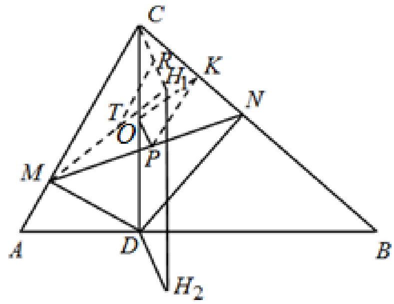
ЈБМО 2014

1. Определи ги сите различни прости броеви p, q и r такви што
$$3p^4-5q^4-4r^2=26.$$
Решение. Прво да забележиме дека ако простите броеви q и r се различни од 3, тогаш $q^2 \equiv r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, па левата страна на равенката е конгруентна со 0 по модул 3, што не е можно бидејќи 26 не е делив со 3. Значи, $q=3$ или $r=3$.
Прв случај. Нека $q=3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот
$$3p^4-4r^2=431. \tag{1}$$
Ако $p \neq 5$, од малата теорема на Ферма следува $p^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, што значи $3-4r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, односно $r^2+2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$. Последнта конгруенција не е можна, бидејќи остатоците при делење со 5 на квадратите на природните броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,4\}$. Затоа, $p=5$ и $r=19$.
Втор случај. Нека $r=3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот
$$3p^4-5q^4=62. \tag{2}$$
Ако $p \neq 5$, повторно $p^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$ и тогаш $5q^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$, што не е можно.
Конечно, единствено решение на дадената равенка е $p=5$, $q=3$, $r=19$.

2. Даден е произволен триаголник *ABC* со плоштина S. Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Со H_1 и H_2 да ги означиме ортоцентрите на триаголниците MNC и MND, соодветно. Изрази ја плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 преку S.
Решение. *Прв начин.* Нека *O*, *P*, *K*, *R* и *T* се средините на отсечките *CD*, *MN*, *CN*, CH_1 и MH_1, соодветно. Од $\triangle MNC$ имаме $\overline{PK}=\frac{1}{2}\overline{MC}$ и $PK \parallel MC$. По аналогија, од $\triangle MH_1C$ имаме дека $\overline{TR}=\frac{1}{2}\overline{MC}$ и $TR \parallel MC$. Како резултат на тоа, $\overline{PK}=\overline{TR}$ и $PK \parallel Tl$. Исто така $OK \parallel DN$ (од $\triangle CDN$) и бидејќи $DN \perp BC$ и $MH_1 \perp BC$, следува дека $TH_1 \parallel OK$. Бидејќи *O* е центар на опишаната кружница на $\triangle CMN$, важи $OP \perp MN$.

Затоа, од $CH_1 \perp MN$ следува $OP \| CH_1$. Според тоа, $\triangle TRH_1 \cong \triangle KPO$ (имаат две паралелни страни и $\overline{TR} = \overline{PK}$), па оттука $\overline{RH_1} = \overline{PO}$, т.е. $\overline{CH_1} = 2\overline{PO}$ и $CH_1 \| PO$.



Аналогно, $\overline{DH_2} = 2\overline{PO}$ и $DH_2 \| PO$. Понатаму, од $\overline{CH_1} = 2\overline{PO} = \overline{DH_2}$ и $CH_1 \| PO \| DH_2$, заклучувамне дека четириаголникот CH_1H_2D е паралелограм, па затоа $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$ и $H_1H_2 \| CD$. Оттука плошѓтината на четириаголникот AH_1BH_2 е еднаква на $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{H_1H_2}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = S$.

Втор начин. Бидејќи $MH_1 \| DN$ и $NH_1 \| DM$, $MDNH_1$ е паралелограм. Слично, $NH_2 \| CM$ и $MH_2 \| CN$ имплицираат дека $MCNH_2$ е паралелограм. Нека P е средна точка на отсечката $\overline{MN}$. Тогаш $\sigma_P(D) = H_1$ и $\sigma_P(C) = H_2$, па затоа $CD \| H_1H_2$ и $\overline{CD} = \overline{H_1H_2}$. Од $CD \perp AB$ можеме да заклучиме дека $P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = S$.

3. Нека a,b,c се позитивни реалнио броеви такви што $abc = 1$.Докажи дека

$$(a+\tfrac{1}{b})^2 + (b+\tfrac{1}{c})^2 + (c+\tfrac{1}{a})^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката (АС) и геометриската средина (ГС), односно неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2 + (b+\tfrac{1}{c})^2 + (c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (a+\tfrac{1}{b})(b+\tfrac{1}{c}) + (b+\tfrac{1}{c})(c+\tfrac{1}{a}) + (c+\tfrac{1}{a})(a+\tfrac{1}{b}) \\ &= (ab+1+\tfrac{a}{c}+a) + (bc+1+\tfrac{b}{a}+b) + (ca+1+\tfrac{c}{b}+c) \\ &= ab+bc+ca+\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{b}{a}+3+a+b+c.\end{aligned}$$

Повторно од неравенството меѓу АС и ГС добиваме

$$ab+\frac{b}{a}\ge 2b,\ bc+\frac{c}{b}\ge 2c \text{ и } ca+\frac{a}{c}\ge 2a.$$

Така,

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\ge (ab+\tfrac{b}{a})+(bc+\tfrac{c}{b})+(ca+\tfrac{a}{c})+3+a+b+c$$
$$\ge 3(a+b+c+1).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Од неравенството меѓу АС и ГС следува

$$\sqrt{\frac{(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2}{3}}\ge\frac{a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}}{3}\Leftrightarrow$$

