Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za drugi razred, šk. 2005/06.

FUNKCIONALNE JEDNAČINE

§ Osnovne metode za rešavanje funkcionalnih jednačina

- Dodeljivanje vrednosti promenljivama. Najčešće se prvo stavljaju neke konstante (npr. 0 ili 1), zatim (ukoliko je to moguće) vrednosti takve da neki od izraza postane konstanta (npr. ukoliko se u jednačini pojavljuje $f(x+y)$ i ukoliko smo pronašli $f(0)$, stavimo $y=-x$). Zavisno od težine zadatka, zavisiće i očiglednost određenih zamena. U primerima biće pokazane neke karakteristične ideje.
- Princip matematičke indukcije. U ovoj metodi cilj nam je da prvo iz vrednosti $f(1)$ pronađemo vrednosti za sve $f(n)$, gde je n ceo broj, zatim i za sve $f\left(\frac{1}{n}\right)$ i na kraju za sve $f(r)$, gde je r proizvoljan racionalan broj. Ova metoda koristi se za rešavanje jednačina čiji je domen $\mathbf{Q}$ i veoma je korisna, posebno kod „lakših" zadataka.
- Ispitivanje injektivnosti („1-1") i surjektivnosti („na") funkcija koji učestvuju u datoj jednačini. U mnogim zadacima ove stvari neće biti teško dokazati, a biće veoma korisne.
- Određivanje fiksnih tačaka i nula funkcije. Broj zadataka koji koriste ovu metodu je znatno manji od onih koji koriste neku od prethodne tri i to su najčešće teži zadaci.
- Pozivanje na Košijevu jednačinu i jednačine njenog tipa.
- Ispitivanje monotonosti i neprekidnosti funkcije. Uslov neprekidnosti se najčešće zadaje kao dodatni uslov i kao i uslov monotonosti najčešće služi za svođenje na Košijevu jednačinu. Ukoliko ovo nije slučaj, zadatak je teži.
- Pretpostavka da je data funkcija u nekoj tački veća ili manja od vrednosti funkcije za koju hoćemo da dokažemo da je rešenje. Najčešće se koristi kao nastavak metoda matematičke indukcije i u jednačinama u kojima je kodomen neke funkcije ograničen sa neke strane.
- Pravljenje rekurentnih jednačina. Ovaj metod se najčešće koristi kod jednačina u kojima je kodomen ograničen sa neke strane i kod kojih se može napraviti veza između npr. $f(f(n))$, $f(n)$ i n.
- Posmatranje skupa vrednosti za koje je tražena funkcija jednaka pretpostavljenom rešenju i dokazivanjem da je ovaj skup jednak domenu funkcije ili posmatranje slike domena.
- Smena funkcije. Ova metoda se najčešće koristi radi uprošćavanja zadatih jednačina i često nije od presudne važnosti.
- Predstavljanje funkcija kao suma parne i neparne. Naime, svaka funkcija se može predstaviti kako suma jedne parne i jedne neparne i ovo je od velike koristi u „linearnim" funkcionalnim jednačinama u kojima se pojavljuje dosta različitih funkcija.
- Posmatranje broja u sistemu sa osovom različitom od 10. Naravno ovo možemo koristiti ukoliko je domen $\mathbf{N}$.
- Na kraju napomenimo da je vrlo korisno da pre početka rešavanja bilo koje jednačine uočite šta bi moglo da bude njeno rešenje, jer ovo može pomoći kod odgovarajućih smena. Takođe, na kraju rešenja treba OBAVEZNO proveriti da li dobijena funkcija zaista zadovoljava datu funkcionalnu jednačinu!

§ Košijeva jednačina i jednačine Košijevog tipa

Jednačina $f(x+y)=f(x)+f(y)$ naziva se Košijeva jednačina. Ukoliko je njen domen $\mathbf{Q}$, poznato je da je njeno rešenje $f(x)=xf(1)$ i ovo se lako dokazuje korišćenjem matematičke indukcije. Sledeći problem je proširivanje domena sa $\mathbf{Q}$ na $\mathbf{R}$. Ne toliko teškim kontra-primerom se dokazuje da rešenje Košijeve jednačine u ovom slučaju ne mora biti $f(x)=xf(1)$. Međutim postoji dosta dodatnih uslova uz koje opšte rešenje mora biti ovog oblika. Naime, ukoliko funkcija f zadovoljava i bilo koji od uslova :

- monotonost na nekom podintervalu realne prave;
- neprekidnost;
- ograničenost na nekom intervalu;
- pozitivnost na poluosi $x \geq 0$;

tada je opšte rešenje Košijeve jednačine $f : \mathbf{R} \to S$, $f(x) = xf(1)$.
Sledeće jednačine se lako svode na Košijevu:

- sve neprekidne $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ i $f(x+y) = f(x)f(y)$, su oblika $f(x) = a^x$. Naime, funkcija $g(x) = \ln f(x)$ je neprekidna i zadovoljava Košijevu funkcionalnu jednačinu.
- sve neprekidne funkcije $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ i $f(xy) = f(x) + f(y)$, su oblika $f(x) = \log_a x$. Naime, funkcija $g(x) = f(a^x)$ je neprekidna i zadovoljava Košijevu funkcionalnu jednačinu.
- sve neprekidne funkcije $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ i $f(xy) = f(x)f(y)$, su oblika $f(x) = x^t$, gde je $t = \log_a b$ i $f(a) = b$. Naime, funkcija $g(x) = f(a^x)$ je neprekidna i zadovoljava Košijevu funkcionalnu jednačinu.

Nadam se da će sledeći primeri uspeti da ilustruju ono što je prethodno rečeno.

Primer 1 *Za funkciju $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ važi $f(1) = 2$ i $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. Naći sve takve funkcije.*

Rešenje. Ovo je klasičan primer zadatka koji se može rešiti principom matematičke indukcije. Primetimo da ukoliko stavimo $x = 1$ i $y = n$ u polaznu jednakost dobijamo $f(n+1) = f(n) + 1$, pa kako je $f(1) = 2$, to je po matematičkoj indukciji i $f(n) = n + 1$, za svaki prirodan broj n. Takođe za $x = 0$ i $y = n$ dobijamo $f(0)n = f(n) - 1 = n$, tj. $f(0)$. Sada nam je cilj da odredimo i $f(z)$, za svako $z \in \mathbf{Z}$. Stavljajući $x = -1$ i $y = 1$ u polaznu jednakost dobijamo $f(-1) = 0$, pa stavljanjem $x = -1$ i $y = n$ dobijamo $f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1$. Samim tim je $f(z) = z + 1$, za svako $z \in \mathbf{Z}$. Sada treba odrediti $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Stavljanjem $x = n$ i $y = \dfrac{1}{n}$ dobijamo

$$f(1) = (n+1)f\Big(\frac{1}{n}\Big) - f\Big(n + \frac{1}{n}\Big) + 1. \quad (1)$$

Dalje za $x = 1$ i $y = m + \dfrac{1}{n}$ dobijamo $f\Big(m+1+\dfrac{1}{n}\Big) = f\Big(m+\dfrac{1}{n}\Big)+1$, pa je matematičkom indukcijom $f\Big(m+\dfrac{1}{n}\Big) = m+f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Iz (1) je sada

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} + 1,$$

za svaki prirodan broj n. Dalje, za $x = m$ i $y = \dfrac{1}{n}$ iz prethodnog dobijamo $f\Big(\dfrac{m}{n}\Big) = \dfrac{m}{n} + 1$, tj. $f(r) = r + 1$, za sve pozitivne racionalne brojeve r. Takođe stavljanjem $x = -1$ i $y = r$, dobijamo i $f(-r) = -f(r-1) + 1 = -r + 1$, pa je $f(x) = x + 1$, za sve $x \in \mathbf{Q}$.

<u>Provera:</u> kako je $xy + 1 = (x+1)(y+1) - (x+y+1) + 1$, za sve $x, y \in \mathbf{Q}$, to f jeste rešenje date funkcionalne jednačine.

