X РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Нека $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B\cap C=\{1, 4\}$, $B\setminus C=\{2, 5, 6\}$ и $C\setminus A\neq\varnothing$. Одреди го множеството C.

2. Нацртај два напоредни агли и конструирај ги нивните симетрали. Колку степени изнесува аголот меѓу симетралите? Објасни.

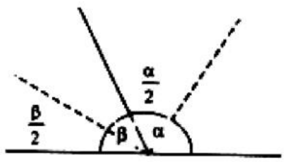
3. Производот на два броја е 1325. Ако еден од множителите се зголеми за 5, а другиот не се менува, тогаш се добива како нов производ 1590. Пресметај ги множителите на тој производ.

4. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) кракот A е продолжен преку темето A до точката D, така што периметарот на ΔABD е 16 cm. Пресметај ја основата на ΔABC, ако периметарот на ΔBCD е 29 cm.

V одделение

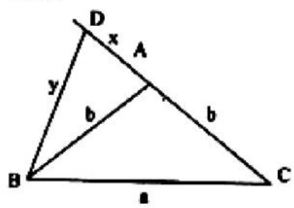
1. Од $A\cap B\cap C=\{1, 4\}$ следува дека $1, 4\in A$, $1, 4\in B$ и $1, 4\in C$. Од $B\setminus C=\{2, 5, 6\}$ следува дека $2, 5, 6\in B$ и $2, 5, 6\notin C$. Ако е $A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогаш $C=\{1, 4\}$ или $C=\{1, 3, 4\}$, но $C\setminus A\neq\varnothing$, следува дека $C=\{1, 3, 4\}$.

2. Бидејќи аглите се напоредни, следи нивниот збир е 180°, т.е. $\alpha+\beta=180^\circ$.
$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$, аголот помеѓу симетралите е прав.



3. Нека се тие броеви a и b, тогаш:
$a\cdot b=1325$; $(a+5)\cdot b=1590$; $ab+5b=1590$; $1325+5b=1590$;
$5b=1590-1325=265$, оттука следува $b=53$, а $a=25$.

4. Ако е x продолжението на кракот, а $y=\overline{BD}$, тогаш:
$L_{BCD}=a+b+x+y=29$, а
$L_{BAD}=b+x+y=16$ од каде добиваме :
$a=29-16=13$ cm.



VI одделение

1. Во три канти има вкупно 87 kg мед. Ако од првата канта е продадено $\frac{1}{4}$, од втората $\frac{1}{3}$ и од третата $\frac{1}{2}$ од медот, тогаш во секоја канта ќе остане исто количество мед. По колку килограми мед имало во секоја канта на почетокот?

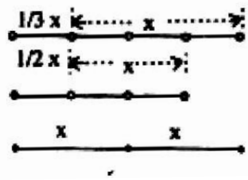
2. Нацртај два напоредни агла и конструирај ги нивните симетрали. Докажи дека симетралите на тие агли се заемно нормални.

3. Некој број е делив со 37 и се наоѓа помеѓу 400 и 500. При делење на тој број со 4, 5, 6 се добива остаток 1. Кој е тој број?

4. Во тапоаголен триаголник ABC, со тап агол во темето A и агол при темето B еднаков на 30°, повлечена е нормала на страната AB во точката A, која страната BC ја сече во точката D. Пресметај ја должината на отсечката BD, ако $\overline{AD} = 3$ cm.

VI одделение

1. По продавањето во првата канта останале $\frac{3}{4}$, во втората останале $\frac{2}{3}$, а во третата $\frac{1}{2}$ од медот. Останатите количини се



меѓу себе еднакви и да ги означиме со x. Продадениот мед од првата канта е $\frac{1}{3}$ од x, од втората $\frac{1}{2}$ од x, а од третата x, па имаме:

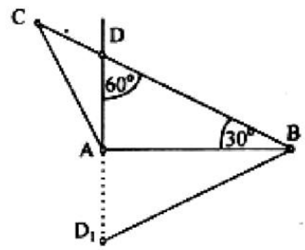
$$x+\frac{1}{3}x+x+\frac{1}{2}x+2x=87; \qquad x=18\text{ kg}.$$

Во првата канта имало 24 kg, во втората 27 и во третата канта 36 kg мед.

2. Види V п.н. VI.3.

3. Единствените броеви што се деливи со 37 и се наоѓаат помеѓу 400 и 500 се: 407, 444, 481. Само бројот 481 го задоволува барањето, значи тој е бараниот број.

4. Триаголникот ABD е правоаголен со агол при темето D еднаков на 60°. Ако ја пресликаме точката D симетрично во однос на AB во D_1 тогаш ΔD_1DB е рамностран и AB е висина на триаголникот. Според тоа AD е половина од страната на триаголникот D_1DB, т.е. $\overline{BD}=2\overline{AD}=2\cdot 3=6$ cm.



VII одделение

1. Во рамнокрак трапез, во кој висината и средната линија се еднакви, впишана е кружница. Определи ја должината на таа кружница ако периметарот на трапезот е 28 cm.

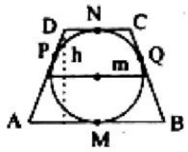
2. Во ромб ABCD, $\angle A=60^\circ$. Со центар во пресекот на дијагоналите конструирана е кружница k која минува низ темињата B и D. Докажи дека кружницата k ги преполовува страните на ромбот.

