Сава Гроздев, Софија
Катерина Аневска, Скопје

БОИМЕ БРОЕВИ

Здраво, млади пријатели! Сакате ли да боите? Сигурни сме, дека повеќето од вас ќе одговорат потврдно. А тие, кои не ги сакаат боите и четката, нека не брзаат да се откажат од боењата во ова четиво, бидејќи ние ќе боиме, но не цртежи, туку броеви. Имено, ве каниме на една екскурзија во волшебниот свет на природните броеви, кои за да изгледаат поубаво или пак за да разгледувањата се поинтересни, ќе ги боиме во различни бои. На почетокот да се договориме, дека во сите задачи секој од броевите кој се разгледува ќе биде обоен во точно една од боите кои ги користиме. Понатаму, за два броја обоени со иста боја ќе велиме дека се истобојни.

Задача 1. Броевите 1, 2, 3, 4 и 5 се обоени во две бои, сина и црвена. Докажи, дека секогаш можеме да избереме два од овие броеви така што двата броја и нивната разлика се обоени со иста боја.

Решение. Треба внимателно да ги разгледаме сите можности. Ако броевите 1 и 2 се обоени со иста боја, тогаш од равенството $2-1=1$ следува дека задачата е решена. Затоа нека претпоставиме, дека 1 и 2 се различно обоени. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека 1 е обоен црвено, а 2 е обоен сино (во спротивно секој број ќе го пребоиме во другата боја). Сега од равенството $4-2=2$ следува дека ако 4 е обоен сино, тогаш бараните броеви се најдени. Останува да претпоставиме дека бројот 4 е обоен црвено. Ќе направиме табела во која ќе ја внесеме оваа состојба.

Црвена боја	Сина боја
1, 4	2

Сега да го разгледаме бројот 3. Ако 3 е обоен во црвено, тогаш од равенството $4-1=3$ следува дека бараните броеви се најдени. Затоа нека 3 е обоен сино. Тогаш ја добиваме табелата

Црвена боја	Сина боја
1, 4	2, 3

Понатаму, ако бројот 5 е обоен црвено, тогаш од равенството $5-1=4$ следува дека бараните броеви се најдени, а ако е обоен сино тоа следува од равенството $5-3=2$. ■

Сега, малку ќе го измениме условот на задача 1, со што ќе ја добиеме следнава задача.

Задача 2. Броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 се обоени во три бои: црвена, сина и зелена. Дали секогаш можеме да избереме два од овие броеви така што двата броја и нивната разлика се обоени со иста боја.

Ако повторно направите табела за можните боење, лесно ќе се досетите дека одговорот на поставеното прашање е "не". Обрнете внимание, дека за да ја решиме оваа задача доволно е да посочиме едно и единствено боење за кое бараниот избор на броеви не е можен. Навистина, ако броевите 1 и 4 ги обоиме во црвена, броевите 2 и 3 во сина и броевите 5 и 6 во зелена боја, тогаш ќе нема два броја такви што се обоени со иста боја како и нивната разлика. Обидете се да најдете друг пример на вакво боење! □

Задача 3. Секој од броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 е обоен со црвена или со сина боја. Познато е дека 3 и 7 се обоени со различни бои и дека производот на сите црвени броеви е четирицифрен број со цифра на единиците 2. Со која боја е обоен бројот 6?

Решение. Бројот 5 мора да е обоен во сина боја, бидејќи во спротивно производот на црвените броеви нема да завршува на 2 (зошто?). Јасно, точно еден од броевите 3 и 7 е обоен во црвено. Одделно ќе ги разгледаме двете можности.

Нека 3 е обоен црвено. Тогаш бројот 7 е обоен сино. Нека претпоставиме дека бројот 6 е обоен сино. Тогаш производот на останатите црвени броеви треба да завршува на 4 (само 3 помножен со 4 завршува на 2). Но, сите останати црвени броеви треба да се парни, т.е. треба да се некои од броевите 2, 4 или 8. Да провериме кога производот на некои од броевите 2, 4 и 8 завршува на 4. Последното е можно кога само 4 е црвен или кога и 2, 4 и 8 се црвени. Во првиот случај црвени броеви се 3 и 4, при што нивниот производ е 12, но тој треба да е четирицифрен број. Во вториот случај црвени се броевите 2, 3, 4 и 8, при што нивниот производ е 192, но тој треба да е четирицифрен број. Значи, претпоставката дека бројот 6 е син не е точна, па заклучуваме дека бројот 6 е црвен.

