EVOLVENTA (JAMTK) 6(2) (2023), 26 - 30

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Louivilleov teorem

Risto Malčeski[1]

[1] *Profesor u penziji, Sjeverna Makedonija*

Sažetak: U ovom radu je dokazan teorem francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koji je generalizacija formule za zbir trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Pri tome je korištena tzv. multiplikativna indukcija, za koju se pokazalo da su njome realizovani dokazi tačni.

1. Uvod

Matematika, posebno teorija brojeva, obiluje neočekivanim generalizacijama i zanimljivim rezultatima. Jedan od takvih rezultata je dobro poznata teorema francuskog matematičara Josepha Liouvillea, koja se na određeni način može smatrati generalizacijom formule za izračunavanje zbira trećih potencija prvih n prirodnih brojeva. Prije razmatranja Liouvilleovog teorema, koristit ćemo matematičku indukciju da bismo dokazali nekoliko formula za izračunavanje zbira potencija prirodnih brojeva.

Lema 1.1. *Za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Dokaz: Dokazat ćemo jednakost (3).
Za $n = 1$ imamo $1^3 = 1 = \left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2$, to jest jednadakost vrijedi.
Pretpostavimo da je jednakost (3) tačna za $n = k > 1$. Koristeći tu pretpostavku, za $n = k + 1$, imamo:

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: Matematička indukcija, multiplikativna indukcija, Liouvilleov teorem
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: juni 2023.

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 =& \left[\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\
=&(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}\\
=&\left[\frac{(k+1)\cdot(k+1+1)}{2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

to jest za $n=k+1$ jednakost vrijedi.
Konačno, iz principa potpune matematičke indukcije slijedi da je jednakost (3) tačna za svako $n\in\mathbb{N}$.

Jednakosti (1) i (2) se dokazuju analogno. Detalje ostavljamo čitaocu za vježbu. $\square$

Primjedba 1.2. *Ako koristimo jednakost (1), onda se jednakost (3) može zapisati u obliku*

$$1^3+2^3+3^3+..+n^3=(1+2+3+...+n)^2. \tag{4}$$

Korolar 1.1. *Za svako $n\in\mathbb{N}$ vrijede jednakosti*

$$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2\cdot(n+1)^2, \tag{5}$$

$$1^3+3^3+5^3+...+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1) \tag{6}$$

Dokaz: Iz jednakosti (3) neposredno slijedi

$$
\begin{aligned}
2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3 =&2^3\cdot1^3+2^3\cdot2^3+2^3\cdot3^3+...+2^3\cdot n^3\\
=&2^3\cdot(1^3+2^3+3^3+...+n^3)\\
=&2^3\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{2^2}\\
=&2n^2\cdot(n+1)^2
\end{aligned}
$$

to jest jednakost (5) je tačna. Nadalje, iz (3) i (5) imamo

$$
\begin{aligned}
1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3 =&1^3+2^3+...+(2n-1)^3+(2n)^3-(2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3)\\
=&\frac{(2n)^2\cdot(2n+1)^2}{4}-2n^2(n+1)^2\\
=&n^2\left[(2n+1)^2-2(n+1)^2\right]\\
=&n^2\cdot(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)\\
=&n^2\cdot(2n^2-1)
\end{aligned}
$$

to jest pokazali smo da vijedi jednakost (6). $\square$

2. Multiplikativna indukcija

Napomenimo da ako smo nekako došli do formula (1), (2), (3) i (4), onda ih možemo dokazati uz pomoć matematičke indukcije. Međutim, matematička indukcija nije dovoljna za dokazivanje nekih tvrdnji, pa se koriste i druge metode. Jedna takva metoda je takozvana *multiplikativna indukcija*, pomoću koje se tvrdnja:

"Svaki prirodni broj n ima osobinu T"

dokazuje u sljedeća četiri koraka:

1. Dokazuje se da broj 1 i svi prosti brojevi imaju osobinu T.
2. Pretpostavlja se da prirodni broj m ima osobinu T.
3. Dokazuje se da za svaki prost broj p, broj mp ima osobinu T.
4. Zaključujemo da svaki prirodni broj n ima osobinu T.

Prije nego što pređemo na primjenu metode multiplikativne indukcije predstavljenu gore, pokazat ćemo da je ova vrsta zaključivanja ispravna.

Naime, u koraku 1) neka je dokazano da svi prosti brojevi imaju osobinu T. Neka je p prost broj i neka je za neki prirodni broj k, broj m iz koraka 2) oblika $m = p^k$. Tada iz koraka 3) slijedi da broj $mp = p^{k+1}$ također ima osobinu T. Iz ovog i principa matematičke indukcije slijedi da sve potencije prostog broja p imaju osobinu T.

