ЈЕДНА КЛАСА ПРОБЛЕМА БОЈЕЊА РЕМЗИЈЕВОГ ТИПА

Мирјана Вулетић, Игор Долинка, Нови Сад

Под *бојењем* неког скупа објеката X у k боја, сматрамо произвољно пресликавање $f : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$. За дату функцију бојења можемо дефинисати једну партицију скупа X, коју такође називамо бојењем. Она је одређена овако: i, j су у истој класи акко $f(i) = f(j)$. За подскуп $Y \subseteq X$ ћемо рећи да је *монохроматски*, ако је скуп Y цео садржан у једној класи наведене партиције, тј. ако је $f|_Y$ константна функција.

Ова строго формална дефиниција бојења поклапа се са интуитивним појмом бојења, па ћемо у даљем са њиме и радити.

Ремзијева теорија је значајна грана комбинаторике, која је започела 1930. године радовима енглеског математичара Френка П. Ремзија. Грубо говорећи њен циљ и основна замисао је да у сваком 'неправилном' бојењу неке структуре (тачака у равни, графова, произвољних скупова) може да се издвоји нека 'правилна'- монохроматска подструктура, уколико је почетна структура била довољно велика. Класичан пример проблема Ремзијевог типа је следећи: показати да се у сваком бојењу свих ивица и дијагонала правилног 6-угла (односно ивица потпуног графа K_6) може наћи монохроматски троугао. Претпостављамо да је решење добро познато сваком читаоцу. Ипак, већ мало сложенији проблем истог типа је још и данас отворен: наиме, тражи се минималан број $V(k)$ са особином да се у сваком бојењу ивица и дијагонала правилног V-угла у k боја може наћи монохроматски троугао. Зна се да је $V(2) = 6$, $V(3) = 17$, али већ за веће k, $V(k)$ није познато; нађене су само неке оцене за $V(k)$ (тако је нпр. $47 \leq V(4) \leq 53$). Напоменимо да је ово један од *једноставнијих* проблема теорије Ремзија. Према томе, можемо закључити да је Ремзијева теорија веома сложена и да пружа велике могућности за даља истраживања у комбинаторици.

Бојења на правој

Елементарне проблеме Ремзијевог типа представљају и следећи.

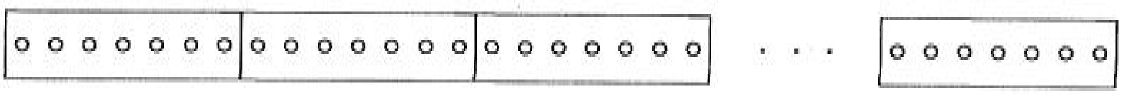
Проблем 1. Права је обојена са две боје. Доказати да постоји дуж чији су крајеви и средишња тачка исте боје.

Проблем 2. Раван је обојена у две боје. Доказати да постоји троугао сличан датом троуглу, чија су темена исто обојена.

Проблем 3. Раван је обојена у k боја. Доказати да постоји правоугаоник, чија су темена исто обојена.

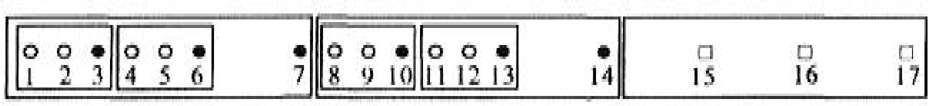
Међутим, можемо уопштити проблеме 1 и 2 за бојење тачака праве, односно равни у $k \geq 3$ боја. Овде ћемо приказати решење уопштеног проблема 1 за $k = 3$, затим ћемо решити уопштени проблем 2 и на крају показати како из његовог решења следи решење уопштеног проблема 1.

Нека је уочена права обојена у 3 боје. Посматрајмо на њој целобројне тачке и уочимо блокове од по 7 тачака, а затим $3^7 + 1$ таквих блокова:



Слика 1.

Како сваки блок може бити обојен једном од 3^7 боја, то међу $3^7 + 1$ блокова постоје два једнако обојена. Унутар једног таквог блока посматрамо прве четири тачке; бар две од њих су обојене истом бојом. Без обзира на распоред тог пара, међу преостале три тачке тог блока имамо простор за трећег члана аритметичке прогресије, дефинисане тим паром. Посматрамо блокове дужине $M = 14(3^7 + 1) - 1$ и то $3^M + 1$ њих. По Дирихлеовом приципу, постоје два исто обојена блока. Али, по претходним разматрањима, у блоку дужине $7(3^7 + 1)$ постоје два подударна пара, исто обојена. Према томе, имамо следећу структуру тачака:



Слика 2.

