Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Ванѓел Каруловски
Скопје

ИНВЕРЗНИ ЕЛЕМЕНТИ

Познато ти е дека производот на произволен рационален број $\frac{m}{n}$ и неговата реципрочна вредност бројот $\frac{n}{m}$ е еднаков на 1. Збирот пак на произволен цел број a и неговиот спротивен број $-a$ е еднаков на 0.

Заеднички признак на приведените примери претставува едно својство на овие операции што кажува дека постои таков број (елемент од зададеното множество) што во определена операција со зададениот број (елемент од множество) го дава неутралниот елемент за таа операција во зададеното множество. Таквиот број (елементи од множеството) се вика **инверзен,** спротивен или реципрочен број (елемент) на зададениот број (елемент).

Така, инверзен број на бројот $\frac{m}{n}$ при множењето во множеството на рационалните броеви е $\frac{n}{m}$ (вообичаено е да се каже дека $\frac{n}{m}$ е реципрочна вредност на $\frac{m}{n}$), затоа што $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$. Исто така, инверзен број на бројот a при собирањето во множеството на целите броеви е бројот $-a$ (вообичаено е да се каже дека $-a$ е спротивен број на бројот a), затоа што $a+(-a) = 0$.

Дефиниција: Во множеството X нека е дефинирана операцијата којашто има неутрален елемент e. Во тоа множество нека постои еден единствен елемент x', така што $x \blacktriangle x' = e$. За елементот x' велиме дека е инверзен (спротивен, реципрочен) елемент на елементот x.

Така, на пример, инверзен елемент на бројот $\frac{2}{5}$ при множењето е бројот $\frac{5}{2}$, бидејќи $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$; инверзен елемент на бројот 4 при собирањето е бројот -4, бидејќи $4+(-4) = 0$; за операцијата $\blacktriangle$ во множеството $A = \{1,2,3\}$ зададена со Келиевата шема има неутрален елемент 3.

▲	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Од шемата гледаме дека: $1 \blacktriangle 2 = 3$; $2 \blacktriangle 1 = 3$ и $3 \blacktriangle 3 = 3$. Тоа значи дека за секој елемент 1,2,3 од множеството A постои само еден елемент 2,1,3 од истото множество што со операцијата ▲ соодветниот елемент го дава неутралниот елемент 3. Според тоа, може да се каже дека: инверзен елемент на елементот 1 е 2, $(1' = 2)$; инверзен елемент на елементот 2 е 1, $(2' = 1)$ и инверзен елемент на елементот 3 е 3, $(3' = 3)$.

Тука само ќе забележиме две теореми што важат за инверзните елементи; кои ќе ги прифатиме без доказ:

Теорема 1. Ако за кој било x од множеството X во однос на некоја операција важи дека x' е инверзен елемент од x, тогаш и x е инверзен елемент на x', т.е. $(x') = x$.

На пример:

$$\left(\frac{1}{3}'\right)' = (3)' = \frac{1}{3}$$

$$(-2')' = (-(-2))' = (2)' = -2.$$

Теорема 2. Ако о е операцијата во множеството X со неутрален елемент e, во кој за секој $x \in X$ постои $x' \in X$, така што $x \circ x = e$, тогаш за секоја двојка $x, y \in X$ ќе важи: $(x \circ y)' = x \circ y$.

На пример:

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1; \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)' = 3' \cdot \left(\frac{1}{3}\right)' = \\ = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$2-2 = 0; (2-2)' = 2' - (-2)' = -2+2 = 0.$$

Важењето на овие две теореми може да се провери и на приведениот пример.

Задача 1. Во множеството $A = \{1,2,3\}$ зададени се две операции о и ж со Келиевите шеми. Во кои од операциите секој елемент си има свој инверзен елемент.

о	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	2

ж	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

2. Во кој од приведените групоиди за секој елемент постои, а во кој не постои инверзен елемент:

$(N_o,+)$; $(N_o,\cdot)$; $(Z,+)$; $(Z,\cdot)$; $(Q,+)$; $(Q,\cdot)$? каде што N_o е множество на природните броеви проширено со нулата, Z – множество на целите броеви, а Q – множество на рационалните броеви и „+“ означува собирање, а „·“ множење во тие множества.