Primer 2 *(Belorusija 1997) Naći sve funkcije $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ takve da je za proizvoljne realne brojeve x i y:*

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y).$$

Rešenje. Primetimo da su $g(x) = 0$ i $g(x) = 2$ očigledno rešenja date jednačine. Metodama matematičke indukcije nije teško dokazati da ukoliko g nije jednako nekoj od ove dve funkcije da je tada $g(x) = x$ za sve $x \in \mathbf{Q}$. Takođe, lako se dokazuje i da je $g(r + x) = r + g(x)$ i $g(rx) = rg(x)$, gde je r racionalan, a x realan. Specijalno iz druge od njih za $r = -1$ dobijamo $g(-x) = -g(x)$, pa stavljanjem $y = -x$ u polaznu jednakost dobijamo $g(x)^2 = g(x^2)$. Znači $g(x) \geq 0$, za $x \geq 0$. U slučajevima da prethodno možemo dokazati koristi se sledeći standardan način proširivanja na $\mathbf{R}$. Naime, pretpostavimo da je $g(x) < x$. Izaberimo $r \in \mathbf{Q}$ takvo da je $g(x) < r < x$ (između svaka dva broja postoji racionalan broj). Tada je

$$r > g(x) = g(x - r) + r \geq r,$$

što je očigledna kontradikcija. Slično i iz $g(x) > x$ dobijamo kontradikciju. Znači mora biti $g(x) = x$, za sve $x \in \mathbf{R}$.

Provera pokazuje da sve tri funkcije zaista jesu rešenja date funkcionalne jednačine.

Primer 3 *(Republičko 2004, 3 raz) Funkcija $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ je takva da je $x + f(x) = f(f(x))$ za svako $x \in \boldsymbol{R}$. Naći sva rešenja jednačine $f(f(x)) = 0$.*

Rešenje. Ova funkcija je sa domenom $\mathbf{R}$, pa je mala šansa da se može rešiti matematičkom indukcijom. Zato treba probati nešto drugo. Primetimo da je $f(f(x)) - f(x) = x$, pa ukoliko je $f(x) = f(y)$, tada je očigledno i $x = y$. Znači funkcija je „1-1”. Kako je $f(f(0)) = f(0) + 0 = f(0)$, to je zbog injektivnosti $f(0) = 0$, pa je i $f(f(0)) = 0$. Ukoliko je za još neko x $f(f(x)) = 0 = f(f(0))$, tada je zbog injektivnosti $f(x) = f(0)$ i iz istog razloga i $x = 0$.

Primer 4 *(Republičko 2004, 4 raz) Naći sve 1-1 funkcije $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ koje zadovoljavaju uslove:*

$$(a)\ f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad (b)\ f(1) = 2,\ f(2) = 4.$$

Rešenje. Stavljanjem u polaznu jednakost $m = 1$ i n, odnosno $m = n$ i $n = 1$ dobijamo

$$f(f(1) + f(n)) = f(f(1)) + f(n), \quad f(f(n) + f(1)) = f(f(n)) + f(1).$$

Napomenimo da je ovo jedna standardna ideja, ukoliko je izraz sa jedne strane simetričan po promenljivama, a sa druge nije. Sada je $f(f(n)) = f(n) - f(1) + f(f(1)) = f(n) - 2 + f(2) = f(n) + 2$. Odavde zaključujeno da ako je $f(n) = m$, da je tada $f(m) = m + 2$ i dalje indukcijom iz iste formule $f(m + 2k) = m + 2k + 2$, za svako $k \geq 0$. Posebno kako je $f(1) = 2$, to je $f(2n) = 2n + 2$, za sve prirodne brojeve n. Po uslovu zadatka je funkcija „1-1", pa u neparnim tačkama (sem u tački 1) mora imati neparne vrednosti. Neka je p najmanji prirodan broj takav da za neko k važi $f(k) = 2p + 1$. Po prethodno dokazanom imamo da je $f(2p + 2s + 1) = 2p + 2s + 3$, za $s \geq 0$. Znači (kako je funkcija „1-1") brojevi $3, 5, \ldots, 2p - 1$ slikaju se u brojeve $1, 3, \ldots, 2p + 1$. Ako je $f(t) = 1$ za neko t, tada je za $m = n = t$ $4 = f(2) = f(f(t) + f(t)) = f(f(t)) + f(t) = 3$, što je očigledan kontradikcija. Takođe, ako je za neko t i $f(t) = 3$, tada je $f(3 + 2k) = 5 + 2k$, što je kontradikcija, jer se tada vidi da ne postoji takvo t. Znači brojevi $3, 5, \ldots, 2p - 1$ se slikaju u brojeve $5, 7, \ldots, 2p + 1$. Takođe na osnovu prethodnog zaključujemo da mora biti baš $f(3 + 2k) = 5 + 2k$. Znači rešenje je funkcija $f(1) = 2$ i $f(n) = n + 2$, za $n \geq 2$.
Lako se proverava da ova funkcija zaista zadovoljava uslove zadatka.

Primer 5 *(BMO 2000, 1 zad) Rešiti funkcionalnu jednačinu*

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2,\ x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Rešenje. U ovakvim zadacima često je vrlo lako dokazati da su tražene funkcije „1-1" i „na" (naravno ukoliko to i jesu). Naime za $x = 0$ dobijamo $f(f(y)) = y + f(0)^2$. Kako je funkcija sa desne strane „na", to i funkcija sa leve strane, tj. $f(f(y))$, mora biti „na". Samim tim je i $f(y)$ „na". Nije teško dokazuje i da je $f(y)$ „1-1". Sada postoji t takvo da je $f(t) = 0$, pa zamenom $x = 0$ i $y = t$ dobijamo $f(0) = t + f(0)^2$. Takođe, za $x = t$ dobijamo $f(f(y)) = y$. Odavde je $t = f(f(t)) = f(0) = t + f(0)^2$, tj. $f(0) = 0$. Sada stavljanje $f(x)$ umesto x dobijamo

$$f(f(x)x + f(y)) = x^2 + y,$$

pa je $f(x)^2 = x^2$ za svaki realan broj x. Razmotrimo sada dva slučaja:

Prvi slučaj $f(1) = 1$. Stavljanjem $x = 1$ dobijamo $f(1 + f(y)) = 1 + y$, odnosno kvadriranjem $(1 + y)^2 = f(1 + f(y))^2 = (1 + f(y))^2 = 1 + 2f(y) + f(y)^2 = 1 + 2f(y) + y^2$. Sada je jasno da je u ovom slučaju $f(y) = y$ za svaki realan broj y.

Drugi slučaj $f(1) = -1$. Stavljanjem $x = -1$ dobijamo $f(-1 + f(y)) = 1 + y$, odnosno kvadriranjem $(1 + y)^2 = f(-1 + f(y))^2 = (-1 + f(y))^2 = 1 - 2f(y) + f(y)^2 = 1 - 2f(y) + y^2$. Sada je jasno da je u ovom slučaju $f(y) = -y$ za svaki realan broj y.

Provera dokazuje da $f(x) = x$ i $f(x) = -x$ jesu rešenja ove funkcionalne jednačine.

Primer 6 *Data je funkcija $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Ako za svaka dva realna broja x i y važi $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$, dokazati da je i $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za svaka dva realna broja x i y.*

Rešenje. Ovo je klasičan primer jednačine u kojoj je od presudnog značaja dodeljivanjem vrednosti promeljivama. Prvo stavljanjem $y = -1$ dobijamo $f(x) = -f(-x)$, tj. funkcija f je neparna. Sada nam je cilj da napravimo neki sistem koji će ili biti rešiv ili će doveti do neke nove jednakosti koja važi za traženu funkciju. Stavljanjem $y = 1$ dobijamo $f(2x+1) = 2f(x) + f(1)$, i zatim $-x$ i $y = 1$ dobijamo $f(-2x+1) = -f(2x-1) = 2f(-x) + f(1)$, tj. $f(2x-1) = 2f(x) - f(1)$. Sada je $f(2x-1) + f(2x+1) = 4f(x)$. Vidimo da ova jednakost već na neki način podseća na traženu, tj. $f(x) + f(y) = f(x+y)$. Prvi sledeći korak ka traženoj jednakosti je da probamo da dokažemo $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$, ili nešto slično... Slično kao u prethodnom slučaju stavljamo $y = 1$, a zatim $-x$ i $y = 1$ i sabiranjem dve jednakosti dobijamo

$$f(xy + x + y) - f(xy - x + y) = 2f(x). \quad (1)$$

Sada treba namestiti vrednost za y, tako da dobijemo ono što smo želeli da dokažemo. Zato stavljamo $y' = \dfrac{y}{x+1}$ umesto y u (1)

$$f(x + y) + f(x - y) = f\Big(x + \frac{y}{x+1}(x + 1)\Big) + f\Big(x - \frac{y}{x+1}(x + 1)\Big) = f(x + xy' + y') + f(x - xy' - y') = 2f(x).$$

Posebno za $2x$ i $y = 1$ dobijamo $f(2x + 1) + f(2x - 1) = 2f(2x)$, pa je $f(2x) = 2f(x)$. Znači $f(x + y) + f(x - y) = f(2x)$, pa za $x + y = x'$ i $x - y = y'$, dobijamo traženu jednakost.