Сега, нека претпоставиме дека бројот 7 е црвен. Тогаш бројот 3 е син. Да претпоставиме, дека 6 е син. Тогаш производот на останатите црвени броеви треба да завршува на 6. Останатите црвени броеви може да се меѓу броевите 2, 4 и 8. Производот на некои од овие броеви завршува на 6, само кога црвени се броевите 2 и 8. Тогаш сите црвени броеви се 2, 7 и 8, при што нивниот производ е еднаков на 112, но тој треба да е четирицифрен број. Значи, претпоставката дека бројот 6 е син не е точна, па заклучуваме дека бројот 6 е црвен.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот 6 е обоен во црвена боја, при што сите црвени броеви се 2, 3, 4, 6 и 8, а нивниот производ е четирицифрениот број 1152. ■

Задача 4. Определи го најголемиот природен број n за кој броевите $1,2,3,...,n$ можат да бидат обоени во две бои така што за секои два броја a и $b, (a \neq b)$ кои се обоени во иста боја нивниот збир $a+b$ е обоен во другата боја.

Решение. Нека бројот 1 е обоен во црвена боја, а другата боја нека е сина. Последователно ќе ги боими природните броеви, при што според даденото правило ќе тежнееме да "отидеме најдалеку". За бројот 2 можни се два случаја.

Прв случај. Нека 2 е обоен сино. Да ги разгледаме можностите за бројот 3.

а) Нека 3 е обоен црвено. Тогаш $1+3=4$ треба да е обоен сино, а $2+4=6$ треба да е обоен црвено. Да видиме каква може да биде бојата на бројот 5. Ако е црвена, тогаш броевите 1, 5 и 6 се црвени, што не е можно бидејќи $1+5=6$. Ако е зелена, тогаш 7 не може да биде обоен во ниту една од двете бои бидејќи $1+6=2+5=7$. Во овој случај стигнавме до бројот 6.

б) Нека 3 е обоен сино. Тогаш $2+3=5$ е обоен црвено и оттука заклучуваме дека 4 треба да е обоен сино, бидејќи во спротивно добиваме противречност со равенството $1+4=5$. Но, сега веќе имаме проблем со бројот 6, за кој се исполнети равенствата $1+5=2+4=6$. Според тоа, во случајот стигнавме до бројот 6.

Втор случај. 2 е обоен црвено. Од $1+2=3$ следува дека 3 мора да е обоен сино. Да ги разгледаме можностите за бројот 4.

а) Нека 4 е обоен црвено. Тогаш $5=1+4$ треба да е обоен сино, $6=2+4$ треба да е обоен сино, а за бројот 7 лесно се гледа дека може да е обоен или црвено или сино. Меѓутоа, бројот $8=3+5$ треба да е обоен црвено, па затоа од $8=1+7$ следува дека 7 треба да е обоен сино. Сега, како и претходно од равенствата $1+8=3+6=9$ добиваме дека бројот 9 не може да биде обоен во ниту една боја. Според тоа, во случајов стигнавме до бројот 8.

б) Нека 4 е обоен сино. Тогаш $7=3+4$ е обоен црвено и од равенството $1+6=7$ следува дека бројот 6 мора да е обоен сино. Сега, повторно заради равенствата $2+7=3+6=9$ заклучуваме дека бројот 9 не може да се обои во ниту една боја.

Во претходните разгледувања ги исцрпивме сите можности, со што добивме дека $n<9$. За да се убедиме дека $n=8$ доволно е броевите 1, 2, 4 и 8 да ги обоиме во црвено, а броевите 3, 5, 7 и 7 во сино. ■

Во следните неколку задачаи ќе разгледуваме боење на сите природни броеви.

Задача 5. Докажи, дека при произволно боење на природните броеви во две бои, секогаш може да се најдат три различни природни броеви a,b и c кои се обоени во иста боја и за кои важи $a+b=2c$.

Решение. Равенството $a+b=2c$ сугерира дека треба да обрнеме внимание на боењето на парните броеви. Од принципот на Дирихле следува дека меѓу броевите 6, 8 и 10 барем два се обоени со иста боја.

Нека 6 и 8 се обоени со иста боја. Тогаш ако некој од броевите 4, 7 или 10 е обоен со истата боја, тврдењето на задачата следува заради равенствата $6+8=2\cdot 7$, $6+10=2\cdot 7$ и $4+8=2\cdot 6$. Ако и трите броеви 4, 7 и 10 се обоени во другата боја, тогаш тврдењето на задачата следува од равенството $4+10=2\cdot 7$.