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\ge\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}, \qquad (1)$$

и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$, па ако замениме во (1) наоѓаме

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\ge\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\ge\frac{(a+b+c+3)^2}{3}$$
$$=\frac{(a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9}{3}$$
$$\ge\frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{abc}+6(a+b+c)+9}{3}$$
$$=\frac{9(a+b+c)+9}{3}=3(a+b+c+1).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Трет начин. Користејќи го неравенството $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ добиваме

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}$$
$$\ge ab+ac+bc+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.$$

Јасно,

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}+\frac{abc}{ab}=a+b+c$$
$$ab+\frac{a}{b}+bc+\frac{b}{c}+ca+\frac{c}{a}\ge 2a+2b+2c$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3$$

Затоа

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\ge$$
$$\ge(ab+\tfrac{a}{b})+(bc+\tfrac{b}{c})+(ca+\tfrac{c}{a})+a+b+c+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}$$
$$\ge 2a+2b+2c+a+b+c+3=3(a+b+c+1).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$

Четврт начин. Нека $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Имаме

$$(\tfrac{x}{y}+\tfrac{z}{y})^2+(\tfrac{y}{z}+\tfrac{x}{z})^2+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{y}{x})^2\geq 3(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{x}+1)$$

$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2\geq 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$

$$x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2\geq$$
$$\geq 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2$$

Последното неравенство следува од очигледните неравенства:

1) $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\geq 3x^2y^2z^2$.

2) $x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3\geq 3x^3z^2y$

3) $x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3\geq 3y^3x^2z$

4) $z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3\geq 3z^3y^2x$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, т.е. $a=b=c=1$.

Петти начин. Имаме

$$\sum_{cyc}(a+\tfrac{1}{b})^2\geq 3\sum_{cyc}a+3 \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 0$$

$$2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b}\geq 6\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}}=6. \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $a>0$ важи

$$a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a\geq \tfrac{3}{a}-4 \quad\Leftrightarrow\quad a^4-3a^3+4a^2-3a+1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (a-1)^2(a^2-a+1)\geq 0$$

па затоа

$$\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 3\sum_{cyc}\tfrac{1}{a}-15\geq 9\sqrt[3]{\tfrac{1}{abc}}-15=-6 \qquad (2)$$

Сега од неравенствата (1) и (2) следува

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 6-6=0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

4. За природен број n, двајца играчи A и B ја играат следнава игра: Даден е куп од s камчиња, играчите играат наизменично, но A игра прв. При секое играње играчот има право да земе или едно камче, или прост број

на камчиња, или $nm, m \in \mathbb{N}$ камчиња. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Под претпоставка дека играчите *A* и *B* играат перфектно, за колку вредности на *s* играчот *A* не може да победи?

Решение. Со k ќе го означиме бараниот број и нека $\{s_1, s_2, ..., s_k\}$ се соодветните вредности на s. Секој s_i ќе го нарекуваме губитники број, а секој друг природен број е победнички број.

Јасно, секој број од видот $nm, m \in \mathbb{N}$ е победнички број

Да претпоставиме дека постојат два различни губитнички броја $s_i > s_j$, кои се конгурентни по модул n. Тогаш во својот прв потег играчот A може да острани $s_i - s_j$ камчиња (бидејќи $n | (s_i - s_j)$), оставајќи куп со s_j камчиња за *B*. Последното противречи на фактот дека броевите s_i и s_j се губитнички. Сега од принципот на Дирихле следува дека постојат најмногу $n-1$ губитнички броеви, т.е. $k \leq n-1$.

Да претпоставиме дека постои цел број $r \in \{1, 2, ..., n-1\}$, таков што $mn + r$ е победнички број за секој $m \in \mathbb{N}_0$. Со u да го означиме најголемиот губитнички број (ако $k > 0$) или 0 (ако $k = 0$), и нека $s = [2, 3, ..., u+n+1]$. Да забележиме дека сите броеви $s+2$, $s+3$, …, $s+u+n+1$ се сложени. Нека земеме $m' \in \mathbb{N}_0$ таков што

$$s + u + 2 \leq m'n + r \leq s + u + n + 1.$$

За да $m'n + r$ биде победнички број, мора да постои природен број p, кој е или еден, или прост број или број од видот $nm, m \in \mathbb{N}$, таков што $m'n + r - p$ е губитнички број или 0, и притоа помал или еднаков на u. Бидејќи

$$s + 2 \leq m'n + r - u \leq p \leq m'n + r \leq s + u + n + 1,$$

добиваме p мора да биде сложен, оттука p е делив со n, на пример $p = qn$. Но тогаш

$$m'n + r - p = (m' - q)n + r,$$

по претпоставка мора да биде победнички број. Меѓутоа, ова е спротивно на претпоставката дека сите броеви $mn + r$, $m \in \mathbb{N}_0$ се победнички. Од досега изнесеното следува дека сите ненулти класи по модул n содржат губитнички број.

Од претходно изнесеното следува дека постојат точно $n-1$ губитнички броеви.