Primer 7 *Da li postoji funkcija $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ takva da je $f(f(x)) = x^2 - 2$ za svaki realan broj x?*

Rešenje. Probom vidimo da se korišćenjem neke od prve tri metode ništa ne dobija. Zato treba pokušati nešto fiksnim tačkama. Primetimo da funkcija g sa desne strane ima tačno 2 fiksne tačke i da funkcija $g \circ g$ ima tačno 4 fiksnih tačaka. Dokažimo da tada ne postoji funkcija f takva da je $f \circ f = g$. Pretpostavimo suprotno. Neka su a, b fiksne tačke funkcije g, a tačke a, b, c, d fiksne tačke funkcije $g \circ g$. Neka je $g(c) = y$. Tada je $c = g(g(c)) = g(y)$, pa je $g(g(y)) = g(c) = y$, pa je y jedna od fiksnih tačaka funkcije $g \circ g$. Ako je $y = a$, tada iz $a = g(a) = g(y) = c$, dobijamo kontradikciju. Slično $y \neq a$, pa kako je i $y \neq c$, to je $y = d$. Znači $g(c) = d$ i $g(d) = c$. Dalje je $g(f(x)) = f(f(f(x))) = f(g(x))$. Neka je $x_0 \in \{a, b\}$. Iz prethodnog je $f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$, pa je $f(x_0) \in \{a, b\}$. Slično ukoliko je $x_1 \in \{a, b, c, d\}$ dobijamo $f(x_1) \in \{a, b, c, d\}$. Dokažimo da je ovo nemoguće. Neka je prvo $f(c) = a$. Tada je $f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$, što je očigledna kontradikcija. Slično je i $f(c) \neq b$, a $f(c) \neq c$ (jer je tada $g(c) = c$), pa $f(c) = d$. Međutim tada imamo $f(d) = f(f(c)) = g(c) = d$, što je opet kontradikcija. Ovim je dokazano da tražena funkcija f ne postoji.

Primer 8 *Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ takve da je $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ za svaka dva pozitivna realna broja x, y.*

Rešenje. U ovom zadatku koristi se jedan čest način dodeljivanja vrednosti promenljivama. Ideja je da pronađemo y takvo da je $yf(x) = x + y$ i samim tim odredimo $f(x)$. Znači za sve x takve da je $\dfrac{x}{f(x)-1} \geq 0$ dobijamo $f(x) = 1$, tj. ukoliko je $f(x) > 1$ tada je i $f(x) = 1$. Očigedno je funkcija $f(x) \equiv 1$ jedno rešenje zadatka. Pretpostavimo da je za neko x, $f(x) < 1$. Iz date jednačine je f očigledno nerastuća funkcija (jer je $f(yf(x)) \leq 1$). Dokažimo da je f i opadajuća. Po prethodnom dovoljno je dokazati da je $f(x) < 1$, za svako x. Neka je zato $f(x) = 1$, za sve $x \in (0, a)$ $(a > 0)$. Tada stavljanjem $x = y = \dfrac{2a}{3}$ u datu jednakost dobijamo očiglednu kontradikciju. Znači funkcija je opadajuća, pa je i injektivna. Opet je ideja da $f(yf(x))$ skratimo odgovarajućim zamenama. Primetimo da je $x + y > yf(x)$, pa iz date jednačine sledi sledeći niz jednakosti

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) = f(yf(x) + x + y - yf(x)) = f(yf(x))f\Big(f\Big(yf(x)\Big)(x + y - yf(x))\Big),$$

tj. $f(x) = f\Big(f\Big(yf(x)\Big)(x + y - yf(x))\Big)$. Iz injektivnosti funkcije f dobijamo da je $x = f\Big(yf(x)\Big)(x + y - yf(x))$. Posebno ukoliko stavimo $f(x) = a$, dobijamo

$$f(y) = \frac{1}{1 + \alpha z},$$

gde je $\alpha = \dfrac{1 - f(a)}{af(a)}$, odakle je po pretpostavci $\alpha > 0$.

Lako se proverava da funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1 + \alpha x}$, gde je $\alpha \in \mathbf{R}^+$ i $f(x) \equiv 1$ zadovoljavaju datu jednačinu.

Primer 9 *(IMO 2000, predlog) Odrediti sve parove funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je za svaka dva realna broja x, y ispunjeno*

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x).$$

Rešenje. U zadacima u kojima se pojavljuje više od jedne funkcije nije loše ispitati da li neka od tih funkcija ima nula. Pretpostavimo da funkcija g ima nulu α. Stavaljanjem $y = \alpha$ dobijamo $f(x) = xf(\alpha) - \alpha f(x) + g(x)$, tj. $g(x) = (\alpha+1)f(x) - f(\alpha)x$. Znači sada smo datu funkcionalnu jednačinu sveli na samo jednu nepoznatu, tj.

$$f(x + g(y)) = (\alpha + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(\alpha))x.$$

Primetimo da stavljanjem $y = 1 + \alpha$ data funkcija postaje $f(x + n) = mx$, što je linearna funkcija. Ukoliko je moguće, često je od velike koristi zaključiti da je tražena funkcija linearna. Znači $f(x) = ax + b$ i zamenom u vrednost za g ono postaje $g(x) = cx + d$. Sada nije tešto dokazati da je opšte rešenje oblika

$$f(x) = \frac{p}{p+1}x - \frac{p^2}{p+1}, \quad g(x) = px - p^2,$$

gde je p realan broj različit od 1. Znači preostaje još da dokažemo da funkcija g uvek ima nula. Ukoliko je $f(0) = 0$, tada za $y = 0$ iz polazne jednačine dobijamo $f(x + g(0)) = g(x)$, pa za $x = -g(0)$ dobijamo $g(-g(0)) = f(0) = 0$. Neka je zato $f(0) = b \neq 0$. Iz polazne jednakosti za $x = 0$ dobijamo

$$f(g(y)) = a - by,$$

gde je $g(0) = a$. Kako je $b \neq 0$, to je funkcija f „na”. Zamenom u polaznoj jednakost x sa $g(x)$ dobijamo $f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x))$. Sada koristimo standardnu ideju kada je izraz sa jedne strane simetričan, a sa druge nije. Naime, promenimo promenljive i dobijamo $f(g(y) + g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y))$. Izjednačavanjem desnih strana dobijamo

$$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + g(g(y)).$$

Iz surjektivnosti funkcije f postoji c za koje je $f(c) = 0$, pa zamenom $y = c$ u prethodnoj jednakosti dobijamo

$$g(g(x)) = kf(x) - ax + d,$$

gde je $k = g(c)$ i $d = g(g(c)) + ac$. Znači $g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y)$, odnosno

$$g(x) = \frac{a-k}{b}f(x) + k.$$

Kako $a - k \neq 0$, to traženo sledi iz surjektivnosti funkcije f.

Primer 10 *(IMO 1992, predlog) Odrediti sve funkcije $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ koje zadovoljavaju jednačinu*

$$f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x.$$

Rešenje. Ovo je karakterističan primer zadatka koji se rešava upotrebom rekurentnih jednačina. Označimo sa $a_n = f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$. Iz uslovu zadatka stavljanjem $f^{(n-2)}(x)$ dobijamo rekurentnu jednačinu

$$a_n + aa_{n-1} - b(a+b)a_{n-2} = 0.$$

Karakteristična jednačina je $\lambda^2 + a\lambda - b(a+b) = 0$, čija su rešenja $\lambda_1 = b$ i $\lambda_2 = -a - b$. Sada lako dobijamo

$$f^{(n)}(x) = b^n \frac{(a+b)x + f(x)}{a+2b} + (-1)^n(a+b)^n \frac{bx - f(x)}{a+2b}.$$

Dokažimo da je $f(x) = bx$. Ukoliko je $f(x) > bx$, tada ukoliko uzmemo $n \to +\infty$ i n paran, dobijamo da je $f^{(n)}(x) < 0$. Slično ukoliko je $f(x) < bx$ uzimanjem $n \to +\infty$ i n neparan, opet dobijamo $f^{(n)}(x) < 0$, što je kontradikcija.
Provera pokazuje da funkcija $f(x) = bx$ zadovoljava datu funkcionalnu jednačinu.