Нека су тачке 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12 боје α. Ниједна од преосталих тачака не сме бити боје α, иначе је проблем решен (за 3, 6, 10, 13 то је очевидно). Преостале тачке нису боје α: 7 због 1, 5; 14 због 8, 12; 15 због 1, 9; 16 због 4, 12 и 17 због 1, 12. Према томе, тачке 3, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 16, 17 су боје β или γ, при чему су 3, 6, 10 и 13 исте боје, рецимо β. Ако је нека од тачака 7, 14 боје β, проблем је решен, а исти је случај са тачкама 15 због 3, 10; 16 због 6, 13 и 17 због 7, 14. Дакле, тачке 15, 16, 17 су боје γ, па имамо решен проблем.

Бојења у равни

Сада прелазимо на решавање уопштеног проблема 2. Нека је раван произвољно обојена у k боја. За $k \geq 3$ уочимо низ природних бројева a_n^k, тако да је:

$$a_n^k = a_{n-1}^k \left(k^{\frac{a_{n-1}^k (a_{n-1}^k + 1)}{2}} + 1 \right),$$

где је $a_1^k = 2$. Уведимо троугаону мрежу, чије су праве паралелне странама датог троугла. Фиксирајмо једну праву троугаоне мреже. Дефинисаћемо скуп тачака, који ћемо звати *бинарна структура*:

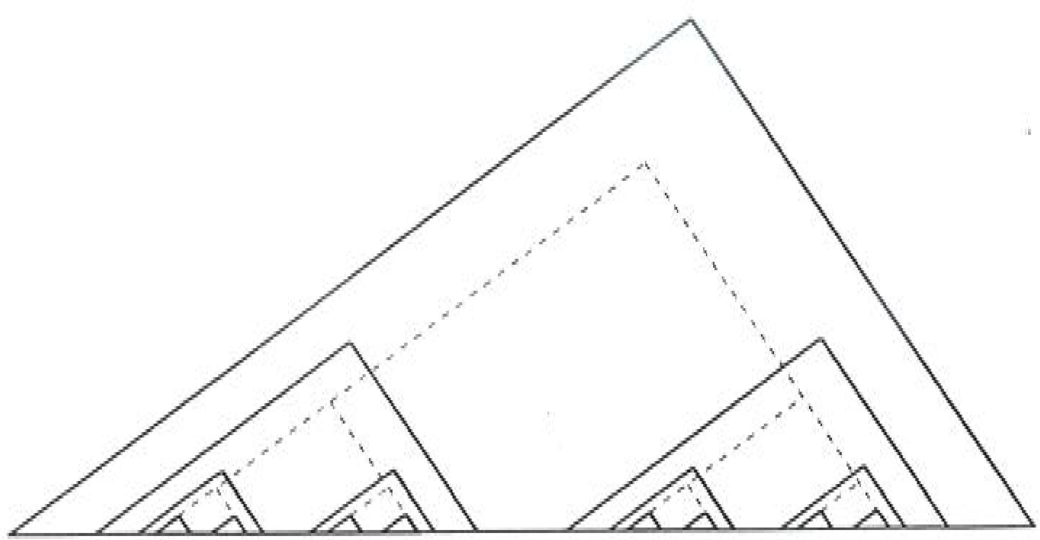
(1) Темена јединичног троугла уочене мреже је бинарна струкура реда 1,

(2) Бинарна структура реда $n+1$ је троугаона зона тачака која у себи садржи две подударно обојене, дисјунктне бинарне структуре реда n, чије основице леже на њеној основици.

Индукцијом показујемо тврђење: троугаона зона са a_n^k тачака на основици је бинарна структура реда n. За $n = 1$ тврђење је тривијално. Унутар зоне димензије a_n^k можемо послагати

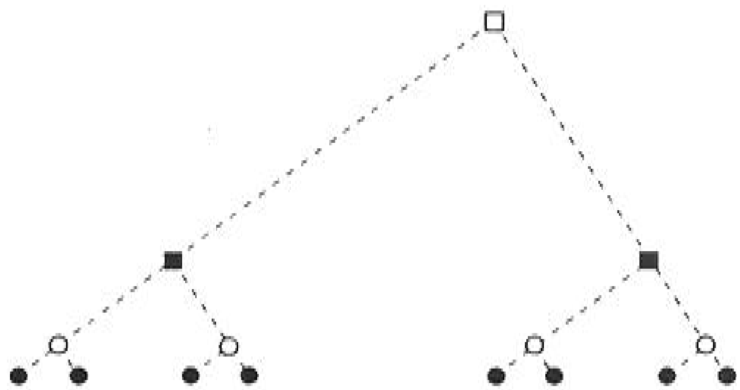
$$k^{\frac{a_{n-1}^k (a_{n-1}^k + 1)}{2}} + 1$$

