Сава Гроздев, Софија

ДВЕ ЕЛЕМЕНТАРНИ НЕРАВЕНСТВА И НИВНА ПРИМЕНА

Нашите разгледувања ќе ги започнеме со едно интересно неравенство, кое е доста едноставно, но има многу различни примени. Ова неравенство е познато и како "*убаво неравенство*". Најпрвин ќе ја решиме следнава задача, а потоа ќе го презентираме и општиот случај.

Задача 1 ("убаво неравенство" за две променливи). Ако позитивни броеви x и y , и реални броеви a и b, да се докаже дека

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со

$$(a^2y+b^2x)(x+y)\geq xy(a+b)^2.$$

Ако се ослободиме од заградите и извршиме еквивалентни трансформации го добиваме неравенството $a^2y^2+b^2x^2\geq 2abxy$, кое е еквивалентно со очигледното неравенство $(ay-bx)^2\geq 0$. ■

Непосредно од задача 1 следува следното тврдење, чиј доказ нема да го презентираме, бидејќи за истиот се користи таканаречената математичка индукција.

Последица 1 ("убаво неравенство" за *n* променливи). Ако $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви и $a_1,a_2,...,a_n$ реални броеви, тогаш

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}.\ ■$$

Последица 2 ("убаво неравенство" за 3 променливи). Ако x, y и z се позитивни броеви и a, b и c се реални броеви тогаш

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Доказ. Неравенството следува ако во последица 1 земеме $n=3$. ■

Една примена на "убавото неравенство" е дадена во Задача 4 од Јуниорската балканска олимпијада во 2003 година.

Задача 2. Да се докаже неравенството:

$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq a+b+c$, каде a, b и c се позитивни броеви,

Решение. Со примена на "убавото неравенство" за 3 променливи се добива

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c.\ ■$$

Задача 3. Да се неравенството

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2},$$

каде a, b и c се позитивни броеви и $a+b+c=1$.

Решение. Со примена на "убавото неравенство" за 3 променливи имаме

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}\,.\ \blacksquare$$

Задача 4 (неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина). Докажи дека, ако $a_1, a_2, ..., a_n$ се ненегативни броеви, тогаш

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}\,.$$

Решение. Со примена на "убавото неравенство" за n променливи имаме:

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}=\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+...+\frac{a_n^2}{n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n\cdot n}\,,$$

од каде следува бараното неравенство. ■

Задача 5. Нека a, b и c се позитивни броеви такви да $a+b+c\leq 3$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Решение. Од "убавото неравенство" следува, дека $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3^2}{3+a+b+c}$. Од друга страна, од условот на задачата добиваме $a+b+c+3\leq 6$. Значи $\frac{1}{3+a+b+c}\geq\frac{1}{6}$ од каде $\frac{3^2}{3+a+b+c}\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. ■

Задача 6. Ако позитивните броеви x, y и z го задоволуваат условот $xyz=1$, докажи го следното неравенство

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Решение. Со примена на "убавото неравенство" за 3 променливи имаме

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\,.$$

Ако пак го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и го користиме условот $xyz=1$, добиваме $\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$. ■

Забелешка 1. Ако во неравенството од задача 6 ставиме $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, тогаш $xyz=1$ се трансформира во условот $abc=1$. Така го добиваме неравенството $\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq\frac{3}{2}$, кое ако поделиме со $abc=1$ добиваме дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Задача 7. Да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}\,,$$ x и y се позитивни броеви.

Решение. Од "убавото неравенство" добиваме дека $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geq\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$. Понатаму од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина наоѓаме

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\leq 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2}}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ \text{ и }\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 2\sqrt{\frac{x+y}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+y}\,,$$

па затоа $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\le 2^{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{x+y}=2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}$, т.е. . $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\ge\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}$. Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\ge\frac{2^2}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\ge\frac{2^2}{2^{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{x+y}}=\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}\ .\ \blacksquare$$

Во некои задачи за да се примени “убавото неравенство” потребно е преходно да се направи соодветна трансформација. Ќе разгледаме две такви задачи.

Задача 8. Докажи дека

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$, каде a, b, c и d се позитивни броеви.

Решение. Ќе направиме трансформација со цел да добиеме квадрати во броителите, а потоа ќе го примениме “убавото неравенство” за 4 променливи:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{2ac+2bd+ab+bc+cd+da}$$

От друга страна $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ па значи

$$(a+b+c+d)^2-2(2ac+2bd+ab+bc+cd+da)=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$$
$$=(a-c)^2+(b-d)^2\ge 0$$

од каде следува бараното неравенство. ■

Задача 9. Да се докаже, дека ако позитивните броеви a, b и c го задоволуваат условот $a+b+c=1$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}\ .$$

Решение. Прво да забележиме дека од условот следува

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ .$$

Сега ќе го примениме “убавото неравенство”, но не за 3, туку за 2 променливи. Имаме, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\ge\frac{4}{a+2b+c}=\frac{4}{1+b}$. Аналогно $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{4}{1+c}$ и $\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\ge\frac{4}{1+a}$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме дека

$$2(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge\frac{4}{1+a}+\frac{4}{1+b}+\frac{4}{1+c}\ ,$$

од каде директно следува бараното неравенство. ■

Во следната задача ќе докажеме уште едно интересно елементарно неравенство.