Primer 11 *(Vietnam 2003) Neka je F skup svih funkcija $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ koje zadovoljavaju nejednakost $f(3x) \geq f(f(2x)) + x$, za svaki pozitivan realan broj x. Odrediti najveći realan broj α takav da za sve funkcije $f \in F$ važi $f(x) \geq \alpha \cdot x$.*

Rešenje. Jasno je da je $\frac{x}{2} \in F$, pa je $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Dalje, za bilo koju funkciju $f \in F$ važi $f(x) \geq \frac{x}{3}$ (direktno iz date nejednakosti). Ideja je sledeća: označimo $\frac{1}{3} = \alpha_1$ i pravimo niz $\{\alpha_n\}$, za koji važi $f(x) \geq \alpha_n x$, koji će (nadamo se) težeti $\frac{1}{2}$. Ovim bi dokazali da je $\alpha \geq \frac{1}{2}$, pa je $\alpha = \frac{1}{2}$. Konstruišimo rekurentnu vezu za α_k. Pretpostavimo da je $f(x) \geq \alpha_k x$, za svako $x \in \mathbf{R}^+$. Iz date nejednakosti dobijamo

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x \geq \alpha_k f(2x) + x \geq \alpha_k \cdot \alpha_k \cdot 2x + x = \alpha_{k+1} \cdot 3x.$$

Znači $\alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}$. Dokažimo da je $\lim_{n\to+\infty} = \frac{1}{2}$. Ovo je jedan školski zadatak. Naima, lako se dokazuje da je niz α_k rastući i ograničen odozgo sa $\frac{1}{2}$. Znači on konvergira i za njegovu graničnu vrednost α važi $\alpha = \frac{2\alpha^2+1}{3}$, tj. $\alpha = \frac{1}{2}$ (jer je $\alpha < 1$).

Primer 12 *Naći sve neprekidne funkcije $f, g, h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ koje zadovoljavaju jednakost*

$$f(x+y) + g(x-y) = 2h(x) + 2h(y).$$

Rešenje. Za početak cilj nam je da izrazimo f i g preko h i samim tim dobijemo jednačinu samo po h. Ovo nije teško uraditi. Prvo uziamnjem $y = x$ i stavljanjem $g(0) = a$, dobijamo $f(2x) = 4h(x) - a$. Dalje stavljanjem $y = 0$ dobijamo $g(x) = 2h(x) + 2b - 4h\Big(\frac{x}{2}\Big) + a$, gde je $h(0) = b$. Sada se polazna jednakost može napisati kao

$$2\left[h\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + h\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\right] + h(x-y) + b = h(x) + h(y). \quad (*)$$

Radi skraćivanja ovih izraza stavljamo $H(x) = h(x) - b$. Ovakvi „duži” linearni izrazi se često lakše rade predstavljanjem funkcije kao zbira parne i neparne, tj. $H(x) = H_e(x) + H_o(x)$. Zamenom u jednakosti $(*)$ poslednje dve smene i zapisivanjem izraza sa $-x$ i y, odnosno x i $-y$ (ovo radimo da bismo mogli da iskoristimo svojstva panosti i neparnosti određenih funkcija) i sabiranjem dobijamo

$$2\left[H_e\Big(\frac{x-y}{2}\Big) + H_e\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right] + H_e(x-y) = H_e(x) + H_e(y).$$

Ukoliko u ovaj izraz stavljamo $-y$ i saberemo sa sadašnjim dobijamo (jer je $H_e(y) = H_e(-y)$)

$$H_e(x+y) - H_e(x-y) = 2H_e(x) + 2H_e(y).$$

Ovo je već jedna ne toliko komplikovana jednačina. Metodama matematičke indukcije dobijamo da je $H_e(r) = \alpha r^2$, za svaki racionalan broj r. Iz neprekidnosti dobijamo $H_e(x) = \alpha x^2$. Postupajući slično nalazimo i jednostavniju jednakost za H_o, tj.

$$H_o(x+y) + H_o(x-y) = 2H_o(x).$$

Ovo je Košijeva jednakost, pa je $H_o(x) = \beta x$. Znači $h(x) = \alpha x^2 + \beta x + b$ i zamenom u vrednosti za f i g dobijamo

$$f(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + 4b - a, \quad g(x) = \alpha x^2 + a.$$

Provera pokazuje da ove funkcije zaista zadovoljavaju početnu jednačinu.

Primer 13 *Naći sve funkcije* $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ *za koje je*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Uraditi isti zadatak u slučaju da je $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

Rešenje. Nije teško videti da za $x = y = 0$ dobijamo $(f(0)-1)^2 = 0$, tj. $f(0) = 1$. Dalje, stavljanjem $x = 1$ i $y = -1$ dobijamo $f(-1) = f(1)f(-1)$, pa je $f(-1) = 0$ ili $f(1) = 1$. Znači imamo dva slučaja:
Prvi slučaj. Neka je $f(-1) = 0$. U ovakvim jednakostima (na izgled jednostavnim) u kojima ne prolaze osnovne ideje matematičke indukcije, nije loše povećati broj promenljivih i to stavljanjem npr. yz umesto y, tj.

$$f(xyz) = f(x)f(yz) - f(x+yz) + 1 = f(x)(f(y)f(z) - f(y+z) + 1) - f(x+yz) + 1.$$

Iako se na trenutak čini da smo ovim samo zakomlikovali situciju, to nije slučaj. Naime, izraz na levoj strani je simetričan, dok onaj na desnoj to nije, pa pisanjem istog izraza i za x i izjednačavanjem dobijamo

$$f(x)f(y+z) - f(x) + f(x+yz) = f(z)f(x+y) - f(z) + f(xy+z). \ (\star)$$

Stavaljanjem $z = -1$ (ovo na početku nismo mogli uraditi, jer nam je bilo fiksirano $z = 1$ io zato to treba sada iskoristiti) dobijamo $f(x)f(z-1) - f(x) + f(x-y) = f(xy-1)$, pa stavaljenjem $x = 1$ u ovu jednakost dobijamo $f(y-1)(1-f(1)) = f(1-y) - f(1)$ (*). Stavaljenjem $y = 2$ u ovu jednakost dobijamo $f(1)(2-f(1)) = 0$, tj. $f(1) = 0$ ili $f(1) = 2$. Znači i ovde imamo dva slučaja:
Slučaj 1.1 Ukoliko je $f(1) = 0$, tada iz (*) stavljanjem $y+1$ umesto y dobijamo $f(y) = f(-y)$. Dalje, stavljenjem u početnu jednakost $-y$ umesto y dobijamo $f(xy) = f(x)f(y) - f(x-y) + 1$, pa je $f(x+y) = f(x-y)$, za svaka dva racionalne broja x i y. posebno za $x = y$ dobijamo $f(2x) = f(0) = 1$, za sve racionalne x. Međutim ovo je kontradikcija sa $f(1) = 0$. U ovom slučaju nema rešenja.
Slučaj 1.2 Ukoliko je $f(1) = 2$, stavljanjem u (*) $y+1$ umesto y dobijamo $1 - f(y) = f(-y) - 1$. Jasno je da trebamo izvršiti smenu $g(x) = 1 - f(x)$, jer iz prethodne jednakosti dobijamo $g(-x) = -g(x)$, tj. g je neparna. Dalje, zamenom g u početnu jednakost dobijamo

$$g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x+y). \ (+)$$

Stavljenjem $-y$ umesto y dobijamo $-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x-y)$, pa sabiranjem sa prethodnom dobijamo $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)$. Za $x = y$ je $g(2x) = 2g(x)$, pa se dobija i jednačina $g(x+y) + g(x-y) = g(2x)$. Kao i u primeru 6. ovo je Košijeva jednačina, pa kako je domen $\mathbf{Q}$, to je $g(x) = rx$, za neki racionalan broj r (jer je kodomen isto $\mathbf{Q}$). Zamenom u (+) dobijamo da je $r = -1$, a proverom da funkcija $f(x) = 1 + x$ zaista zadovoljava uslove zadatka.
Drugi slučaj. Neka je $f(1) = 1$. Stavljanjem $z = 1$ u ($\star$) dobijamo

$$f(xy+1) - f(x)f(y+1) + f(x) = 1,$$

pa za $y = -1$ dobijamo $f(1-x) = 1$, za svaki racionalan broj x. Znači $f(x) \equiv 1$ i ova funkcija zadovoljava datu jednačinu.
Uradimo sada zadatak u slučaju da je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Primetimo da u prethodnim razmatranjima nigde nismo koristili da je kodomen $\mathbf{Q}$, pa zaključujemo da je za sve racionalne brojeve $f(q) = q + 1$ ili $f(q) = 1$. Ukoliko je $f(q) = 1$ za sve racionalne q, isto kao u prethodnom se dokazuje da je $f(x) \equiv 1$. Neka zato nije $f(q) \equiv 1$, za sve $q \in \mathbf{Q}$. Iz prethodnog imamo da je $g(x) + g(y) = g(x+y)$, pa još treba dokazati npr. monotonost. Zamenimo u (+) $x = y$ i korišćenjem $g(2x) = 2g(x)$ dobijamo $g(x^2) = -g(x)^2$, pa je za sve pozitivne r vrednost $g(r)$ nepozitivna. Zato ukoliko je $y > x$, tj. $y = x + r^2$ dobijamo $g(y) = g(x) + g(r^2) \leq g(x)$, pa je funkcija opadajuća. Znači $f(x) = 1 + \alpha x$ i posle malo računa $f(x) = 1 + x$. Provera pokazuje da dobijene funkcije zadovoljavaju datu jednačinu.

