Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година

Питагорине тројке

Тројка природних бројева (a,b,c) који задовољавају једнакост $a^2+b^2=c^2$ назива се ***Питагорина тројка***, јер ако ти бројеви представљају дужине страница неког троугла, тај троугао је правоугли (према Питагориној теореми). Најпознатији пример Питагорине тројке је $(3,4,5)$: $3^2+4^2=5^2$. Ево још неких: $(5,12,13)$, $(6,8,10)$, $(20,21,29)$, $(99,4900,4901)$. На основу претходног разматрања за произвољне природне бројеве p и q такве да је $q>p$, тројка $(q^2-p^2, 2pq, p^2+q^2)$ (наравно и $(2pq, q^2-p^2, p^2+q^2)$) је Питагорина тројка.

p	q	$(q^2-p^2, 2pq, p^2+q^2)$
1	2	$(3,4,5)$
	3	$(8,6,10)$
	4	$(15,8,17)$
	$\vdots$	
2	3	$(5,12,13)$
	4	$(12,16,20)$
	$\vdots$	
3	4	$(7,24,25)$
$\vdots$	$\vdots$	

Још су Питагорејци измислили методичан начин за проналажење овакних тројки и учинивши то, доказали су да постоји бесконачан број Питагориних тројки. На пример, Еуклид свој доказ заснива се на чињеници да је разлика између квадрата узастопних бројева увек непаран број:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1^2 & & 2^2 & & 3^2 & & 4^2 & & 5^2 & & 6^2 & & 7^2 & & 8^2 & & 9^2 & & \ldots \\
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & 49 & & 64 & & 81 & & \ldots \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & 17 & & & \ldots
\end{array}$$

Сваки од бесконачно много непарних бројева може бити сабран са квадратом одређеног броја да би се добио следећи квадрат неког другог броја. Део ових непарних бројева и сами *представљају квадрате неких бројева и има их такође бесконачно много.*

Иако смо утврдили постојање бесконачно много Питагориних тројки, то не значи да смо тиме описали и све такве тројке, тј. нашли сва решења једначине $a^2+b^2=c^2$.

Приметимо да ако је (a,b,c) Питагорина тројка и $\operatorname{nzd}(a,b,c)=d$, тада је и $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}\right)$ такође Питагорина тројка. Дакле, довољно је наћи све, тзв. ***основне*** Питагорине тројке, (a,b,c) које задовољавају услов $\operatorname{nzd}(a,b,c)=1$*. Одговоре (тј. опис свих (основних) Питагориних тројки) даје:

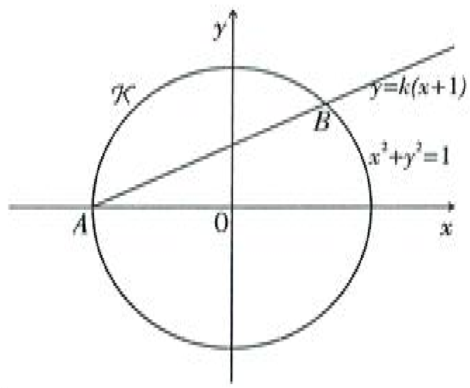
*Налажењем свих основних Питагориних тројки (a,b,c) налазимо и све остале, јер су оне облика (da,db,dc), $d\in\mathbb{N}$

Теорема. Тројка (a, b, c) је основна Питагорина тројка ако и само ако постоје природни бројеви p и q, такви да је $a = q^2 - p^2$, $b = 2pq$ и $c = q^2 + p^2$, при чему је $q > p$, $\mathrm{nzd}(p, q) = 1$ и p и q су различите парности.

Препоручујемо читаоцу да сам покаже претходно тврђење, иако његов доказ може наћи у скоро свакој књизи која се бави теоријом бројева.

Задатак 1. Доказати да јединична кружница садржи бесконачно много тачака чије су координате рационални бројеви.

Решење. Нека је $\mathcal{K}$ јединична кружница и $A = (-1, 0)$ тачка на њој. Свака права кроз тачку A са рационалним коефицијентом правца k сече кружницу $\mathcal{K}$ у „рационалној" тачки B различитој од A.



Наиме, нека је $k = \dfrac{p}{q}$ било који рационалан број. Координате тачке B задовољавају систем једначина

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \qquad\; y = k(x+1) \end{cases}$$

Решења овог система су $x_1 = -1$, $y_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$, $y_2 = \dfrac{2k}{1+k^2}$, па су x_2 и y_2 координате тачке B. Изражено преко p и q:

$$(*) \qquad x_2 = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \quad y_2 = \frac{2pq}{q^2 + p^2}\,.$$

Пошто има бесконачно много рационалних бројева $\dfrac{p}{q}$, кружница $\mathcal{K}$ садржи бесконачно много рационалних тачака $B(x_2, y_2)$. $\square$

Ова чињеница има доста последица. На пример, постоји бесконачно много бројева x таквих да су $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ сви рационални бројеви.

