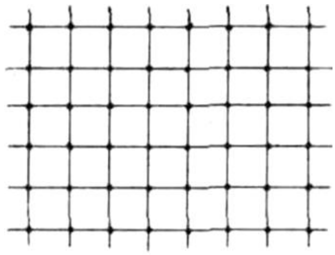
Владимир Стојановиќ, Белград

МНОГУАГОЛНИК ВО КВАДРАТНА МРЕЖА



Квадратна мрежа ја нарекуваме фигурата прикажана на цртежот десно, која ја определуваат две класи заемно нормални прави. Растојанието меѓу две соседни паралелни прави е еднаквио на 1. Квадратната мрежа ја дели рамнината на квадрати со должина на страна 1 и плоштина 1, кои ги нарекуваме *единечни квадрати*. Правите кои ја определуваат квадратната мрежа ќе ги наречеме *линии на мрежата,* а пресечните точки на линиите на мрежата ќе ги наречеме *јазли на мрежата*. Делови на квадратната мрежа, со кои читателите секојдневно се среќаваат, се страниците на тетратката по математика, на кои се нацртани квадратчиња. Многумина веројатно на овие листови цртале триаголници, четириаголници или произволни многуаголници. Некои, можда, пресметувале плоштина на овие многуаголници и без да знаат дека во определени случаи плоштината на многуаголник во квадратна мрежа може да се пресмета со едноставно пребројување на јазлите кои му припаѓаат на нацртаниот многуаголник.

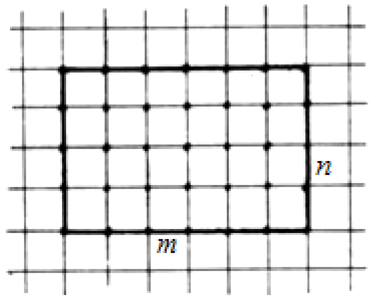
Прво ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 1. Ако страните на правоаголникот припаѓаат на линиите на квадратната мрежа, тогаш плоштината P а овој правоаголник е:

$$P = u + \frac{s}{2} + \frac{t}{2} - 1, \quad (1)$$

каде u е бројот на јазлите во внатрешноста на правоаголникот (не и на страните), s е бројот на јазлите на страните (не и во темињата) и t е бројот на јазлите во темињата.

Доказ. Нека m и n се мерните броеви на должината и ширината на правоаголникот (цртеж десно). Тогаш плоштината на правоаголникот е $P = mn$.



Бројот на јазлите во внатрешноста на правоаголникот е $u = (m-1)(n-1)$, бројот на јазлите на странатa со должина m е $m-1$, бројот на јазлите на странатa со должина n

е $n-1$, па затоа вкупниот број јазли на страните на правоаголникот е $s=2(m-1)+2(n-1)$. Бројот на јазлите во темињата е $t=4$. Затоа важи

$$\begin{aligned} u+\tfrac{s}{2}+\tfrac{t}{2}-1 &= (m-1)(n-1)+m-1+n-1+2-1 \\ &= mn-m-n+1+m+n-1=mn=P, \end{aligned}$$

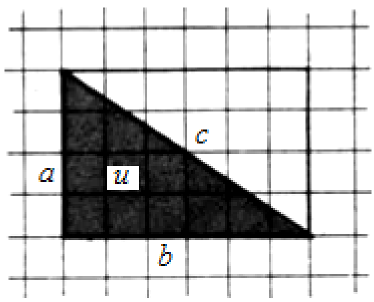
со што е докажана формулата (1). ■

Забелешка. Во натамошните излагања исклучиво ќе разгледуваме многуаголници чии темиња се во јазлите на квадратната мрежа. Секој таков многуаголник ќе го нарекуваме *многуаголник во квадратна мрежа*. Затоа бројот t секогаш ќе биде еднаков на бројот на темињата на многуаголникот.

