## XV олимпијада

1. Дадена е права $l$ и точка $O \in l$. Нека $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_n}$ се единечни вектори во иста рамнина на која и припаѓа правата $l$ и такви што точките $P_1, P_2, ..., P_n$ се наоѓаат на иста страна од правата $l$. Докажи дека, ако $n$ е непарен број, тогаш

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1.$$

**Решение.** Тврдењето на задачата ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно.
Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој непарен број точки $n$. Нека се дадени $n+2$ точки. Точките можеме да ги пренумерираме така што

$$\measuredangle(l, \overrightarrow{OP_1}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_2}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_3}) < ... < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_{n+2}}) < \pi.$$

Во рамнината во која се наоѓаат точките поставуваме координатен систем на следниот начин: $y-$оската е симетрала на аголот $\measuredangle P_{n+2}OP_1$, а $x-$оската минува низ точката $O$. Ако $(x_i, y_i)$ се координати на точките $P_i$, во избраниот координатен систем, тогаш $y_i \geq 0$ и $x_1 = -x_{n+2}$, $y_1 = y_{n+2}$, па според тоа

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}|^2 &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n+2})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\ &= (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\ &\geq (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_2 + y_3 + ... + y_{n+1})^2 \\ &= |\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}|^2.\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка имаме

$$|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}| \geq 1,$$

па затоа

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}| \geq 1.$$

2. Дали постои конечно множество од точки $M$ во просторот кои што не лежат во иста рамнина, такви што за секои две точки $A$ и $B$ од $M$ постојат други две точки $C$ и $D$ од $M$ такви што правите $AB$ и $CD$ се паралелни и различни?

**Решение.** Во рамнина такво множество точки се темињата на правилниот шестаголник.
Последното множество точки ќе го искористиме за конструкција на бараното множество точки во просторот. Ги земаме темињата на два правилни шестаголници кои имаат ист центар на симетрија и не лежат во една рамнина. Ова множество точки ги има бараните својства. Ако точките $A$ и $B$ се темиња на ист шестаголник, тогаш за $C$ и $D$ се земаат точки кои се централно симе-

трични во однос на центарот на симетрија на шестаголникот. Нека сега точките $A$ и $B$ припаѓаат на различни шестаголници. Повторно можеме да земеме централно симетрични слики на точките $A$ и $B$ во однос на заедничкиот центар на симетрија, кои исто така припаѓаат на даденото множество точки.

3. Најди ја најмалата вредност на изразот $a^2+b^2$, $a,b\in\mathbb{R}$ за кои равенката
$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$
има барем едно реално решение.

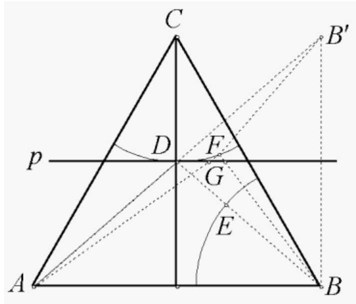
**Решение.** Да претпоставиме дека равенката има решение $x>0$. За ова решение важи
$$x^4-|a|x^3-|b|x^2-|a|x+1\le x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0,$$
или
$$x^4+1\le|a|x^3+|b|x^2+|a|x.$$
Лесно се докажуваат неравенствата
$$x^4+1\ge 2x^2 \text{ и } x^4+1\ge x^3+x.$$
Од претходните неравенства имаме
$$x^4+1\le|a|(x^4+1)+|b|\tfrac{x^4+1}{2}=(x^4+1)(|a|+\tfrac{|b|}{2}).$$
Според тоа, $|a|+\frac{|b|}{2}\ge 1$ т.е. $|b|\ge 2-2|a|$.

Ако $|a|\ge 1$, тогаш $a^2+b^2\ge 1$. Ако $|a|<1$, тогаш
$$a^2+b^2\ge|a|^2+(2-2|a|)^2=5(|a|-\tfrac{4}{5})^2+\tfrac{4}{5}\ge\tfrac{4}{5}.$$
Ако равенката има негативно решение $x$, тогаш $-x$ е позитивно решение на равенката
$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0.$$
Сега на овој случај го применуваме претходниот заклучок. Не може да биде $x=0$.

Значи, во секој случај $a^2+b^2\ge\frac{4}{5}$. Знак за равенство важи за $a=-\frac{4}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$.

4. Војник треба да провери дали во област која има облик на рамностран триаголник (вклучувајќи ја и неговата граница) има мини. Неговиот детектор има радиус на дејствување еднаков на половина од должината на висината на триаголникот. Војникот тргнува од едно теме на триаголникот. Како треба да се движи војникот за да ја исполни задачата, а притоа да помине пат со најмала можна должина.