Primer 14 *(IMO 2003, predlog) Neka je* $\boldsymbol{R}^+$ *skup pozitivnih realnih brojeva. Naći sve funkcije* $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ *koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

a) $f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)=f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$

b) $f(x)<f(y)$ *za sve* $1\leq x<y$.

Rešenje. Primetimo da rešenje ove funkcionalne jednačine nije neko od karakterističnih rešenja. Naime, jedno od rešenja je $f(x)=x+\frac{1}{x}$, što govori o tome da će se ova jednakost teško rešiti svođenjem na Košijevu jednačinu, ili na neki sličan način. Prvo stavljanjem $x=y=z=1$ dobijamo $f(1)=2$ (jer je $f(1)>0$). Jedna od glavnih osobina datog rešenja je da je $f(x)=f(1/x)$, pa nam je dokazivanje ove jednakosti sledeći korak. Ovo dobijamo stavljanjem $x,x,\frac{1}{x}$, tj. $f(x)+2f(x)+f(\frac{1}{x})=f(x)f(1)^2$, što je ekvivalentno sa traženom jednakosti. Primetimo da je sada $f(x)\geq f(1)=2$, za svako $x>0$. Ovo je jedna od ključnih stvari. Naime, kod jednačina kod kojih je rešenje datog oblika dobro je uvesti smenu

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)},$$

gde je $g(x)\geq 1$, a ovo je moguće ako i samo ako je $f(x)\geq 2$. Stavljanjem u početnu jednakost x^2 i $y=z=1$ dobijamo $f(x^2)+f(1)=f(x)^2$. Iz ovoga lako dobijamo $g(x^2)=g(x)^2$ (jer je $g(x),g(x^2)\geq 0$). Sada je jasno da trebamo dokazati da je $g(x^n)=g(x)^n$, što nije teško uraditi indukcijom. Dalje je lako i $g(x^q)=g(x)^q$, za svako $r\in\mathbf{Q}$. Kako za $x\geq 1$ funkcija f raste, to za $x\geq 1$ i funkcija g raste. Za fiksirano x skup x^q je svuda gust na $\mathbf{R}$, pa iz monotonski funkcije g dobijamo da je $g(x)^r=g(x^r)$ za sve $r\in\mathbf{R}$ (ako vam se ovo objašnjenje ne sviđa, ili vam nije dovoljno jasno, dokaz možete izvesti kao u primeru 2). Sada je jasno da je $g(x)=x^r+x^{-r}$, za neki realan broj r.
Proverom se dokazuje da svaka od ovih funkcija zadovoljava uslove zadatka.

Primer 15 *Naći sve funkcije* $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ *koje zadovoljavaju uslove:*

(a) $f(x)\leq 2(1+x)$ *za svako* $x\in[1,\infty)$;

(b) $xf(x+1)=f(x)^2-1$ *za svako* $x\in[1,\infty)$.

Rešenje. Kao što je i rečeno uvek treba videti koja bi funkcija eventalno mogla da bude rešenje. Nije teško videti da je jedna ovakva funkcija $f(x)=x+1$. Pokušajmo da dokažemo da je ovo jedina takva funkcija. Korišćenjem datih uslova dobijamo

$$f(x)^2=xf(x+1)+1\leq x(2(x+1))+1<2(1+x)^2,$$

tj. $f(x)\leq\sqrt{2}(1+x)$. Ovim smo dobili manju gornju granicu za $f(x)$. Kako je nama cilj da dokažemo da je $f(x)=x+1$ nastavljamo dalje istim postupkom u cilju smanjenja gornje granice. Slično kao u prethodnom dobijamo

$$f(x)^2=xf(x+1)+1\leq x(\sqrt{2}(x+1))+1<2^{1/4}(1+x)^2.$$

Sada je jasno da indukcijom trebamo dokazati da je

$$f(x)<2^{1/2^k}(1+x),$$

za svako k. Ovo se dokazuje na isti način kao i prethodne dve nejednakosti. Elementarno znanje o konvergenciji nizova nam govori da $2^{1/2^k}\to 1$ kad $k\to+\infty$, pa za fiksirano x ne može biti $f(x)>x+1$. Znači $f(x)\leq x+1$ za svaki realan broj $x\geq 1$. Naravno naredna ideja je da nekako pokažemo i da je $f(x)\geq x+1$, za svaki realan broj x (veći od 1). Postupajmo na sličan način. Iz kodomena date funkcije imamo $\frac{f(x)^2-1}{x}=f(x+1)\geq 1$, tj. $f(x)\geq\sqrt{x+1}>x^{1/2}$. Dalje je $f(x)^2=1+xf(x+1)>1+x\sqrt{x+2}>x^{3/2}$ i slično indukcijom

$$f(x)>x^{1-1/2^k}.$$

Prelaskom na granične vrednosti je $f(x)\geq x$. Sada je opet iz date jednakosti $f(x)^2=1+xf(x+1)\geq(x+1/2)^2$, tj. $f(x)\geq x+1/2$. Indukcijom $f(x)\geq x+1-\frac{1}{2^k}$, pa prelaskom na granične vrednosti dobijamo traženo, tj. $f(x)\geq x+1$.

Primer 16 *(IMO 1999, 6 zad) Naći sve funkcije* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ *takve da je*

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1.$$

Rešenje. Neka je $A=\{f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$, tj. $A=f(\mathbf{R})$. Odredimo vrednost funkcije na A. Neka je $x=f(y)\in A$, za neko y. Iz date jednakosti je tada $f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$, tj.

$$f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2},$$

gde je $f(0) = c$. Sada je jasno da trebamo ispitati osobine skupa A. Iz date jednakosti za $x = y = 0$ dobijamo $f(-c) = f(c) + c - 1$, pa je $c \neq 0$. Dalje, stavljanjem u datu jednakost $y = 0$ dobijamo $f(x-c) - f(x) = cx + f(c) - 1$. Kako je kodomen funkcije na desnoj strani $\mathbf{R}$, to je i $\{f(x-c) - f(x) \,|\, x \in \mathbf{R}\}$, tj. $A - A = \mathbf{R}$. Znači za svaki realan broj x postoje realni brojevi $y_1, y_2 \in A$, takvi da je $x = y_1 - y_2$. Sada je

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_1 - f(z)) = f(f(z)) + y_1 f(z) + f(y_1) - 1 = f(y_1) + f(y_2) + y_1 y_2 - 1 = c - \frac{x^2}{2}.$$

Iz polazne jednakosti lako dobijamo $c = 1$.
Lako se pokazuje da funkcija $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ zadovoljava datu jednakost.

Primer 17 *Neka je $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ neprekidna funkcija za koju važi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $f^{(n)}(x) = x$, za sve $x \in [0,1]$ (n je dati prirodan broj). Dokazati da je $f(x) = x$, za svako $x \in [0,1]$.*

Rešenje. Prvo iz $f(x) = f(y)$ sledi i $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(y)$, pa je f injektivna. Ideje za preostali deo zadatka dobijate ukoliko nacrtate grafik. Naime, sa slike se lako zaljučuje da funkcija mora biti strogo rastuća, pa ćemo to i dokazati. Neka je suprotno tome za neka dva $x_1 < x_2$ i $f(x_1) \geq f(x_2)$. Zbog neprekidnosti na $[0, x_1]$ po Vajerštrasovoj teoremi postoji c takvo da je $f(c) = f(x_2)$, što je očigledna kontradikcija sa činjenicom da je f injektivna. Sada ukoliko je $x < f(x)$, dobijamo $f(x) < f(f(x))$ itd. $x < f(n)(x) = x$. Slično dobijamo kontradikciju ukoliko pretpostavimo da je $x > f(x)$. Znači za svako $x \in [0,1]$ važi $f(x) = x$.

Primer 18 *Naći sve funkcije $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, tako da je $f(f(x) + y) = xf(1 + xy)$, za sve $x, y \in (0, +\infty)$.*

Rešenje. Jasno je da je $f(x) = \dfrac{1}{x}$ jedno rešenje date funkcionalne jednačine. Dokažimo zato da je funkcija nerastuća. Neka je suprotno tome za neko $0 < x < y$ i $0 < f(x) < f(y)$. Kako želimo da iskoristimo ovaj uslov na naki način je logično koristiti izraz oblika $z = \dfrac{yf(y) - xf(x)}{y - x}$, jer je on pozitivan i veći od $f(y)$. Sada, stavaljenjem u početnoj jednakosti $z - f(y)$ umesto y i y umesto x, pa zatim $z - f(x)$ umesto y i izjednačavanjem dobijamo $x = y$, što je kontradikcija. Znači funkcija je nerastuća. Dokažimo još i da je $f(1) = 1$. Neka je $f(1) \neq 1$. Zamenom $x = 1$ dobijamo $f(f(1) + y) = f(1 + y)$, pa je $f(u + |f(1) - 1|) = f(u)$, za $u > 1$. Znači funkcija je periodična na intervalu $(1, +\infty)$, pa kako je i monotona, to je ona konstanta. Međutim tada je leva strana početne jednakosti konstanta, a desna nije. Znači mora biti $f(1) = 1$. Dokažimo prvo da je za $x > 1$ i $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Naime, za $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ u datoj jednakosti dobijamo $f\Big(f(x) - \dfrac{1}{x}\Big) = xf(x)$. Sada, ukoliko je $f(x) > \dfrac{1}{x}$, imamo $f\Big(f(x) - \dfrac{1}{x} + 1\Big) \leq f(1) = 1$, a $xf(x) > 1$. Ukoliko je $f(x) < \dfrac{1}{x}$ imamo $f\Big(f(x) - \dfrac{1}{x} + 1\Big) \geq f(1) = 1$, a $xf(x) < 1$. Znači $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Ukoliko je $x < 1$, stavljanjem $y = \dfrac{1}{x}$ dobijamo

$$f\Big(f(x) + \frac{1}{x}\Big) = xf(2) = \frac{x}{2},$$

pa kako je $\dfrac{1}{x} \geq 1$, dobijamo $f(x) + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$, tj. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i u ovom slučaju. Znači $f(x) = \dfrac{1}{x}$, za sve pozitivne realne brojeve x.

Primer 19 *(Bugarska 1998) Dokazati da ne postoji funkcija $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, takva da je $f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x) + y)$, za svaka dva pozitivna realna broja x i y.*

Rešenje. Česta ideja kod ovakvih zadataka je dokazati da je za neko $y > 0$, $f(y) < 0$, što bi dovelo do očigledne kontradikcije. Takođe, jasno je da je za dobijanje kontradikcije dovoljno i $f(x) - f(x+1) \geq c > 0$, za svako x, jer se sabiranjem ovakvih nejednakosti dobija $f(x) - f(x+m) \geq mc$, što za dovoljno veliko m dovodi do $f(x+m) < 0$. Znači cilj nam je nalaženje c takvo da je $f(x) - f(x+1) \geq c$, za svako x. Pretpostavimo da funkcija postoji. Iz date nejednakosti dobijamo $f(x) - f(x+y) \geq \dfrac{f(x+y)y}{f(x)}$, pa je funkcija očigledno opadajuća. Takođe iz date jednakosti možemo zaključiti i da je

$$f(x) - f(x+y) \geq \frac{f(x)y}{f(x) + y},$$

jednostavnim sređivanjem. Neka je n prirodan broj takav da je $f(x+1)n \geq 1$ (ovakav broj očigledno postoji). Primetimo da za svako $0 \leq k \leq n-1$ važi

$$f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) - f\Big(x + \frac{k+1}{n}\Big) \geq \frac{f\Big(x + \frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n}}{f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2n},$$

pa sabiranjem ovakvih jednakosti za sve opiane k dobijamo $f(x) - f(x+1) \geq \dfrac{1}{2}$, što po prethodnom dovodi do kontradikcije.

Primer 20 *Neka je $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ funkcija koja zadovoljava*

$$f(1)=2, \quad f(2)=1, \quad f(3n)=3f(n), \quad f(3n+1)=3f(n)+2, \quad f(3n+2)=3f(n)+1.$$

Odrediti broj prirodnih brojeva $n \le 2006$, za koje je $f(n)=2n$.

Rešenje. Ovo je jedan od karakterističnih zadataka u kojima brojeve treba posmatrati u nekoj osnovi koja nije 10. S obzirom na jednačine date u zadatku jedino je logično posmatrati osnovu 3. Izračunajnmo vrednosti $f(n)$ za $n \le 8$ u nadi da će nam to pomoći da pogodimo koje bi opšte rešenje trebalo da bude (jasno je da data jednakost može imati samo jedno rešenje).

$$f((1)_3)=(2)_3, \quad f((2)_3)=(1)_3, \quad f((10)_3)=6=(20)_3, \quad f((11)_3)=8=(22)_3,$$

$$f((12)_3)=7=(21)_3, \quad f((20)_3)=3=(10)_3, \quad f((21)_3)=5=(12)_3, \quad f((22)_3)=4=(11)_3.$$

Jasno je da je $f(n)$ broj koji se dobija od n zamenom svake cifre 2 sa 1, i obrnuto, u zapisu sa osnovom 3. Ovo se sada jednostavno dokazuje indukcijom.
Jasno je da $f(n)=2n$ ako i samo ako u sistemu sa osnovom 3 n ne sadrži nijednu cifru 1 (jer je tada $f(n)<2n$). Lako se izbroji da je broj ovakvih brojeva n jednak 127.

Primer 21 *(BMO 2003, predlog) Odrediti sve moguće vrednosti za $f\left(\frac{2004}{2003}\right)$ ukoliko je $f: \boldsymbol{Q} \to [0,+\infty)$ funkcija koja zadovoljava uslove:*

(a) $f(xy)=f(x)f(y)$ za sve $x,y \in \boldsymbol{Q}$;

(b) $f(x) \le 1 \Rightarrow f(x+1) \le 1$ za sve $x \in \boldsymbol{Q}$;

(b) $f\left(\frac{2003}{2002}\right)=2$.

Rešenje. Primetimo prvo da je iz (a) i (c) data funkcija pozitivna $f(x)>0$, za svako racionalno x. Znači iz (a) za $x=y=1$ dobijamo $f(1)=0$ i slično za $x=y=-1$ dobijamo $f(-1)=1$. Sada je indukcijom $f(x)\le 1$, za svaki ceo broj x. Za $f(x)\le f(y)$ iz $f\left(\frac{y}{x}\right)f(y)=f(x)$ imamo i $f\left(\frac{y}{x}\right)\le 1$, pa po (b) i $f\left(\frac{y}{x}+1\right)\le 1$. Znači

$$f(x+y)=f\left(\frac{y}{x}+1\right)f(x)\le f(x),$$

pa je $f(x+y)\le \max\{f(x),f(y)\}$, za svaka dva racionalna broja x i y. Postavlja se pitanje zašto nam je palo na pamet du uopšte posmatramo sve ovo. Odgovor sledi iz sledećeg, često zanemarivanog tvrđenja, koje kaže da za svaka dva uzajamno prosta broja u i v, postoje celi brojevi a i b takvi da je $au+bv=1$. A što nam je uopšte pa ovo potrebno? Mi smo dobili da je $f(1)=1$, a znamo da je $f(x)\le 1$, za sve $x\in \mathbf{Z}$, pa kako je u 1 maksimum funkcije na $\mathbf{Z}$ i kako imamo prethodnu jednakost, cilj nam je da za jednu veću klasu celih brojeva pokažemo da je vrednost funkcije u svakoj njenoj tački jednaka 1. To ćemo uraditi za proste brojeve. Ukoliko je prvo za svaki prost $f(p)=1$, tada je i $f(x)=1$, za svaki ceo broj x, pa je i $f(x)\equiv 1$, što je kontradikcija sa (c). Neka je zato $f(p)\ne 1$, za neko $p\in \mathbf{P}$. Prema prethodnom postoje a i b takvi da je $ap+bq=1$, pa je $f(1)=f(ap+bq)\le \max\{f(ap),f(bq)\}$. Sada mora biti $f(bq)=1$ i samim tim $f(q)=1$, za svaki preostali prost broj q. Iz (c) imamo

$$f\left(\frac{2003}{2002}\right)=\frac{f(2003)}{f(2)f(7)f(11)f(13)}=2,$$

pa je tačno je jedan od brojeva $f(2),f(7),f(11),f(13)$ jednak $1/2$. Znači $f(3)=f(167)=f(2003)$, pa je

$$f\left(\frac{2004}{2003}\right)=\frac{f(2)^2f(3)f(167)}{f(2003)}=f(2)^2.$$

Ukoliko je $f(2)=1/2$, tada je $f\left(\frac{2003}{2002}\right)=\frac{1}{4}$, a inače je jednak 1. Još treba konstruisati po jednu funkciju za svaku od datih vrednosti. Za prvu vrednost to je multiplikativna funkcija koja uzima vrednost $1/2$ u tački 2, a u svim ostalim prostim brojevima 1, a u drugom slučaju to je multiplikativna funkcija koja npr. u tački 7 uzima vrednost $1/2$, a u svim ostalim prostim brojevima vrednost 1. Za ove funkcije treba proveriti samo uslov (b), ali i on se jednostavno proverava.