Понатаму, користејќи ја теорема 1 лесно ќе докажеме уште неколку потребни тврдења.

Теорема 2. Плоштината P на триаголникот во квадратната мрежа, чии две страни припаѓаат на линиите на мрежата, се пресметува според формулата (1). .

Доказ. Нека u е бројот на јазлите на мрежата во внатрешноста на триаголникот и нека a,b,c се редоследно броевите на јазлите на страните на триаголникот. Јасно, $t=3$.



Бидејќи две негови страни припаѓаат на линиите на мрежата, триаголникот е правоаголен, па може со додавање на складен триаголник да се дополни до правоаголник (цртеж десно). На овој правоаголник може да се примени теорема 1, па имаме

$$P_1=u_1+\tfrac{s_1}{2}+\tfrac{t_1}{2}-1.$$

Бројот на јазлите во внатрешноста на правоаголникот е $u_1=2u+c$, бидејќи јазлите на страната c се во внатрешноста на правоаголникот. Овде $s_1=2a+2b$ и $t_1=4$, па затоа

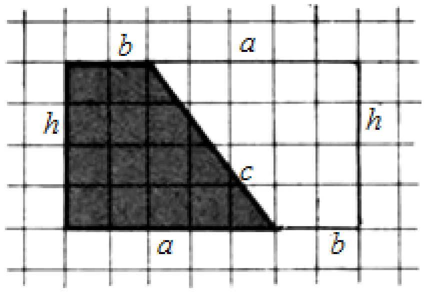
$$P_1=2u+c+\tfrac{2a+2b}{2}+\tfrac{4}{2}-1=2u+a+b+c+1.$$

Плоштината P на триаголникот е еднаква на половина од плоштината P_1 на квадратот, па затоа

$$P=\frac{P_1}{2}=u+\frac{a+b+c}{2}+\frac{1}{2}=u+\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}-1,$$

а тоа е формулата (1) применета на дадениот триаголник. ■

Задача 1. Докажи дека формулата (1) важи за правоаголен трапез во квадратна мрежа, ако основите на трапезот припаѓаат на линиите на мрежата.



Решение. Ќе ја користиме идејата од доказот на претходната теорема, т.е ќе го дополниме трапезот така што ќе добиема правоаголник (цртеж десно). За овој правоаголник важи формулата (1), т.е.

$$P_1=u_1+\frac{s_1}{2}+\frac{t_1}{2}-1,$$

каде $u_1=2u+c$, $s_1=2(a+b+1+h)$ и $t_1=4$. Имено, во внатрешноста на правоаголникот се наоѓаат и $2u$ јазли на трапезот и јазлите кои припаѓаат на кракот c на трапезот, висината h е и страна на трапезот, а другата страна на правоаголникот има $a+b+1$ јазол, бидејќи е броеио и едно теме на основата на трапезот. Значи

$$P_1=2u+c+a+b+1+h+2-1=2u+(a+b+c+h)+2.$$

Бидејќи плоштината на трапезот е половина од плоштината на правоаголникот, добиваме

$$P=\frac{1}{2}P_1=u+\frac{a+b+c+h}{2}+\frac{4}{2}-1=u+\frac{s}{2}+\frac{t}{2}-1,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 2. Докажи дека формулата (1) важи за секој триаголник во квадратна мрежа.

Решение. Имаме три можни случаи.

а) Две страни на триаголникот припаѓаат на линиите на мрежата.

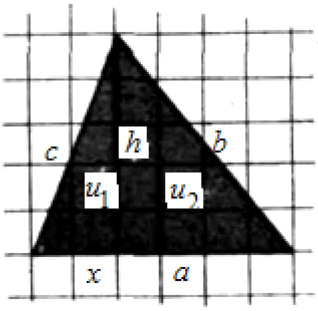
б) Една страна на триаголникот припаѓа на линиите на мрежата.

