = MM_2$, што значи

$$MM_3 - MM_1 = MM_2 + \tfrac{1}{2}AB - MM_1 = \tfrac{1}{2}AB.$$

5. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела чија разлика е еднаква на должината на едната катета. Определи ги аглите на овој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот правоаголен триаголник со прав агол во темето C и нека, на пример, $CA < BC$. Понатаму, нека D е подножјето на висината повлечена од темето C и E е точка на отсечката DB таква што



$DE = AD$. Тогаш триаголникот ACE е рамнокрак. Од условот на задачата следува $BE = AC = CE$, што значи дека и триаголникот BCE е рамнокрак, при што $\alpha = \measuredangle AEC$ е негов надворешен агол, па затоа $\alpha = 2\beta$. Но, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па затоа $\beta = 30^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Осмо одделение

1. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броја е делив со 9.

Решение. Збирот на кубовите на три последователни природни броја е

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2).$$

Сега, ако $n = 3k$, тогаш производот $n(n^2+2)$ е делив со 3, а ако $n = 3k \pm 1$, тогаш

$$n^2 + 2 = 3(3k^2 \pm 2k + 1),$$

па затоа и во овој случај производот $n(n^2+2)$ е делив со 3.

2. Едноцифрен број x е зголемен за 10 и со тоа бројот x е зголемен за некој процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот број проценти како првиот пат го добиваме бројот 72. Определи го бројот x.

Решение. Ако непознатиот број го означиме со x, тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката

$$x+10+\frac{10}{x}(x+10)=72,$$

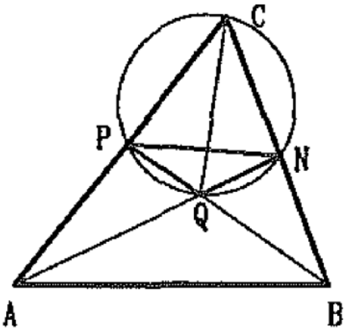
од каде добиваме $x^2-52x+100=0$, односно $(x-2)(x-50)=100$. Производ на два броја е еднаков на 0 ако еден од множителите е еднаков на 0, па од последната равенка добиваме $x-2=0$ или $x-50=0$ т.е. $x=2$ или $x=50$. Но, x е едноцифрен број, па затоа решение на задачата е $x=2$.

3. Определи шестцифрен број кој помножен со 2, со 3, со 4, со 5, со 6 дава шестцифрени броеви запишани со истите цифри како и почетниот број.

Решение. Со анализа на производите со 2, со 3, со 4, со 5 и со 6 се добива дека единствено решение на задачата е бројот 142857. На пример, ако бараниот број е $\overline{abcdef}$, тогаш бидејќи при множење со бројот 6 треба да се добие шестцифрен број запишан со истите цифри како и почетниот број, заклучуваме дека $a=1$ итн. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Во триаголникот ABC симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката N, а симетралата на $\measuredangle CBA$ ја сече страната AC во точката P, при што $PN=1$. Симетралите AN и BP се сечат во точката Q. Темето C припаѓа на кружницата која минува низ точките P,Q и N. Определи ја плоштината на триаголникот NPQ.

Решение. Имаме



$$\measuredangle PQN=\measuredangle AQB=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}.$$

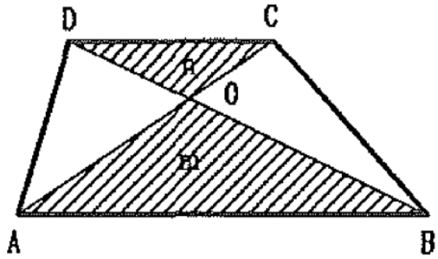
Понатаму, од тетивниот четири аголник $PQNC$ следува $\measuredangle PQN=180^\circ-\gamma$, па од овие две релации добиваме $\gamma=60^\circ$. Сега,

$$\measuredangle QNP=\measuredangle QCP=\frac{\gamma}{2}=30^\circ$$

и слично $\measuredangle NPQ = 30^\circ$, па затоа триаголникот NPQ е рамнокрак, со агол на основата 30°. Со симетралата QC на основата NP тој може да се подели на два складни триаголници од кои може да се состави рамностран триаголник со висина $\frac{1}{2}PN = \frac{1}{2}$, што значи со страна $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Конечно, неговата плоштина е еднаква на $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

5. Дијагоналите на произволен трапез го делат трапезот на четири триаголници. Плоштините на триаголниците, изразени во cm^2, кои ги содржат основите на трапезот се m и n. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Решение. Триаголниците ABO и CDO се слични со коефициент на сличност $\sqrt{m}:\sqrt{n}$. Ако $AB = a, CD = c$ и ако h' и h'' се висините на овие триаголници од темето O, тогаш



$$\frac{h'}{h''} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

Оттука

$$\frac{h'+h''}{h''} = \frac{a+c}{c} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \text{ и } \frac{(h'+h'')(a+c)}{h''c} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{n}.$$

Бидејќи $h''c = 2n$, добиваме дека плоштината на трапезот е

$$P = \frac{(h'+h'')(a+c)}{2} = \frac{(h'+h'')(a+c)}{h''c} \cdot \frac{h''c}{2} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{n} \cdot n = (\sqrt{m}+\sqrt{n})^2.$$