Neka je $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} \cdot p_t^{k_t}$ proizvoljan prirodni broj predstavljen njegovom kanonskom notacijom. Iz prethodnog razmatranja proizlazi da broj $p_1^{k_1}$ ima osobinu T. Stavimo da je $m = m_1 = p_1^{k_1}$ i $p = p_2$, pa prema 3) slijedi da $mp = p_1^{k_1} p_2$ ima osobinu T. Sada opet iz 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_2 = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ ima osobinu T. Neka je $m = m_2$ i $p = p_3$, pa iz 3) slijedi da broj $mp = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3$ ima osobinu T. Ponovo primjenom koraka 3) i principa matematičke indukcije, dobijamo da broj $m_3 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ ima osobinu T. Ponavljanjem prethodnog postupka $t-3$ puta, dobijamo da broj $n = m_t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_{t-1}^{k_{t-1}} p_t^{k_t}$ ima osobinu T.
Konačno, iz prethodnog razmatranja proizlazi da su dokazi izvedeni pravilnom primjenom multiplikativne indukcije korektni.

3. Louivilleov teorem

U ovoj sekciji, koristeći multiplikativnu indukciju, dokazat ćemo Louivilleov teorem, koji se odnosi na broj djelitelja od djelitelja proizvoljnog prirodnog broja n.

Prije nego pređemo na naredna razmatranja, navedimo da je broj djelitelja prirodnog broja n, čiji je kanonski rastav $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, određen funkcijom

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1).$$

Funkcija τ je multiplikativna, što znači da ako su m i n međusobno prosti brojevi, onda vrijedi $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. Višestruka svojstva, identiteti i nejednakosti u vezi s ovom funkcijom, kao i s drugim osnovnim multiplikativnim funkcijama dokazane su u [2] i [3].

Teorem 3.1. ***(Louiville, [1])*** *Ako su $d_1 = 1$, $d_2, ..., d_k = n$ svi pozitivni prirodni djelitelji broja n, a a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i = 1, 2, ...k$, tada je*

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_k^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)^2. \tag{7}$$

Dokaz: Za $n = 1$ imamo $d_1 = 1$ i $a_1 = 1$, pa je $a_1^3 = 1 = a_1^2$, to jest jednadakost (7) je tačna.
Neka je p proizvoljan prost broj. Tada su jedinstveni djelitelji broja p: $d_1 = 1$ i $d_2 = p$. Zbog toga je $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Sada, ako koristimo jednakost (4), dobijamo

$$a_1^3 + a_2^3 = 1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (a_1 + a_2)^2,$$

tako da je teorem dokazan za sve proste brojeve.
Pretpostavimo da teorem vrijedi za neki prirodni broj m. Neka je p proizvoljan prost broj. Moguća su dva slučaja:

- $NZD(m, p) = 1$ i
- $NZD(m, p) = p$,

koje ćemo posebno razmotriti.

Neka je $NZD(m,p)=1$. Ako su $d_1=1$ i $d_2,...,d_s=m$ svi prirodni djelitelji broja m, a a_i, respektivno, su brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, tada je

$$a_1^3+a_2^3+...+a_s^3=(a_1+a_2+...+a_s)^2, \tag{8}$$

a svi prirodni djelitelji broja mp su:

$$d_1=1,\ d_2,...,d_s=m,\ pd_1=p,\ pd_2,\ ...\ ,pd_s=pm. \tag{9}$$

Budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...,s$, iz osobina funkcije $\tau(u)$, slijedi da je $\tau(d_ip)=\tau(d_i)\tau(p)=2a_i$, za $i=1,2,...,s$. Prema tome, odgovarajući brojevi djelitelja od djelitelja (9) broja $m\cdot p$ su:

$$a_1=1,a_2,...,a_s,2a_2,...,2a_s.$$

Sada, ako koristimo jednakost (8), dobijamo

$$\begin{aligned}a_1^3+...+a_s^3+(2a_1)^3+...+(2a_s)^3 =&9(a_1^3+a_2^3+...+a_s^3)=9(a_1+a_2+...+a_s)^2\\ =&(3a_1+3a_2+...+3a_s)^2\\ =&(a_1+a_2+...+a_s+2a_1+2a_2+...+2a_s)^2,\end{aligned}$$

što znači da je u ovom slučaju jednakost (7) tačna.

Neka je sada $NZD(m,p)=p$. Onda je $m=m_1p^t$, za neko $t\geq 1$, $NZD(m_1,p)=1$, a $mp=m_1p^{t+1}$. Ako su $d_1=1$ $d_2,...,d_s=m_1$ djelitelji od m_1, gdje su a_i, respektivno, brojevi djelitelja brojeva d_i, $i=1,2,...,s$, budući da je $NZD(d_i,p)=1$, za $i=1,2,...s$, tada su djelitelji broja $m=m_1\cdot p^t$:

$$\begin{aligned}d_1=1,d_2,...,d_s\\ p\cdot d_1,p\cdot d_2,...,p\cdot d_s,\\ p^2\cdot d_1,p^2\cdot d_s,...,p^2\cdot d_s,\\ ....,\\ p^t\cdot d_1,p^t\cdot d_2,...,p^t\cdot d_s\end{aligned} \tag{10}$$