Primer 22 *Neka je $I=[0,1]$, $G=I\times I$ i $k\in \boldsymbol{N}$. Naći sve $f: G\to I$ takve da za sve $x,y,z\in I$ važi*

(a) $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$;

(b) $f(x,1)=x$, $f(x,y)=f(y,x)$;

(c) $f(zx,zy)=z^kf(x,y)$ za sve $x,y,z\in I$, gde je k fiksirani realan broj.

Rešenje. Evo i jednog zadatka u kojima učestvuje funkcija više promenljivih. U većini ovakvih slučajeva postupa se slično kao i u slučajevima funkcija jedne promenljive. Iz uslova (b) imamo da je $f(1,0) = f(0,1) = 0$, pa iz uslova (c) dobijamo $f(0,x) = f(x,0) = x^k f(1,0) = 0$. Znači f je u potpunosti definisana na rubu oblasti G. Neka je zato $0 < x \leq y < 1$. Primetimo da nam uslov (b) daje vrednost za jednu klasu parova iz G i da se svaki par iz G može svesti na jedan od čalnova te klase. Znači

$$f(x,y) = f(y,x) = y^k f\Big(1, \frac{x}{y}\Big) = y^{k-1}x.$$

Ovo se može zapisati i kao $f(x,y) = \min(x,y)(\max(u,v))^{k-1}$, za sve $0 < x, y < 1$. Odredimo sve moguće vrednosti za k. Neka je $0 < x \leq \dfrac{1}{2} \leq y < 1$. Iz uslova (a), i već dobijenog dobijamo

$$f\Big(f\Big(x, \frac{1}{2}\Big), y\Big) = f\Big(x\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1}, y\Big) = f\Big(x, f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) = f\Big(x, \frac{1}{2}y^{k-1}\Big).$$

Uzmimo sada i da je $x \leq 2^{k-1}y$ (da bismo dobijeni izraz uprostili). Izraz se svodi na $f\Big(x, \dfrac{1}{2}y^{k-1}\Big) = x\Big(\dfrac{y}{2}\Big)^{k-1}$, pa ukoliko uzmemo x takvo i da je $2x \leq y^{k-1}$, dobijamo da je $k-1 = (k-1)^2$, tj. $k = 1$ ili $k = 2$. Za $k = 1$ rešenje je $f(x,y) = \min(x,y)$, a za $k = 2$ rešenje je $f(x,y) = xy$. Za oba rešenje lako se proveravaju da zadovoljavaju sve uslove zadatka.

Primer 23 *(APMO 1989) Naći sve striktno rastuće funkcije $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ takve da je*

$$f(x) + g(x) = 2x,$$

gde je g inverzna funkcija funkcije f.

Rešenje. Jasno je da je svaka funkcija oblika $x + d$ rešenje date jednačine. U ovom zadatku pojavljuje se još jedna korisna ideja. Naime, označimo sa S_d svih brojeva x za koje je $f(x) = x + d$. Cilj nam je dokažemo da je $S_d = \mathbf{R}$. Možemo pretpostaviti da je S_d neprazan. Dokažimo da ako je $x \in S_d$, da je tada i $x + d \in S_d$. Kako je $f(x) = x + d$, to je po definiciji inverzne funkcije $g(x + d) = x$, pa je iz date jednačine $f(x + d) = x + 2d$, tj. $x + d \in S_d$. Dokažimo dalje da su svi skupovi $S_{d'}$, gde je $d' < d$, prazni. Iz prethodnog imamo da je svaki od tip skupova beskonačan, tj. da ukoliko se u nekom od njih nalazi broj x, nalazi se i svaki broj oblika $x + kd$. Iskoristimo ovo da dokažemo kontradikciju. Naime, dokažimo da ukoliko je $x \in S_d$ i $x \leq y \leq x + (d - d')$, da tada $y \notin S_{d'}$. Pretpostavimo suprotno. Iz monotonosti imamo $y + d' = f(y) \geq f(x) = x + d$, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dalje indukcijom dokazujemo da za svako y

$$x + k(d - d') \leq x < x + (k+1)(d - d'),$$

važi da $y \notin S_{d'}$. Ovim smo dokazali da se svako $y > x$ ne nalazi u skupu $S_{d'}$. Međutim ovo je kontradikcija sa prethodno dobijenim osobinama skupova S_d i $S_{d'}$. Slično ukoliko je $d' > d$ zamenom uloga d i d' dobijamo kontradikciju.
Proverom dobijamo da svaka funkcija $f(x) = x + d$ zadovoljava datu funkcionalnu jednačinu.

Primer 24 *Odrediti sve funkcije $h : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ koje zadovoljavaju jednačinu*

$$h(h(n)) + h(n+1) = n + 2.$$

Rešenje. Primetimo da ovde imamo $h(h(n))$ i $h(n+1)$, pa nije moguće napraviti rekurentnu jednačinu. Zato imamo drugi prilaz rešavanju ove jednačine. Odredimo prvo $h(1)$ i $h(2)$. Stavljanjem $n = 1$ dobijamo $h(h(1)) + h(2) = 3$, pa je $h(h(1)) \leq 2$ i $h(2) \leq 2$. Zato razmatramo dva slučaja:
Prvi slučaj. $h(2) = 1$. Tada je $h(h(1)) = 2$. Stavljanjem $n = 2$ u datu jednkost dobijamo $4 = h(h(2)) + h(3) = h(1) + h(3)$. Neka je $h(1) = k$. Jasno je da $k \neq 1$ i $k \neq 2$ i da je $k \leq 3$. Znači $k = 3$, pa je $h(3) = 1$. Međutim iz $2 = h(h(1)) = h(3) = 1$ dobijamo kontradikciju. Znači u ovom slučaju nema rešenja.
Drugi slučaj. $h(2) = 2$. Tada je $h(h(1)) = 1$. Iz jednačine za $n = 2$ dobijamo $h(3) = 2$. Dalje, stavljanjem $n = 3, 4, 5$ dobijamo $h(4) = 3, h(5) = 4, h(6) = 4$, pa indukcijom lako dokazujemo da je $h(n) \geq 2$, za $n \geq 2$. Znači $h(1) = 1$. Takođe, jasno je da postoji najviše jedna funkcija koja zadovoljava datu jednakost. Znači dovoljno je pogoditi šta je rešenje date jednakosti i zatim to dokazati indukcijom (ili na neki sličan način). Sa npr. saveznog takmičenja 2005. vidimo da rešenje treba tražiti u obliku nekog celog dela. Rešenje je

$$h(n) = \lfloor n\alpha \rfloor + 1,$$

gde je $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (ova konstanta se lako nalazi kao rešenje $\alpha^2 + \alpha = 1$). Dokaz da ovo jeste rešenje izvodi se korišćenjem osobina celog dela (mada dokaz nije sasvim jednostavan)...

Primer 25 *(IMO 2004, predlog) Odrediti sve funkcije $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ koje zadovoljavaju jednakost*

$$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = f(x+y)^2.$$

Rešenje. Ovo je jedan od zadataka u kome se dobija krajnje neočekivani skup rešenja.
Rešenje možete naći u odgovarajućoj knjizi autora Đukića, Matića, Jankovića i Petrovića...

§ Zadaci za samostalan rad

Većina ideja za rešavanje ovih zadataka može se pronaći u teorijskom uvodu i u datim primerima. Zadaci variraju po težini, kao i po idejama koji se u njima koriste. Pre rešavanja ovih zadataka svakako se preporučuje da se prethodno reše primeri, ili u krajnjem slučaju pročitaju rešenja istih. Neki zadaci su mnogo teški, pa se ne uzbuđujte previše ukoliko ih ne rešite. Za sva pitanja, sugestije i eventualne greške (kojih sigurno ima) pišiti na dati mejl.

1. Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ koje zadovoljavaju jednačinu $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$.

2. Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ za koje je $f(0) = 1$ i $f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n$, za svaki prirodan broj n.

3. Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ za koje je $f(n)$ kvadrat prirodnog broja za svako $n \in \mathbf{N}$ i koje zadovoljavaju jednakost $f(m + n) = f(m) + f(n) + 2mn$, za sve $m, n \in \mathbf{N}$.

4. Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost $f((x - y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$.

5. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Naći sve monotone funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n.$$

6. (SAD 2002) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost $f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$.

7. (Interno 2004) Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takve da je $f(f(m) + f(n)) = m + n$, za svaka dva prirodna broja m i n.

8. Naći sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

9. (IMO 1983, 1 zad) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da važi

(a) $f(xf(y)) = yf(x)$, za sve $x, y \in \mathbf{R}$;

(b) $f(x) \to 0$ kada $x \to +\infty$.

10. Neka je $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija koja zadovoljava jednakost $f(f(n)) = 3n$, za svaki prirodan broj n. Odrediti $f(2006)$.

11. (IMO 1989, predlog) Neka je $0 < a < 1$ realan broj i f neprekidna funkcija na $[0, 1]$ koja zadovoljava $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = (1 - a)f(x) + af(y),$$

za svaka dva realna broja $x, y \in [0, 1]$ takva da je $x \leq y$. Odrediti $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

12. (IMO 1996, predlog) Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je $|f(x)| \leq 1$ i

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Dokazati da je f periodična.

13. (BMO 2003, 3 zad) Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(a) $f(x + y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, za svako x, $y \in \mathbf{Q}$;

(b) $f(x) = 2f(x + 1) + 2 + x$, za svako $x \in \mathbf{Q}$;

(c) $f(1) + 1 > 0$.

14. (IMO 1990, 4 zad) Naći funkciju $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ takvu da je

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \text{ za sve } x, y \in \mathbf{Q}^+.$$

15. (IMO 2002, predlog) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

16. (Iran 1997) Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ rastuć funkcija takva da je za sve pozitivne realne brojeve x i y

$$f(x + y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x))).$$

Dokazati da je $f(f(x)) = x$.

17. (IMO 1992, 2 zad) Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takve da je $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

18. (IMO 1994, 5 zad) Neka je S skup svi realnih brojeva strogo većih od -1. Naći sve funkcije $f : S \to S$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:

(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ za sve x, $y \in S$;

(b) $\dfrac{f(x)}{x}$ strogo raste na svakom od intervala $-1 < x < 0$ i $0 < x$.

19. (IMO 1994, predlog) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ takve da je $f(x)f(y) = y^\alpha f(x/2) + x^\beta f(y/2)$, za sve $x, y \in \mathbf{R}^+$.

20. (IMO 2002, 5 zad) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

21. (Vietnam 2005) Odrediti sve vrednosti realnog koeficijenta α za koje postoji tačno jedna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava jednakost

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha \cdot y.$$

22. (IMO 1998, 3 zad) Odrediti najmanju moguću vrednost za $f(1998)$, gde je $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funkcija koja zadovoljava

$$f(n^2 f(m)) = mf(n)^2.$$

23. Da li postoji funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da za svaki prirodan broj n važi:

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)?$$

24. (IMO 1987, 4 zad) Da li postoji funkcija $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ takva da je $f(f(n)) = n + 1987$?

25. Neka za funkciju $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ važi $f(n + 1) > f(f(n))$, za svako $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da je $f(n) = n$ za svako n.

26. Naći sve funkcije $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(1) $2f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$, za svaka dva prirodna brojeva m i n;

(2) ukoliko je $m \geq n$ tada je i $f(m^2) \geq f(n^2)$.

27. Naći sve funkcije $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ koje zadovoljavaju uslove:

(a) $f(2) = 2$;

(b) $f(mn) = f(m)f(n)$ za svaka dva uzajamno prosta prirodna broja m i n;

(c) $f(m) < f(n)$ uvek kada je $m < n$.

28. Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to [1, \infty)$ koje zadovoljavaju uslove pod (a) i (c) prethodnog zadatka, a uslov (b) je zadovoljen za svaka dva prirodna broja m i n.

29. Naći sve funkcije $f : N_0 \to N_0$ za koje važi jednakost

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k,$$

za svako $n \in N_0$ i fiksiran prirodan broj k.

30. (Vijetnam 2005) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost $f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$.

31. (Kina 1996) Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadovoljava jednakost $f(x^3 + y^3) = (x + y)\Big(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2\Big)$, za sve realne brojeve x i y. Dokazati da je za sve relane brojeve x ispunjeno $f(1996x) = 1996f(x)$.

32. Naći sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove:

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za svaka dva realna x i y;

(b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ za $x \neq 0$.

33. (IMO 1989, predlog) Funkcija $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ zadovoljava sledeće uslove:

(i) $f(0)=0$, $f(\alpha)>0$ za $\alpha\neq 0$;

(ii) $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ i $f(\alpha+\beta)\leq f(\alpha)+f(\beta)$, za sve $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$;

(iii) $f(m)\leq 1989$ za $m\in\mathbf{Z}$.

Dokazati da je $f(\alpha+\beta)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$ ukoliko je $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

34. Naći sve funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ za koje je za svaka dva realna broja $x\neq y$ zadovoljen uslov

$$f\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

35. Naći sve funkcije $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ koje zadovoljavaju uslove:

(a) $f(x+1)=f(x)+1$ za sve $x\in\mathbf{Q}^+$;

(b) $f(x^3)=f(x)^3$, za sve $x\in\mathbf{Q}^+$.

36. Naći sve neprekidne funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(xy+1).$$

37. Naći sve neprekidne funkcije $f,g,h,k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x+y)+g(x-y)=2h(x)+2k(y).$$

38. (IMO 1996, predlog) Odrediti sve funkcije $f:\mathbf{N}_0\to\mathbf{N}_0$ takve da je

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n).$$

39. (IMO 1995, predlog) Da li postoji funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koja zadovoljava sledeće uslove

(a) postoji pozitivan realan broj M takav da je $-M\leq f(x)\leq M$ za sve realne x;

(b) $f(1)=1$;

(c) ukoliko je $x\neq 0$ tada je $f\Big(x+\dfrac{1}{x^2}\Big)=f(x)+\Big[f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big]^2$?

40. (Beloruska Olimpijada) Naći sve neprekidne funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(f(x))=f(x)+2x.$$

41. Dokazati da ukoliko funkcija $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ zadovoljava jednakost

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+f\Big(\frac{2xy}{x+y}\Big)=f(x)+f(y),$$

da tada ona zadovoljava i jednakost $2f(\sqrt{xy})=f(x)+f(y)$.

42. Naći sve neprekidne funkcije $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x)f(y)=f(xy)+f(x/y).$$

43. Dokazati da ne postoji funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koja zadovoljava nejendakost $f(y)>(y-x)f(x)^2$, za svaka dva realna broja x i y.

44. (IMC 2001) Dokazati da ne postoji funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ za koju važi $f(0)>0$ i

$$f(x+y)\geq f(x)+yf(f(x)).$$

45. (Rumunija 1998) Naći sve funkcije $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takve da postoji striktno monotona funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takva da je

$$f(x+y)=f(x)u(y)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

46. (Iran 1999) Naći sve funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ za koje je

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y.$$

47. (IMO 1988, 3 zad) Funkcija $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ zadovoljava:

- $f(1) = 1$, $f(3) = 3$;
- $f(2n) = f(n)$;
- $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$ i $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$,

za svaki prirodan broj $n \in \mathbf{N}$. Odrediti sve prirodne brojeve $n \leq 1998$ takve da je $f(n) = n$.

48. (IMO 2000, predlog) Neka je $F : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ i neka za $n \geq 0$ važi

- $F(4n) = F(2n) + F(n)$;
- $F(4n+2) = F(4n) + 1$;
- $F(2n+1) = F(2n) + 1$.

Dokazati da je za svaki prirodan broj m, broj prirodnih brojeva n takvih da je $0 \leq n < 2^m$ i $F(4n) = F(3n)$ jednak $F(2^{m+1})$.

49. Neka je $f : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}^+$ funkcija za koju važi

$$f(xy, z) = f(x, z)f(y, z), \quad f(z, xy) = f(z, x)f(z, y), \quad f(x, 1-x) = 1,$$

za sve racionalne brojeve x, y, z. Dokazati da je $f(x, x) = 1$, $f(x, -x) = 1$ i $f(x, y)f(y, x) = 1$.

50. Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakosti

$$f(x, x) = x, \quad f(x, y) = f(y, x), \quad (x+y)f(x, y) = yf(x, x+y).$$

radmarko@yahoo.com
decembar 2005.