**Решение.** Нека војникот поаѓа од темето $A$. За да ги испита темињата $B$ и $C$, мора да дојде до кружните лаци со радиус $\frac{h}{2}$ ($h$ е висина на триагол-




никот) и центри во $B$ и $C$. Нека на почеток бил на лакот со центар во $C$, а потоа на лакот со центар во $B$. Ако на овој пат се додаде патот до темето $B$, задачата се сведува на барање на најкраток пат од $A$ до $B$, при услов да дојде на лакот со центар во $C$. Ќе докажеме дека најкраток таков пат е патот $ADB$, каде што $D$ е средината на висината повлечена од темето $C$. Нека $E$ е пресек на отсечката $BD$ и лакот со центар во $B$, а $F$ е било која точка на лакот со центар во $C$. Низ $D$ повлекуваме права $p \| AB$ и точката $B$ ја пресликуваме симетрично во однос на таа права. Добиената точка ја означуваме со $B'$, а со $G$ го означуваме пресекот на отсечката $FB$ и правата $p$. Тогаш

$$\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GB}\geq \overline{AB'}=\overline{AD}+\overline{DB}$$

(точките $A, D, B'$ се на иста права). Значи, $ADB$ е најкраткиот пат од $A$ до $B$, па решение на задачата е патот $ADE$. (Сега не е тешко да се покаже дека може да се испита целата област).

5. Нека $G$ е непразно множество реални функции од облик $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, кои ги задоволуваат условите:

$1^\circ$ ако $f,g\in G$, тогаш $g\circ f\in G$, каде $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$2^\circ$ ако $f=ax+b$, тогаш инверзната функција $f^{-1}\in G$, каде $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$;

$3^\circ$ за секоја $f\in G$ постои $x_f$, таков што $f(x_f)=x_f$.

Докажи дека постои $k\in\mathbb{R}$ таков што $f(k)=k$ за секоја $f\in G$.

**Решение.** Ако функцијата $f(x)=x+b$ припаѓа на множеството $G$, тогаш $b=0$ (според $2^\circ$), т.е. тогаш $f(x)=x$. Затоа можеме да претпоставиме дека постојат барем две функции $f_1(x)=a_1x+b_1$ и $f_2(x)=a_2x+b_2$, такви што $a_1\neq 1$ и $a_2\neq 1$. Тогаш, $x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1}$ и $x_{f_2}=\frac{b_2}{1-a_2}$. Од $1^\circ$ и $2^\circ$ имаме

$$g=f_1\circ f_2\in G \quad \text{и} \quad h=f_2\circ f_1\in G \quad \text{и} \quad g\circ h^{-1}\in G.$$

Според тоа,

$$g(x)=a_1(a_2x+b_2)+b_1,\; h(x)=a_2(a_1x+b_1)+b_2,$$

$$h^{-1}(x)=\frac{x-a_2b_1-b_2}{a_1a_2},\; (a_1a_2\neq 0),\; g\circ h^{-1}(x)=x+[(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)].$$

Бидејќи $g \circ h^{-1} \in G$ и бидејќи коефициентот пред $x$ во $g \circ h^{-1}$ е еднаков на 1, мора да е исполнето $(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2) = 0$. Значи, $\frac{b_1}{1-a_1} = \frac{b_2}{1-a_2}$ т.е. $x_{f_2} = x_{f_1}$, што и требаше да се докаже.

6. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се дадени позитивни реални броеви и $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Определи $n$ реални броеви $b_1, b_2, ..., b_n$ такви што

а) $a_k < b_k$, за $k = 1, 2, 3, ..., n$,

б) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$, за $k = 1, 2, 3, ..., n-1$, и

в) $b_1 + b_2 + ... + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

**Решение.** Ќе докажеме дека броевите

$$b_k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + a_3q^{k-3} + ... + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + ... + a_nq^{n-k}$$

ги задоволуваат условите а), б) и в).

Јасно, условот а) е исполнет. Ако $1 \le k \le n-1$, тогаш

$$qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + ... + a_nq^{n-k-1}(q^2 - 1) < 0,$$

и аналогно $qb_{k+1} - b_k < 0$, па според тоа и условот б) е исполнет. Конечно,

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + ... + b_n &= a_1 + a_2q + ... + a_nq^{n-1} + \\
&\quad a_1q + a_2 + a_3q + ... + a_nq^{n-2} + \\
&\quad ........................................... \\
&\quad + a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} + ... + a_n \\
&< a_1(1 + q + ... + q^{n-1}) + a_2(1 + 2q + q^2 + ... + q^{n-2}) + \\
&\quad + a_3(1 + 2q + ... + q^{n-3}) + ... + a_n(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) \\
&< (a_1 + ... + a_n)(1 + 2q + 2q^2 + ... + 2q^{n-1}) \\
&= (a_1 + ... + a_n)(1 + 2q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}) \\
&< (a_1 + ... + a_n)\frac{1+q}{1-q}.
\end{aligned}$$