Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија во бројот XXXI 2

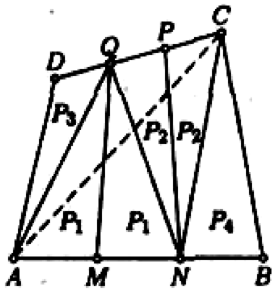
Војислав Андрић (Ваљево)

О ЈЕДНОМ ЗАНИМЉИВОМ МАТЕМАТИЧКОМ ЗАДАТКУ

У оквиру проблема везаних за површине равних фигура значајну пажњу заслужује и следећи задатак, који је био један од задатака на Савезном такмичењу младих математичара Југославије одржаног у Петровцу на мору 1995. године:

Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ и на страницама AB и CD тачке M, N, P и Q, тако да је $AM = MN = NB$ и $CP = PQ = QD$. Ако је површина четвороугла $ABCD$ $1995\,cm^2$, израчунати површину четвороугла $MNPQ$.

Решење: Нека је $P_{\triangle AMQ} = P_1$, $P_{\triangle CPN} = P_2$, $P_{\triangle ADQ} = P_3$ и $P_{\triangle BCN} = P_4$ (сл. 1). Тада је и $P_{\triangle MNQ} = P_{\triangle AMQ} = P_1$, јер је $AM = MN$, а висина троугла је заједничка. Из истих разлога је и $P_{\triangle PQN} = P_{\triangle CPN} = P_2$.



Сл. 1

Како је $BN = \frac{1}{3}AB$, то је $P_{\Delta BCN} = P_4 = \frac{1}{3}P_{\Delta ABC}$. Слично је и $P_{\Delta ADQ} = P_3 = \frac{1}{3}P_{\Delta ACD}$. Дакле,

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{3}(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD}) = \frac{1}{3}P_{ABCD}.$$

С друге стране је $2P_1 + 2P_2 + P_3 + P_4 = P_{ABCD}$, или

$$2(P_1 + P_2) + \frac{1}{3}P_{ABCD} = P_{ABCD},$$

тј. $2(P_1 + P_2) = \frac{2}{3}P_{ABCD}$. Дакле,

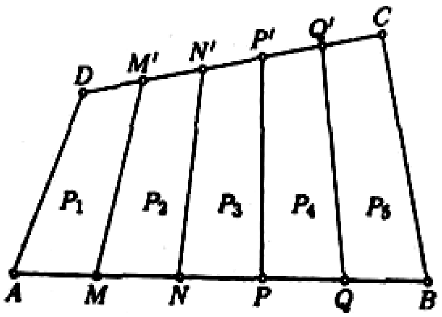
$$P_{MNPQ} = P_1 + P_2 = \frac{1}{3}P_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 1995 = 665\,cm^2.$$

Из претходног разматрања је очигледно да је површина четвороугла $MNPQ$ два пута мања од збира површина суседних четвороуглова $AMQD$ и $BNPC$, тј. $2P_{MNPQ} = P_{AMQD} + P_{BCPN}$. Напомињем да је у општем случају $P_{AMQD} \neq P_{BCPN}$.

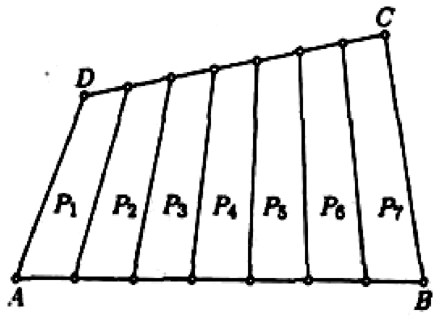
Интересантно питање је шта се дешава са површином четвороугла $ABCD$, ако странице AB и CD поделимо на 5 једнаких делова. Користећи резултате претходног проблема очигледно је:

$$2P_2 = P_1 + P_3, \quad 2P_3 = P_2 + P_4, \quad 2P_4 = P_3 + P_5.$$

Ако наведене релације саберемо, онда добијамо: $2(P_2 + P_3 + P_4) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_3$, или $2(2P_3 + P_3) = P + P_3$. Дакле, $6P_3 = P + P_3$. Одавде је $5P_3 = P$, или $P_3 = \frac{P}{5} = \frac{1995}{5} = 339\,cm^2$.



Сл. 2



Сл. 3

Ако би започето истраживање наставили, онда се као нужно намеће питање, шта се дешава ако странице четвороугла AB и CD поделимо на 7 једнаких делова.

Примењујући резултате првог задатка, добија се:

$$2P_2 = P_1 + P_3, \quad 2P_3 = P_2 + P_4, \quad 2P_4 = P_3 + P_5,$$
$$2P_5 = P_4 + P_6, \quad 2P_6 = P_5 + P_7.$$

Сабирањем добијених релација, следи да је $2(P_2+P_3+P_4+P_5+P_6) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + (P_3 + P_4 + P_5)$, или $2(5P_4) = P + (2P_4 + P_4)$. Дакле, $10P_4 = P + 3P_4$, или $P = 7P_4$. Одавде је $P_4 = \frac{P}{7} = \frac{1995}{7} = 285\,cm^2$.

Нашим младим читаоцима остављамо да примењујући метод сличан претходном одговоре на следећа питања:

1. Ако странице AB и CD поделимо на 9 једнаких делова, колика је површина P_5 средњег четвороугла?
2. Да ли у случају поделе страница AB и CD на 19 једнаких делова средњи део има површину $P_{10} = \frac{1995}{19} = 105\,cm^2$?
3. Уколико би странице AB и CD поделили на 1995 једнаких делова, колика је површина средњег дела P_{998}?