Osječki matematički list **5**(2005), 9–19

Jensenova nejednakost

Ilija Ilišević*

Sažetak. *U ovom radu dokazana je Jensenova nejednakost. Na osnovi velikog broja različitih primjera ilustrirane su njezine primjene. Također dano je mnoštvo zadataka za vježbu.*

Ključne riječi: *Jensenova nejednakost, konveksne funkcije*

Jensen's inequality

Abstract. *In this paper Jensen's inequality si proved. Its application is illustrated by means of several elementary tasks. Furthermore, a large number of tasks are given for exercise.*

Key words: *Jensen's inequality, convex functions*

Jensenova nejednakost je svojevrsna generalizacija nekih, manje ili više poznatih, nejednakosti. Dobila je ime po danskom matematičaru Johanu Ludwigu Jensenu (1859.–1925.) koji ju je dokazao. Iz Jensenove nejednakosti proizlaze mnoge poznate nejednakosti kao što su nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, Čebiševljeva nejednakost, Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijeva nejednakost itd.

Dokazat ćemo Jensenovu nejednakost, pokazati njenu primjenu na nekoliko zadataka, te dati nekoliko zadataka za vježbu.

Pri rješavanju zadataka potrebno je poznavanje nejednakosti o sredinama (vidjeti primjerice [3]).

Definicija 1. *Realna funkcija f je konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ako je*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (x_1,x_2 \in \langle a,b\rangle). \tag{1}$$

Definicija 2. *Realna funkcija f je konkavna na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ ako je*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (x_1,x_2 \in \langle a,b\rangle). \tag{2}$$

Teorem 1 [Jensenova nejednakost]. *(i) Ako je realna funkcija f konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \langle a,b\rangle$, onda vrijedi nejednakost*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \tag{3}$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

(ii) Ako je realna funkcija f konkavna funkcija na intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a,b\rangle$, onda vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \tag{4}$$

Dokaz.

(i) Metodom matematičke indukcije najprije dokažimo tvrdnju za $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ nejednakost vrijedi prema (1). Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za $n = 2^k$, tj. da za sve $t_1, t_2, \ldots, t_{2^k} \in \langle a,b\rangle$ imamo

$$f\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_{2^k})}{2^k} \tag{5}$$

i dokažimo da vrijedi i za $n = 2^{k+1}$. Stavimo li $l = 2^k$, tada je $n = 2l$. Za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a,b\rangle$,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{2l} x_i\right) = \\ = \quad & f\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_l}{l} + \frac{x_{l+1}+\cdots+x_{2l}}{l}}{2}\right) \overset{(1)}{\leq} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_i\right) + f\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_{l+i}\right)\right) \overset{(5)}{\leq} \\ \leq \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} f(x_i) + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} f(x_{l+i})\right) = \\ = \quad & \frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{2l} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \end{aligned}$$

Ako (3) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi i za $n-1$. Naime, tada je

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \leq \\ \leq \quad & \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \end{aligned}$$

odakle se sređivanjem dobije

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}.$$

Tako smo tzv. povratnom ili regresivnom indukcijom dokazali Jensenovu nejednakost za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Iz definicije 1 i definicije 2 izravno slijedi da je f konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $-f$ konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Stoga je dovoljno primijeniti (3) na funkciju $-f$.

Navest ćemo, bez dokaza, neke dovoljne uvjete za konveksnost i konkavnost. Dokaz se može vidjeti u [2].

Teorem 2. *Neka je realna funkcija f dva puta derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$.*
(i) Funkcija f je konveksna na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.
(ii) Funkcija f je konkavna na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Korolar 1. *Neka je realna funkcija f dva puta derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Tada je f*
(i) konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako se za bilo koji $x_0 \in \langle a, b\rangle$ sve točke grafa funkcije f nalaze iznad tangente grafa povučene u točki $\big(x_0, f(x_0)\big)$, isključujući točku $\big(x_0, f(x_0)\big)$;
(ii) konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako se za bilo koji $x_0 \in \langle a, b\rangle$ sve točke grafa funkcije f nalaze ispod tangente grafa povučene u točki $\big(x_0, f(x_0)\big)$, isključujući točku $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Ovaj korolar nam je potreban poglavito zbog čitatelja (učenika) koji još ne poznaju diferencijalni račun, ali poznaju grafove eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijskih funkcija.