Задача 10. Да се докаже неравенството:

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, каде x, y и z се реални броеви.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)\ge 0\ ,$$

т.е. со неравенството

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$$

кое е очигледно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. ■

Забелешка 2. Неравенството кое го докажавме во задача 10 понекогаш се користи и во следнава еквивалентна форма $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$, т.е. $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2$. Последното неравенство всушност е неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за 3 променливи. Јасно, еквивалентна форма на неравенството от задача 10 е и следната:

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)\,. \qquad (*)$$

Задача 11. Да се докаже неравенството:

$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$, каде Ако a, b и c са реални ненулти броеви.

Решение. Од задача 10 следува, дека $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$. ■

Задача 12. Ако $a,b,c\ge 0$, да се докаже, дека

$$ab+bc+ca\ge a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\,.$$

Решение. Од задача 11 следува, дека

$$ab+bc+ca=(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{bc})^2+(\sqrt{ca})^2\ge\sqrt{ab}\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\sqrt{ca}+\sqrt{ca}\sqrt{ab}$$
$$=a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\,.\ ■$$

Задача 13. Ако $a,b,c\ge 0$, да се докаже, дека $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$.

Решение. Ако во неравенството (*) ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ добиваме

$$(ab+bc+ca)^2\ge 3(abbc+bcca+caab)=3abc(a+b+c)\,.\ ■$$

Неравенството од задача 13 може да се запише во следната еквивалентна форма: $ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}$, кое е познато како неравенство на **Хадвигер-Финслер**.

Задача 14. За позитивните броеви a, b и c да се докаже, дека

$$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)\,.$$

Решение. Ако двапати последователно го примениме неравенството од задача 10 добиваме

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab=abc(a+b+c)\,.\ ■$$

Задача 15. Ако x, y и z се позитивни броеви такви што $xyz=1$, докажи дека

$$x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\,.$$

Решение. Од задача 10 земајќи за $a=\frac{1}{\sqrt{x}}, b=\frac{1}{\sqrt{y}}, c=\frac{1}{\sqrt{z}}$ следува

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

и од условот $xyz=1$ добиваме

$$\frac{xyz}{x}+\frac{xyz}{y}+\frac{xyz}{z}\ge\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{zx}}\,,$$

од каде $xy+yz+zx\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$. Сега повторно од задача 10 имаме

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \ge \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ . \ \blacksquare$$

Задача 16. Ако a, b и c се реални броеви такви да $abc>0$, докажи дека
$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ .$$

Решение. Со повеќекратна примена на задача 10 добиваме:
$$a^8+b^8+c^8 \ge a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \ge a^2b^4c^2+b^2c^4a^2+c^2a^4b^2$$
$$=(a^2bc)^2+(ab^2c)^2+(abc^2)^2 \ge a^3b^3c^2+a^3b^2c^3+a^2b^3c^3.$$
Сега бараното неравенство се добива ако последното неравенство го поделиме со $a^3b^3c^3$. ■

Покажавме, дека во некои ситуации за да го примениме неравенството од задача 10 или еквивалентните формулации треба да направиме определени траснформации. Ќе разгледаме уште еден таков пример во кој примената за левата страна е е директна, како што тоа беше случај во претходните задачи.

Задача 17. Ако a, b, c и d се позитивни броеви, докажи дека
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \ge a+b+c+d\ .$$

Решение. Од забелешка 2 добиваме
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \ge \frac{a+b+c}{3},\ \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \ge \frac{b+c+d}{3},\ \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} \ge \frac{c+d+a}{3},\ \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \ge \frac{d+a+b}{3}\ . \qquad (**)$$
Сега бараното неравенство следува ако ги собереме неравенствата (**). ■

На крајот од нашите разгледувања ќе дадеме два примери за комбинирана примена на "убавото неравенство" и на неравенството од задача 10.

Задача 18. За позитивни броеви a, b и c докажи дека $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Решение. Имаме
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3(ab+b+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}\ . \ \blacksquare$$

Задача 19. Ако a, b и c са ненегативни броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш докажи дека
$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2\ .$$

Решение. Имаме
$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}=\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}+\frac{b^3}{b^2c^2+b^2}+\frac{c^3}{c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a})^2}{a^2b^2+a^2}+\frac{(b\sqrt{b})^2}{b^2c^2+b^2}+\frac{(c\sqrt{c})^2}{c^2a^2+c^2}\ .$$
Го применуваме "убавото неравенство" и добиваме
$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2a^2+c^2}=\frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1}\ .$$
Сега од неравенството $1=(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ следува, дека $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1 \le \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, односно $\frac{1}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1} \ge \frac{3}{4}$. Конечно,
$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+1} \ge \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2\ . \ \blacksquare$$