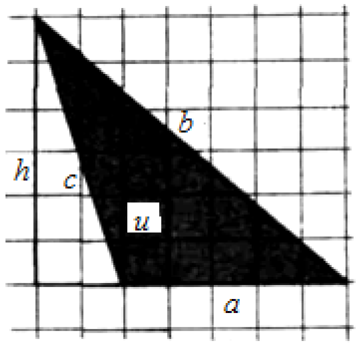
в) Ниту една страна на триаголникот не припаѓа на линиите на мрежата.

Ќе го разгледаме секој од овие три случаи.

а) Во овој случај станува збор за правоаголен триаголник и доказот е даден во теорема 2.

б) Нека претпоставиме дека страната која припаѓа на линиите на мрежата содржи a јазли. Подножјето на висината која соодветствува на оваа страна е јазол на мрежата на страната a (цртеж долу лево) или јазол на мрежета на продолжението на страната a (цртеж десно долу). Тврдењето ќе го докажеме за случајот прикажан на левиот цртеж, а за случајот прикажан на десниот цртеж му го препуштаме на читателот за вежба.



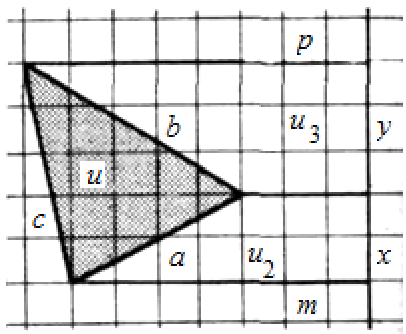


Нека броевите на јазлите на страните се a,b,c. Нека h е бројот на јазлите на висината и x е бројот на јазлите на едниот отсечок на страната a. Бројот на јазлите на другиот отсечок на оваа страна е $a-x-1$ (се исклучува подножјето на висината). Со висината дадениот триаголник е разложен на два правоаголни триаголника, за кои според теорема 2 важи формулата (1). Нека во внатрешностите на овие триаголници има u_1 и u_2 јазли (види цртеж). Тогаш за плоштината на дадениот триаголник важи

$$P = P_1 + P_2 = u_1 + \tfrac{x+h+c}{2} + \tfrac{3}{2} - 1 + u_2 + \tfrac{a-x-1+h+b}{2} + \tfrac{3}{2} - 1$$
$$= u_1 + u_2 + h + \tfrac{a+b+c}{3} + \tfrac{3}{2} - 1 = u + \tfrac{s}{2} + \tfrac{t}{2} - 1$$

т.е. точна е формулата (1).

в) Ако ниту една страна на триаголникот не припаѓа на линиите на мрежата, тогаш секогаш може да се избере една линија на мрежата надвор од триаголникот, таква што нормалите повлечени кон оваа линија од темињата на триаголникот со целата своја должина се надвор од триаголникот (цртеж десно). Овие висини, кои припаѓаат на линиите на мрежата, со страните на триаголникот и избраната линија формираат три правоаголни трапези за кои според 1 важи формулата (1). Нека во внатрешностите на малите трапези, надвор од дадениот триаголник, има по u_1 и u_2 јазли. При ознаки на цртежот за плоштината



на дадениот триаголник важи $P = P_1 - (P_2 + P_3)$, каде P_1 е плоштината на најголемиот трапез. Сега за P_1, P_2 и P_3 ќе ја примениме формулата (1). Нека со m, n, p ги означиме броевите на јазлите на основите на трапезите. Тогаш во внатрешноста на големиот трапез има $u + u_2 + u_3 + a + b + n + 1$ јазли ($a+1$ означува дека е земено во предвид и темето на дадениот триаголник). Според тоа,

$$\begin{aligned} P &= u + u_2 + u_3 + a + b + n + 1 + \tfrac{m+x+y+1+p+c}{2} + \tfrac{4}{2} - 1 \\ &\quad - (u_2 + \tfrac{m+x+n+a}{2} + \tfrac{4}{2} - 1 + u_3 + \tfrac{n+y+p+b}{2} + \tfrac{4}{2} - 1) \\ &= u + \tfrac{a+b+c}{2} + \tfrac{3}{2} - 1 = u + \tfrac{s}{2} + \tfrac{t}{2} - 1, \end{aligned}$$

т.е. точна е формулата (1). ■

Теорема 3. Формулата (1) важи за секој конвексен многуаголник во квадратна мрежа.