Такође, постоји бесконачно много тројки природнох бројева (a, b, c) таквих да је $a^2 + b^2 = c^2$. Наиме, ако једначину напишемо у облику $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$, и ставимо $x = \dfrac{a}{c}$ и $y = \dfrac{b}{c}$, добијамо једначину $x^2 + y^2 = 1$ јединичне кружнице. Користећи се једнакостима $(*)$ имамо да су $a = q^2 - p^2$, $b = 2pq$ и $c = p^2 + q^2$ цели бројеви који задовољавају дату једначину. Ако је $q > p > 0$ тада су a, b и c позитивни, тј. природни бројеви. Пошто постоји бесконачно много парова p, q који задовољавају ове услове, једначина има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

Задатак 2. Доказати да у скупу природних бројева, једначине
(а) $x^4 + y^4 = z^2$, (б) $x^4 + y^4 = z^4$ немају решења .

Задатак 2. Доказати да у скупу природних бројева, једначине
(а) $x^2 + y^3 = z^2$, (б) $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b^2, n \in \mathbb{N}$, имају бесконачно много решења.

О ЈЕДНОМ РЕШЕЊУ ПРОБЛЕМА ПИТАГОРИНИХ ТРОЈКИ

***Милан Живадиновић,* Бајина Башта**

Овде ћемо дати један другачији поступак тражења решења једначине

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

као и услове под којима ће Питагорина тројка бити основна. Трансформацијом

$$\begin{cases} a = \alpha + \gamma \\ b = \beta + \gamma \\ c = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \tag{2}$$

једначина (1) се своди на једначину

$$\gamma^2 = 2\alpha\beta. \tag{3}$$

Кажемо да је решење (α, β, γ) једначине (3) ***основно*** ако је $\mathrm{nzd}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$. Пре него што пређемо на решавање једначине (3) формулишимо једно помоћно тврђење:

Теорема. Решење (a, b, c) једначине (1) је основно ако и само ако је одговарајућа тројка (α, β, γ) основно решење једначине (3).

Применом контрапозиције лако се показују обе импликације претходног тврђења. Такође, очигледно је (α, β, γ) основно решење једначине (3) ако и само ако су α и β узајамно прости и различите парности.

После ових запажања пређимо на решавање једначине (3). Пошто је десна страна једначине паран број то мора бити и лева, односно број γ. Ако је $\gamma = 2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, канонска факторизација броја γ, где су $r, k, k_1, \ldots, k_r$ природни бројеви, а $p_1, \ldots, p_r$ непарни прости бројеви, једначина (3) добија следећи облик:

$$2^{2k} p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{2k_r} = 2\alpha\beta, \quad \text{односно} \quad 2^{2k-1} p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{2k_r} = \alpha\beta.$$

Да би α и β били узајамно прости њихове каноноске факторизације не могу садржати исти прост делилац броја γ. Не умањујући општост можемо претпоставити да је β парно. У том случају је $\alpha = 1$ или је α једнако производу неколико (могуће свих) бројева скупа $\left\{p_1^{2k_1}, p_2^{2k_2}, \ldots, p_r^{2k_r}\right\}$, што можемо записати на следећи начин:

$$\alpha = \prod_{i \in A} p_i^{k_i}, \quad \text{за неки подскуп} \quad A \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$$

(при чему за $A = \emptyset$, узимамо да је $\alpha = 1$).

Јасно је да једначина (3) има онолико основних решења колико и скуп $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ подскупова, тј. 2^r. Сва основна решења једначине (3) дата су формулама:

$$\left(\alpha = \prod_{i \in A} p_i^{k_i}, \, \beta = \prod_{i \in I \setminus A} p_i^{k_i}, \, \gamma = 2^k \prod_{i \in I} p_i^{k_i}\right), \quad A \subseteq I. \tag{4}$$

Дакле, доказали смо следеће тврђење:

Теорема. Сваки паран број γ који има тачно r простих делилаца различитих од 2, помоћу формула (4) и трансформације (2) генерише тачно 2^r различитих основних Питагориних тројки.

У следећој табели дата је илустрација претходног тврђења за неке вредности парног броја γ.

γ	α	β	$x = \alpha + \gamma$	$y = \beta + \gamma$	$z = \alpha + \beta + \gamma$	r	број решења $= 2^r$
2	1	2	3	4	5	0	1
4	1	8	5	12	13	0	1
6	1	18	7	24	25	1	2
	9	2	15	8	17		
8	1	32	9	40	41	0	1
10	1	50	11	60	61	1	2
	25	2	35	12	37		
				⋮			
30	1	450	31	480	481	2	4
	9	50	39	80	89		
	25	18	55	48	73		
	225	2	255	32	257		

***Напомена.** У претходном броју Тангенте поткрало се неколико грешака у чланку „О једном решењу проблема Питагориних тројки“. Прво, аутор чланка је Милан Живановић (а не Живадиновић). Друго, у 8. реду на страни 7. треба да пише: $\alpha = \prod_{i \in A} p_i^{2k_i}$ уместо $\alpha = \prod_{i \in A} p_i^{k_i}$. И треће, надамо се и последње, на страни 7. у формулама (4) треба да стоји $\left(\alpha = \prod_{i \in A} p_i^{2k_i}, \beta = 2^{2k-1} \prod_{i \in I \setminus A} p_i^{2k_i}, \gamma = 2^k \prod_{i \in I} p_i^{k_i}\right)$, $A \subseteq I$. Редакција се извињава читаоцима због ових пропуста.