Нека 6 и 10 се обоени во иста боја. Тогаш ги разгледуваме броевите 2, 8 и 14. Од равенствата $2+10=2\cdot 6$, $6+10=2\cdot 8$ и $6+14=2\cdot 10$ следува тврдењето на задачата дури и ако само еден од броевите 2, 8 и 14 е обоен во истата боја како и броевите 6 и 10. Ако 2, 8 и 14 се обоени во другата боја, тогаш тврдењето на задачата следува од равенството $2+14=2\cdot 8$.

Нека 8 и 10 се обоени во иста боја. Тогаш ги разгледуваме броевите 6, 9 и 12. Ако барем еден од овие броеви е обоен во иста боја како броевите 8 и 10, тогаш тврдењето на задачата следува од равенствата $6+10=2\cdot 8$, $8+10=2\cdot 9$ и $8+12=2\cdot 10$. Ако 6, 9 и 12 се обоени во другата боја, тогаш тврдењето на задачата следува од равенството $6+12=2\cdot 9$. ■

Задача 6. Природните броеви се обоени во две бои: црвена и сина. Познато е дека ако a е црвен, тогаш $a+6$ исто така е црвен, а ако бројот b е син, тогаш $b+15$ исто така е син. Дали е можно меѓу броевите 1, 2, 3, 4, ..., 2000 точно 1000 да се црвени?

Решение. Ќе докажеме дека за секој природен број n броевите n и $n+3$ се истобојни.

Нека претпоставиме дека n и $n+3$ не се истобојни. Можни се два случаја:

а) Бројот n е црвен, а бројот $n+3$ е син. Бидејќи бројот n е црвен, добиваме дека и броевите $n+6, (n+6)+6=n+12$ и $(n+12)+6=n+18$ се црвени. Бидејќи бројот $n+3$ е син, добиваме дека и бројот $(n+3)+15=n+18$ е син. Според тоа, добивме дека бројот $n+18$ треба истовремено да е и црвен и син, што е противречност.

б) Бројот n е син, а бројот $n+3$ е црвен. Тогаш бројот $n+15$ треба да е син и во исто време $(n+3)+6+6=n+15$ треба да е црвен, што повторно е противречност.

Од претходните разгледувања следува дека за секој природен број n броевите n и $n+3$ треба да се истобојни. Сега броевите 1, 2, 3, 4, ..., 2000 да ги поделиме во три групи. Во првата група нека се броевите кои при делење со 3 даваат остаток 1, т.е. броевите 1, 4, 7, ..., 1996, 1999 во втората група кои при делење со 3 даваат остаток 2, т.е. броевите 2, 5, 8, ..., 1997, 2000 и во третата група броевите кои се деливи со 3, т.е. броевите 3, 6, 9, ..., 1998. Од претходно изнесеното следува дека броевите во секоја од овие групи се еднобојни, од што следува дека не е можно да имаме точно 1000 црвени броеви. ■

Задача 7. Природните броеви се обоени во две бои.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу парови од различни еднобојни броеви x и y за кои бројот $x+y$ е точен квадрат.

б) Дали постојат два различни еднобојни броеви x и y чиј збир е степен на бројот 2.

Решение. а) За секој природен број $x>1$ е точно равенството

$$(2x+1)^2-(2x^2-2)+(2x+2)^2-(2x^2-2)=(2x+3)^2 . \qquad (1)$$

Ако $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ или $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ е во бојата на $2x^2-2$, тогаш го имаме потребното претставување (првиот и третиот или вториот и третиот). Во спротивно, $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ и $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ се еднобојни броеви и претставувањето е дадено со (1).

б) Не! Да ги обоиме сите броеви од видот $2^m(4t+3)$ во боја A, а сите броеви од видот $2^n(4k+1)$ во боја B. Да претпоставиме дека збир на два различни броја со боја A е степен на бројот 2. Тогаш

$$2^{m_1}(4t_1+3)+2^{m_2}(4t_2+3)=2^l .$$

Ако $m_1 \neq m_2$, добиваме противречност по модул 2, а ако $m_1=m_2$, тогаш $2[2(t_1+t_2+1)+1]$ треба да е степен на бројот 2, што не е можно. Аналогно се докажува дека збир на два различни броја обоени во бојата B не е степен на бројот 2. ■