Доказ. Во произволен конвексен многуаголник со n темиња од едно теме може да се повлечат $n-3$ дијагонали (цртеж десно). На тој начин многуаголникот е поделен на $n-2$ триаголника и на секој од овие триаголници може да се примени формулата (1). Нека јазлите на овој многуаголник се распоиредени како на цртежот десно. Тогаш за плоштините на добиените триаголници важи:

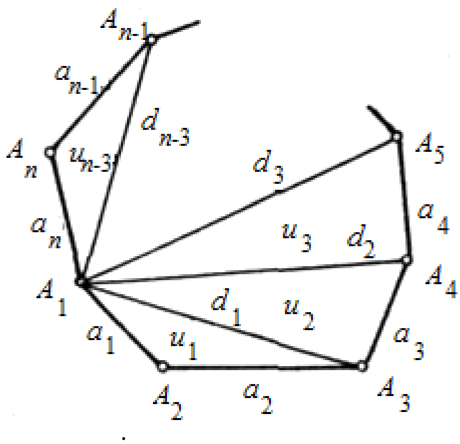
$$P_1 = u_1 + \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + d_1) + \tfrac{1}{2},$$

$$P_2 = u_2 + \tfrac{1}{2}(d_1 + a_3 + d_2) + \tfrac{1}{2}$$

$$P_3 = u_3 + \tfrac{1}{2}(d_2 + a_4 + d_3) + \tfrac{1}{2}$$

....

$$P_{n-2} = u_{n-2} + \tfrac{1}{2}(d_{n-3} + a_{n-1} + a_n) + \tfrac{1}{2}$$



Збирот на плоштините на овие триаголници е еднаков на плоштината на многуаголникот. Гледаме дека во вкупниот збир броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ се појавуваат само по еднаш со коефициент $\frac{1}{2}$, а секој од броевите $d_1, d_2, ..., d_{n-3}$ се појавува по два пати со коефициент $\frac{1}{2}$. Според тоа, ако ги собереме горните равенства, бидејќи

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-3},$$
$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$t = n$$

добиваме

$$P = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-3} + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2} + \frac{n-2}{2}$$
$$= u + \frac{s}{2} + \frac{t}{2} - 1,$$

што и требаше да се докаже. ■

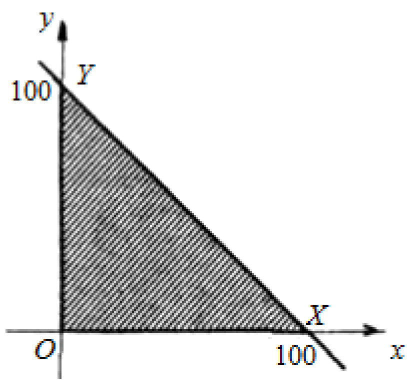
Како што видовме, формулата (1) е применлива за пресметување на плоштината на сите конвексни многуаголници на квадратна мрежа. Читателите може да се уверат за полезноста на оваа формула кога треба да се пресмета, на пример, плоштина на фигура чии страни не припаѓаат на линиите на мрежата. Конечно, формулата (1) може да се искористи и за приближно пресметување на било која фигуранацртана во квадратна мрежа, ако истата претходно ја замениме со многуаголник кој треба што е можно помалку да се разликуваод таа фигура, а чии темиња се наоѓаат во темињата на мрежата.

Наведената формула може да се искористи и за решавање на некои комбинаторни проблеми. Да решиме две такви задачи.