Zadatak 1. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$

Rješenje. Prema nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine je

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{6}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}.$$

Kako su α, β, γ kutovi trokuta, odatle slijedi

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

pa je

$$\frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi za $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$, odakle je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ odnosno $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 2. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi*

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine,

$$\begin{aligned}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \\ = 8\Big(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Big)^2 &\leq 8\cdot\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^6.\end{aligned}$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 3. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi*

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Rješenje. Rabimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve $\cos\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\gamma}{2}$, a zatim Jensenovu nejednakost za funkciju $f(x) = \cos x$ koja je konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Imamo

$$\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} &\leq \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3 \leq \\ \leq \quad \cos^3\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ tj. za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 4. *Neka su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi*

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^2\,\beta + \mathrm{tg}^2\,\gamma \geq 9.$$

Rješenje. Prema nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine je

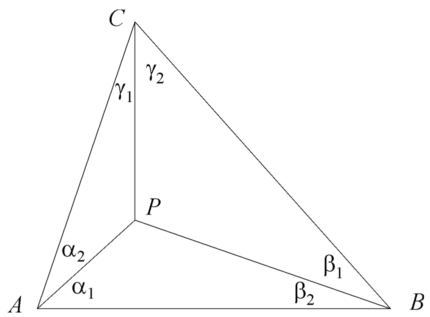
$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geq 3 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{3}\right)^2.$$

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ je konveksna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{3} \geq \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Stoga je $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geq 3(\sqrt{3})^2 = 9$. Jednakost vrijedi za $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$ tj. za $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 5. *Neka je P unutarnja točka trokuta ABC. Dokažite da je bar jedan od kutova $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ manji ili jednak* $30°$.



Slika 1.

Rješenje. Označimo kutove ovako: $\alpha_1 = \angle PAB$, $\beta_1 = \angle PBC$, $\gamma_1 = \angle PCA$, $\alpha_2 = \angle CAP$, $\beta_2 = \angle ABP$ i $\gamma_2 = \angle BCP$ (slika 1). Pretpostavimo suprotno tj. da su kutovi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ veći od $30°$. Kako je $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 180°$, tada je zbog $\alpha_1 > 30°$, $\beta_1 < 150°$ i $\gamma_1 < 150°$. Analogno, zbog $\beta_1 > 30°$ je $\alpha_1 < 150°$ i $\gamma_1 < 150°$, a zbog $\gamma_1 > 30°$ je $\alpha_1 < 150°$ i $\beta_1 < 150°$. Dakle, $30° < \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 < 150°$, pa je

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 > \frac{1}{8}. \tag{8}$$

Dalje slijedi $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 > 90°$ i $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90°$. Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i Jensenovoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 &\leq \left(\frac{\sin\alpha_2 + \sin\beta_2 + \sin\gamma_2}{3}\right)^3 \leq \\ \leq \quad \sin^3\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3} &\leq \sin^3 30° = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} \geq 8. \tag{9}$$

Množenjem (8) i (9) dobivamo

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} > 1. \tag{10}$$

Primjenom sinusovog poučka na trokute ABP, BCP, CAP, redom dobivamo

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{|PB|}{|PA|} \cdot \frac{|PC|}{|PB|} \cdot \frac{|PA|}{|PC|} = 1,$$

što znači da (10) ne vrijedi. Dakle, među kutovima α_1, β_1, γ_1 postoji barem jedan koji nije veći od $30°$, čime smo dokazali tvrdnju zadatka.

Zadatak 6. *Dokažite da za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

(nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine).
Rješenje. Kako je funkcija $f(x) = \ln x$ konkavna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\ln \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n},$$

tj.

$$\ln \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

odakle dobivamo traženu tvrdnju.

Zadatak 7. *Dokažite da za svaki $x \in [0, +\infty\rangle$ vrijedi nejednakost*

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Rješenje. Za $x = 0$ dana nejednakost očigledno vrijedi. Kako je funkcija $f(x) = x^5$ konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\left(\frac{x + (1-x)}{2}\right)^5 \leq \frac{x^5 + (1-x)^5}{2},$$

odakle slijedi

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Zadatak 8. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = (x + \frac{1}{x})^2$. Kako je $f'(x) = 2(x - \frac{1}{x^3})$, to je $f''(x) = 2(1 + \frac{3}{x^4}) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, f je konveksna na čitavoj domeni (a ne samo na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$). Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2 =$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)^2 = 3 \cdot \frac{100}{9} = \frac{100}{3}.$$

Zadatak 9. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3} \ln (abc).$$

Promotrimo funkciju $f(x) = x \ln x$. Kako je $f'(x) = \ln x + 1$ i $f''(x) = \frac{1}{x}$, to je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, pa je f konveksna na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{a+b+c}{3} \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3}$$

odakle dobivamo redom

$$(a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3} \leq \ln a^a + \ln b^b + \ln c^c,$$
$$\ln \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \leq \ln (a^a b^b c^c),$$
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \leq a^a b^b c^c.$$

Kako je prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

konačno dobivamo

$$a^a b^b c^c \geq \left((abc)^{\frac{1}{3}}\right)^{a+b+c} = (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Zadatak 10. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a s njegov poluopseg. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq s.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{x^2}{2s-x}$. Kako je $f'(x) = \frac{4sx-x^2}{(2s-x)^2}$ i $f''(x) = \frac{8s^2}{(2s-x)^3}$, to je $f''(x) > 0$ za $0 < x < 2s$. Stoga je f konveksna na intervalu $\langle 0, 2s\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{2s - \frac{a+b+c}{3}} \le \frac{\frac{a^2}{2s-a} + \frac{b^2}{2s-b} + \frac{c^2}{2s-c}}{3}$$

odakle sređivanjem dobivamo

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \ge s.$$

Jednakost vrijedi za jednakostraničan trokut.

Zadatak 11. *Neka su a, b, c duljine stranica, a P površina trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4P\sqrt{3}.$$

Rješenje. Iz

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$$

slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca.$$

Kako je

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2},$$

to je

$$ab + bc + ca = 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Stoga je

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 2P\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Vrijedi $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ i $f''(x) = \frac{\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x}$. Kako je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \pi\rangle$, to je funkcija f konveksna na $\langle 0, \pi\rangle$, pa je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} \le \frac{\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}}{3}.$$

Odatle dobivamo

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \ge 2\sqrt{3}.$$

Stoga je $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4P\sqrt{3}$.

Zadatak 12. *Neka su a, b, c duljine stranica, α, β, γ nasuprotni kutovi, a R polumjer opisane kružnice šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^2}{\cos\alpha} + \frac{b^2}{\cos\beta} + \frac{c^2}{\cos\gamma} \geq 18R^2.$$

Rješenje. Kako je prema poučku o sinusima

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

dana nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \geq \frac{9}{2}.$$

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Kako je $f'(x) = 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$ i $f''(x) = 2\cos x + \frac{3\sin^2 x}{\cos x} + \frac{2\sin^4 x}{\cos^3 x}$, to je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa je f konveksna na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \geq 3 \cdot \frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{9}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 13. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta, te neka je n prirodan broj. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = \operatorname{ctg}^n x$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Kako je $f'(x) = -\frac{n\operatorname{ctg}^{n-1} x}{\sin^2 x}$ i $f''(x) = n(n-1+\sin 2x \operatorname{ctg} x)\operatorname{ctg}^{n-2}\frac{x}{\sin^4 x}$, to je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa je f konveksna funkcija na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\frac{\gamma}{2} \geq 3\operatorname{ctg}^n\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} = 3\operatorname{ctg}^n\frac{\pi}{6} = 3(\sqrt{3})^n = 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Zadatak 14. *Neka je $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2}.$$

Rješenje. Promotrimo funkciju $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Kako je $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ i $f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, to je $f''(x) < 0$ za $x \in \langle -1, 1\rangle$, pa je f konkavna na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti za sve $x, y \in \langle -1, 1\rangle$ vrijedi

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2}.$$

Izravno se provjeri da dana nejednakost vrijedi i ako je $|x| = 1$ ili $|y| = 1$.

Zadatak 15. *Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi ($n \geq 2$) takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \\ + & \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Rješenje. S obzirom da je $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, danu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{x}{2-x}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Kako je $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$ i $f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3}$, to je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pa je f konveksna na $\langle 0, 1 \rangle$. Prema Jensenovoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k}{2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k} = \\ = & \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{2 - \frac{1}{n} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-1}{n}} = \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2 - a_k} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Zadaci za vježbu

1. Dokažite da za pozitivne realne brojeve a i b takve da je $a + b = 1$ vrijedi nejednakost
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

2. Neka su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta i $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi nejednakost
$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^n \alpha \cdot \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \alpha \cdot \operatorname{tg}^n \gamma + \operatorname{tg}^n \beta \cdot \operatorname{tg}^n \gamma \geq \\ \geq & \frac{1}{3^{n-1}} (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)^n. \end{aligned}$$

3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}+\cdots+\sqrt{1+x_n^2} \geq \sqrt{2n(x_1+x_2+\cdots+x_n)}.$$

4. Neka su realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0, \frac{1}{2}]$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{\Pi_{i=1}^n x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^n} \leq \frac{\Pi_{i=1}^n (1-x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^n}.$$

5. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n+\frac{1}{x_1}\right) \geq \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^n.$$

6. Dokažite da za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takve da je $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ vrijede nejednakosti:

   (a) $\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n+1}$,

   (b) $\frac{x_1}{1-x_1^2}+\frac{x_2}{1-x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1-x_n^2} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n-1}$.

Literatura

[1] S. KATZ, *Matematika feladatsorok*, Mozaik Oktatási Stűdió, Szeged, 1995.

[2] S. KUREPA, *Matematička analiza I. i II. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[3] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[4] J. REIMAN, S. DOBOS, *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959–2003*, Typotex, Budapest, 2003.