3. Сашко ја испуштил топката од некоја висина слободно да паѓа. После паѓањето, таа отскокнала $\frac{1}{3}$ од висината од која паднала. После второто паѓање отскокнала $\frac{1}{3}$ од претходната висина што е за 1 метар помалку од првото отскокнување. Од која висина ја испуштил Сашко топката?

4. Во еден трицифрен број првите две цифри се еднакви, третата е 5. Ако тој број се подели со некој едноцифрен број се добива остаток 8. Кој е тој број?

VII одделение

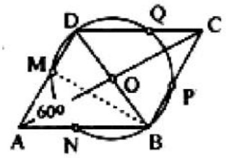
1. Бидејќи трапезот е тангентен, имаме : $\overline{AM}=\overline{AP}$, $\overline{BM}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CN}$ и $\overline{DN}=\overline{DP}$. Од тука следува дека $2\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{DC}$, а $L=\overline{AB}+\overline{DC}+2\overline{AD}$, т.е. $L=2\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)$.



Средната линија на трапезот е: $m=\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}$, т.е.

$\overline{AB}+\overline{DC}=2m$; L=4m, а $m=\dfrac{1}{4}L=7$ cm. Висината на трапезот е дијаметар на кружницата. Бидејќи h=m, следува дека r=3,5 cm; $L=2\pi r=21{,}98$ cm.

2. Аголот во темето A е 60°, значи ΔABD е рамностран. Аголот BMD е прав (според Талесовата теорема), MB е висината на рамностраниот триаголник, т.е. $\overline{AM}=\overline{MD}$.
Слично се докажува и за останатите точки.



3. Нека висината е x метри. По првото паѓање топката отскокнала за $\dfrac{1}{3}x$, а после второто за $\dfrac{1}{3}$ од $\dfrac{1}{3}x$, т.е $\dfrac{1}{9}x$. $\Rightarrow \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}x=1$;
оттука x=4,5 метри.

4. Бидејќи остатокот е 8, едноцифрениот делител ќе биде 9. Според тоа:

$$\overline{xx5}=9k+8,\quad x\in\{1,2,3,\dots,9\},\ k\in N;$$
$$100x+10x+5=9k+8;$$
$$110x=9k+3;$$
$$9k=110x-3$$

Со заменување на x со 1, 2, 3, ... 9, се добива дека равенството е задоволено само за x=6. Според тоа бараниот број е 665.

VIII одделение

1. Возот влегол во тунел за 15 секунди. До излегувањето од тунелот на последниот вагон од возот поминале уште 30 секунди. Колку е долг возот и со колка-ва брзина се движел ако тунелот бил долг 300 метри?

2. Кружницата k_1 ја допира кружницата k_2 во точката A одвнатре. Дијаметарот на k_1 е еднаков на радиусот на k_2. Низ точката A повлечена е права p којашто k_1 ја сече во B, а k_2 во точката C. Докажи дека $\overline{AB} = \overline{BC}$.

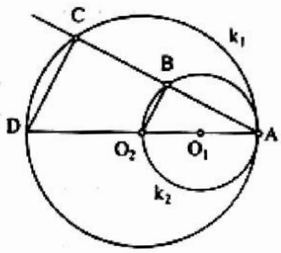
3. Во правоаголен триаголник ABC хипотенузата $\overline{AB} = 4$ cm и $\angle B=22^\circ 30'$ Да се пресмета плоштината на триаголникот ABC.

4. Дадена е функцијата y=mx-(3m+4) каде што m е решение на равенката $\frac{m+1}{5}+\frac{2m-3}{15}+1=m-\frac{m-2}{6}$. Пресметај ја плоштината на триаголникот образуван од координатните оски и графикот на функцијата y.

VIII одделение

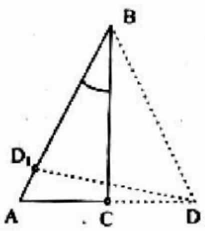
1. Види VII р.н. VIII/2

2. Со поврзување на O_2 со B и D со C, каде што AD е дијаметар на k_2, се добиваат два правоаголни триаголника: AO_2B и ADC, кои се слични. ($\angle A$ е заеднички, $\angle ABO_2=\angle ACD=90^\circ$).



Од сличноста на триаголниците имаме: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AO_2}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Бидејќи $\overline{AD}=2\overline{AO_2}$, следува дека $\overline{AC}=2\overline{AB}$, т.е. $\overline{AB}=\overline{BC}$.

3. Нека ΔBCD е симетричен на ΔABC во однос на BC и нека $DD_1 \perp AC$. Триаголникот BD_1D е рамнокрак правоаголен ($\angle B=\angle D=45^\circ$). Бидејќи $\overline{BD}=\overline{AB}=4$ cm, следува дека



$\overline{BD_1}=\overline{DD_1}=\frac{\overline{BD}\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}P_{\Delta ADB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DD_1}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ cm^2.

4. Прво ќе ја решиме равенката, со тоа ќе го определиме m. $\frac{m+1}{5}+\frac{2m-3}{15}+1=m-\frac{m-2}{6} \Leftrightarrow$ 6m+6+4m-6+30=30m-5m+10 $\Leftrightarrow$ 15m=20, т.е. решението на равенката $m=\frac{4}{3}$, а функцијата е: $y=\frac{4}{3}x-8$. Пресечните точки со координатните оски се: A(6, 0) и B(0, -8) и плоштината на триаголникот е: $P=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=24$ cd^2.