Задача 3. Во множеството природни броеви определи го бројот на решенијата на равенката

$$x + y + z = 100.$$

Решение. Бројот на решенијата на дадената равенка е еднаков на бројот на решенијата на неравенката $x + y < 100$. Навистина, на секој пар природни броеви (x, y) кои ја задоволува оваа неравенка, му соодветствува природен број z таков што $x + y + z = 100$. Сега, ако во кординатен систем го нацртаме графикот на правата $x + y = 100$ (цртеж десно), гледаме дека бараниот број решенија е еднаков на бројот на точките со целобројни координати, односно на бројот на јазлите на квадратната мрежа, внатре во триаголникот OXY. Сега бројот на јазлите ќе го пресметаме со помош на формулата (1).



Плоштината на триаголникот OXY е $P=\frac{100\cdot100}{2}=5000$. Бројот на јазлите на секоја од страните на триаголникот е 99. Така добиваме

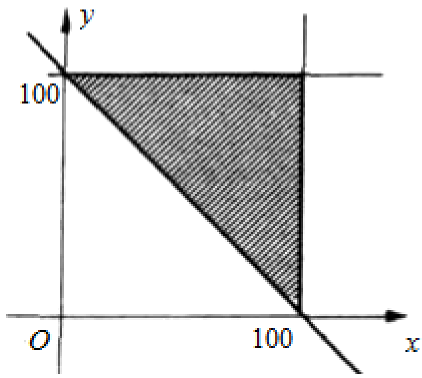
$$5000=u+\frac{3\cdot99}{2}+\frac{3}{2}-1,\text{ т.е. } u=4851.$$

Според тоа, во множеството природни броеви равенката $x+y+z=100$ има 4851 решение. ■

Задача 4. Определи го бројот на триаголниците чиј периметар е еднаков на 200, а чии должини на страни се изразени со природни броеви.

Решение. Нека должините на страните на триаголникот се еднакви на x,y и $200-x-y$. Тие мора да го задоволуваат неравенството на триаголник, што значи дека

$$x+y>200-x-y,$$
$$y+200-x-y>x,$$
$$x+200-x-y>y,$$



од каде добиваме

$$x+y>100,\ x<100,\ y<100.$$

Овие три неравенства ги задоволуваат точки со целобројни координати, а тоа се јазлите на квадратната мрежа на осенчениот триаголник на цртежот десно. Очигледно овој триаголник е складен со триаголникот OXY од задача 3, па затоа според задача 3 бројот на јазлите во него е 4851. На секој јазол му соодветствува по еден триаголник со целобројни страни, чиј периметар е 200. Но, меѓу нив има и складни триаголници. Така триаголникот со страни (a,b,c) во збирот 4851 се појавува точно 6 пати, како: $(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b),(b,a,c),(c,b,a)$ и (a,c,b). Освен тоа, секој триаголник со две еднакви страни се по јавува по три пати, како на пример: $(a,b,b),(b,a,b)$ и (b,b,a). Триаголници со две еднакви страни се:

$$(2,99,99),(4,98,98),...,(98,51,51)$$

и тие се вкупно 49. Тие во вкупниот збир учествуваат како $3\cdot49=147$ триаголници. Затоа бројот на триаголниците со различлни страни е еднаков на

$$\frac{4851-147}{6}=774.$$

Конечно, вкупниот број барани триаголници е еднаков на $49+784=833$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека формулата (1) важи за тапоаголен триаголник кај кој само една страна е на линиите на мрежата.

2. Користејќи ја формулата (1) докажи дека плоштината на триаголникот ABC: $A(0,0)$, $B(x_1 y_1)$ и $C(x_2, y_2)$ чии темиња се со целобројни координати се пресметува според формулата:
$$P = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

3. Докажи дека формулата (1) важи и за произволен конкавен многуаголник, т.е. дека важи за секој многиаголник.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија