**Ристо Малчески**
**Скопје**

# ИДЕНТИТЕТОТ НА СОФИЈА ЖЕРМЕН

Во многу случаи е важно да утврдиме дали еден природен број поголем од еден е прост или сложен, т.е. да видиме дали има точно два или има повеќе од два природни делители. Притоа, како што знаеме, секој сложен број може да се запише како производ на два природни броја поголеми од еден и обратно, ако природниот број е производ на два природни броја поголеми од еден, тогаш тој е сложен број. Значењето на ова, во општ случај, не така едноставно прашање довело до разработка на голем број алгоритми кои даваат одговор на поставеното прашање. Меѓутоа, во многу случаи, како на пример за бројот $2^{2006}+5^{2004}$, одговорот на прашањето: дали овој број е прост или сложен можеме да го најдеме користејќи едноставни математички тврдења. Во оваа статија ќе се осврнеме на идентитетот на Софија Жермен

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)\,, \qquad (1)$$

со чија помош за определена класа природни броеви можеме да констатираме дека се сложени. Пред да преминеме на користење на идентитетот (1) истиот ќе го докажеме. Навистина, ако ги искоритиме формулите: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ и $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ добиваме:

$$a^4+4b^4=(a^4+4a^2b^2+4b^4)-4a^2b^2=[(a^2)^2+2a^2\cdot 2b^2+(2b^2)^2]-(2ab)^2$$
$$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab),$$

што и требаше да се докаже.

Да разгледаме неколку примери.

**Пример 1.** Докажи дека за секој природен број $n>1$ бројот $n^4+4$ е сложен.

**Решение.** Ако во идентитетот на Софија Жермен ставиме $a=n$ и $b=1$ добиваме

$$n^4+4=a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$$
$$=(n^2+2\cdot 1^2+2n\cdot 1)(n^2+2\cdot 1^2-2n\cdot 1)=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Според тоа, за да докажеме дека за секој природен број $n>1$ бројот $n^4+4$ е сложен, доволно е да докажеме дека за секој природен број $n>1$ се исполнети неравенствата

$$n^2+2+2n>1 \text{ и } n^2+2-2n>1.$$

Навистина, бидејќи за секој природен број $n>1$ важи $(n+1)^2>0$ и $(n-1)^2>0$ добиваме

$$n^2+2+2n=(n^2+2n+1)+1=(n+1)^2+1>1 \text{ и}$$

$$n^2+2-2n=(n^2-2n+1)+1=(n-1)^2+1>1$$

од што следува дека природниот број $n^4+4$ е сложен. ♦

**Пример 2.** Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви $x$ такви што за секој $n\in\mathbf{N}$, бројот $z=n^4+x$ е сложен.

**Решение.** Нека $x=4k^4$, каде што $k\in\mathbf{N}$, $k>1$. Ако во идентитетот (1) ставиме $a=n$ и $b=k$ добиваме

$$z=n^4+x=n^4+4k^4=(n^2+2k^2-2nk)(n^2+2k^2+2nk),$$

и притоа важи

$$n^2+2k^2-2nk=(n^2-2nk+k^2)+k^2=(n-k)^2+k^2\geq k^2>1 \text{ и}$$

$$n^2+2k^2+2nk=(n^2+2nk+k^2)+k^2=(n+k)^2+k^2>k^2>1.$$

Според тоа, за секој $n\in\mathbf{N}$ и за секој $x=4k^4$, $k\in\mathbf{N}$, $k>1$ бројот $z=n^4+x$ е производ на два природни броја поголеми од 1, т.е. тој е сложен број. Конечно, тврдењето следува од фактот дека множеството $\{k\,|\,k\in\mathbf{N}, k>1\}$ е бесконечно. ♦

**Пример 3.** Докажи дека бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

**Решение.** Имаме

$$2^{10}+5^{12}=5^{3\cdot4}+2^2\cdot2^8=(5^3)^4+4\cdot2^{2\cdot4}=125^4+4\cdot(2^2)^4=125^4+4\cdot4^4.$$

Понатаму, ако се искористри идентитетот на Софија Жермен, при $a=125$ и $b=4$ добиваме

$$2^{10}+5^{12}=125^4+4\cdot4^4=(125^2+2\cdot4^2+2\cdot125\cdot4)(125^2+2\cdot4^2-2\cdot125\cdot4)$$

и како двата броја во заградите се поголеми од 1 заклучуваме дека дадениот број е сложен. ♦

**Пример 4.** Докажи дека бројот од видот $4n^4+1$, $n\in\mathbf{N}$ е прост само ако $n=1$.

**Решение.** За $n=1$ имаме $4n^4+1=4\bullet 1^4+1=5$ и тоа е прост број. Нека $n>1$. Ако во идентитетот (1) ставиме $a=1$ и $b=n$ добиваме

$$4n^4+1=1^4+4n^4=(1+2n^2+2n)(1+2n^2-2n)\,.$$

Понатаму, за секој природен број $n>1$ важи $(n+1)^2>0$, $(n-1)^2>0$ и $n^2>1$, па затоа

$$1+2n^2+2n=(1+2n+n^2)+n^2=(n+1)^2+n^2>1 \text{ и}$$

$$1+2n^2-2n=(1-2n+n^2)+n^2=(n-1)^2+n^2>1\,.$$

Според тоа, за секој $n>1$ природниот број $4n^4+1$ е производ на два природни броја поголеми од еден, па затоа тој е сложен. ♦

**Пример 5.** Докажете дека за секој $n>1$ природниот број $n^4+4^n$ е сложен.

**Решение.** За секој природен број $n$ важи $n=2k$ или $n=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$.

Ако $n=2k$, $k\in\mathbf{N}$, тогаш

$$n^4+4^n=(2k)^4+4^{2k}=2^4k^4+4^2 4^{2(k-1)}=16(k^4+4^{2(k-1)})\,.$$

Но, $k^4+4^{2(k-1)}>1$, па затоа $n^4+4^n$ е парен број поголем од 16, што значи дека е сложен број.

Ако $n=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$, тогаш

$$n^4+4^n=(2k+1)^4+4^{2k+1}=(2k+1)^4+4\bullet 4^{2k}=(2k+1)^4+4\bullet(2^2)^{2k}$$
$$=(2k+1)^4+4\bullet 2^{4k}=(2k+1)^4+4\bullet(2^k)^4.$$

Понатаму, во идентитетот (1) ставаме $a=2k+1$ и $b=2^k$ и добиваме

$$\begin{aligned}n^4+4^n&=(2k+1)^4+4\bullet(2^k)^4\\&=[(2k+1)^2+2\bullet(2^k)^2+2(2k+1)2^k]\bullet[(2k+1)^2+2\bullet(2^k)^2-2(2k+1)2^k]\\&=[(2k+1)^2+2(2k+1)2^k+(2^k)^2+(2^k)^2]\bullet[(2k+1)^2-2(2k+1)2^k+(2^k)^2+(2^k)^2]\\&=[(2k+1+2^k)^2+(2^k)^2]\bullet[(2k+1-2^k)^2+(2^k)^2].\end{aligned}$$

Но, за секој $k\in\mathbf{N}$ важи

$$(2k+1+2^k)^2+(2^k)^2>1 \text{ и } (2k+1-2^k)^2+(2^k)^2>1,$$

што значи дека за $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$ природниот број $n^4 + 4^n$ е производ на два природни броја поголеми од 1, па затоа тој е сложен. ♦

На крајот, користејќи го идентитетот (1), обиди се самостојно да ги решиш следниве задачи.

**Задача 1.** Докажи дека природниот број $2^{2006} + 5^{2004}$ е сложен.

**Задача 2.** Докажи дека природниот број $2005^4 + 4^{2005}$ е сложен.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