зона димензија a_{n-1}^k. По Дирихлеовом принципу, постоје две зоне исто обојене (пошто свака од њих садржи $\frac{a_{n-1}^k (a_{n-1}^k + 1)}{2}$ тачака). По индуктивној претпоставци, ове две зоне су бинарне структуре реда $n-1$, па одатле следи да је уочена троугаона зона бинарна структура реда n.



Слика 3.

Посматрајмо троугаону зону димензије a^k_{k+1}. Ово је бинарна структура реда $k+1$. Посматрајмо све њене подструктуре реда 1. Оне су све једнако обојене по дефиницији бинарне структуре. Од три темена јединичне структуре, определимо се за једно од темена (као на слици 3). Посматрајмо троугаону мрежу дефинисану овим тачкама и из ње издвојмо бинарно стабло, као на слици 4. Ово је бинарно стабло са $k+1$ спратова и сваки од спратова је монохроматски, по конструкцији. Тада два спрата имају исту боју, па постоји монохроматски троугао сличан датом троуглу, што завршава доказ.



Слика 4.

Уочимо сада произвољно бојење праве p и бојење равни дефинисано на следећи начин: ако је тачка X посматране праве обојена у боју α, онда је и свака тачка $X' \in n(X) \perp p$ боје α. Како смо управо извели доказ за произвољно бојење равни, то уопштени проблем 2 важи и за ово специјално бојење. Даље, уочимо троугао $\triangle ABC$, такав да је $p(A,B) \parallel p$ и $CA = CB$. По управо доказаном, у равни можемо наћи монохроматски троугао сличан датом (чак, хомотетичан датом). Али, тада нормалне пројекције темена тог троугла на праву p су, по дефиницији бојења, исте боје и формирају структуру, коју смо звали 'аритметичка прогресија'.

Бојења у простору

Природно, сада се можемо запитати да ли можемо овај проблем пренети у простор. Наиме, имамо следећи проблем:

Проблем 4. *Дат је тетраедар и произвољно бојење тачака простора. Да ли постоји тетраедар, сличан датом, чија су сва темена исто обојена?*

Испоставља се да је одговор позитиван, односно да проблем можемо решити имитацијом претходног доказа, уз одређене неопходне техничке модификације (посматра се просторна тетраедрална мрежа). Препуштамо читаоцима да покушају да самостално реше овај проблем.

Показаћемо, међутим, како из претходног следи решење још једног сличног проблема

Проблем 5. Доказати да у произвољном бојењу тачака равни, за произвољни четвороугао постоји монохроматски четвороугао, сличан датом.

Нека у равни α тражимо монохроматски четвороугао, сличан датом. Уочимо једно специјално бојење простора: ако је тачка $X \in \alpha$ боје β_i $(1 \leq i \leq k)$ и $\nu(X) \perp \alpha$, тада све тачке праве ν обојимо бојом β_i.

Одаберимо тетраедар $ABCD$, такав да ја његова нормална пројекција на раван α подударна датом четвороуглу. По решењу проблема 4, постоји монохроматски тетраедар, сличан са $ABCD$ (чак, хомотетичан). Али, по дефиницији специјалног бојења, његова нормална пројекција на α је тражени монохроматски четвороугао.

На крају, читаоцима остављамо да реше још општији проблем.

Проблем 6. Дат је коначан скуп тачака Φ у равни. Доказати да у сваком бојењу равни (у k боја) постоји монохроматски скуп тачака, сличан Φ.

Скрећемо пажњу да се проблем може решити изласком у вишедимензионалне реалне просторе (као што смо за четвороугао излазили у простор), при чему је неопходно извесно теоријско знање из топологије и линеарне алгебре, док постоји и једно дуже решење (уз коришћење вектора), које се све време задржава у равни, а користи само елементарне методе.

Напомена. Проблеми презентирани у овом тексту, били су део такмичарског програма 16. међународног турнира градова, који је одржан у Новом Саду 1–9. августа 1995. Решења која су овде изложена су настала на основу рада екипе Новог Сада, која је на овом задатку освојила II награду.

Статијата прв пат е објавена во списанието Тангента на ДМ на Србија во 1996/97 година