pa iz osobina funkcije $\tau(u)$ slijedi da su odgovarajući brojevi djelitelji djelitelja broja m:

$$\begin{aligned}&a_1,a_2,...,a_s,\\ &2a_1,2a_2,...,2a_s,\\ &3a_1,3a_2,...,3a_s,\\ &.................,\\ &(t+1)a_1,(t+1)a_2,...,(t+1)a_s.\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}a_i^3+\sum_{i=1}^{s}(2a_i)^3+...+\sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3 &=\left(\sum_{i=1}^{s}a_i+\sum_{i=1}^{s}2a_i+...+\sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2\\ &=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2\end{aligned} \tag{11}$$

Šta više, jednakost (11) je ekvivalentna jednakosti

$$(1^3+2^3+...+(t+1)^3)\sum_{i=1}^{s}a_i^3=(1+2+...+(t+1))^2\left(\sum_{i=1}^{s}a_i\right)^2$$

pa ako za $n = t + 1$ iskoristimo jednakost (4), dobijemo

$$\sum_{i=1}^{s} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2. \tag{12}$$

Nadalje, kao i gore zaključujemo da se djelitelji broja $mp = m_1p^{t+1}$ dobijaju ako brojevima (10) dodamo brojeve

$$p^{t+1}d_1, p^{t+1}d_2, ..., p^{t+1}d_s$$

za koje su, zbog osobina funkcije $\tau(u)$, odgovarajući brojevi djelitelji

$$(t+2)a_1, (t+2)a_2, ..., (t+2)a_s$$

Ako sada iskoristimo jednakosti (1), (11) i (12), dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} a_i^3 + ... + \sum_{i=1}^{s}((t+1)a_i)^3 + \sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{s}((t+2)a_i)^3 \\ &= \left(\frac{(t+1)(t+2)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 + (t+2)^3 \sum_{i=1}^{s} a_i^3 \\ &= \frac{(t+1)^2(t+2)^2 + 4(t+2)^3}{4} \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\ &= \left(\frac{(t+2)(t+3)}{2}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\ &= (1+2+...+(t+1)+(t+2))^2 \left(\sum_{i=1}^{s} a_i\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i + \sum_{i=1}^{s}(t+2)a_i\right)^2,\end{aligned}$$

što znači da je i u ovom slučaju tačna jednakost (7).

Konačano, po principu multipilkativne indukcije slijedi da jednakost (7) vrijedi za svaki prirodni broj n. $\square$

Literatura

[1] R. Malčeski: *Teorija na broevi*, Matematički talent, Skopje, 2022.
[2] T. Nagel: *Uvod na teorijata na čislata*, Nauka i izkustvo, Sofija, 1971.
[3] I. Niven and H.S. Zuckerman: *An introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.

Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА ЛУИВИЛ

1. ВОВЕД

Математиката, а особено теоријата на броеви изобилува со неочекувани обопштувања и интерснио резултати. Еден таков резултат е познатата теорема на францускиот математичар Жозеф Луивил (Joseph Liouville), која на извесен начин може да се смета за обопштување на позната формула за пресметување на збирот на третите степени на првите n природни броеви. Пред да ја разгледаме теоремата на Луивил, користејќи математичка индукција ќе докажеме неколку формули за пресметување на збирови на степени на природни броеви.

Лема 1. За секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2. \tag{3}$$

Доказ. Ќе го докажеме равенството (3).

За $n=1$ имаме: $1^3=1=[\frac{1(1+1)}{2}]^2$, т.е. равенството е точно.

Нека претпоставиме дека тоа е точна за $n=k$. За $n=k+1$ добиваме:

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3&=[\frac{k(k+1)}{2}]^2+(k+1)^3=(k+1)^2(\frac{k^2}{4}+k+1)\\&=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}]^2,\end{aligned}$$

т.е. и за $n=k+1$ равенството е точно.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството (3) е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

Равенствasa (1) и (2) се докажуваа аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Забелешка 1. Ако го искористиме равнството (1), тогаш равенството (3) може да се запише во видот

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2. \tag{4}$$

Последица 1. За секој $n \in \mathbb{N}$ точни се равенствата:

$$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3=2n^2(n+1)^2\,, \tag{5}$$

$$1^3+3^3+5^3+...+(2n-3)^3+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)\,. \tag{6}$$

Доказ. Од равенството (3) непосредно следува

$$\begin{aligned}2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3&=2^3\cdot 1^3+2^3\cdot 2^3+2^3\cdot 3^3+...+2^3\cdot n^3\\&=2^3(1^3+2^3+3^3+...+n^3)\\&=2^3\,\tfrac{n^2(n+1)^2}{2^2}=2n^2(n+1)^2,\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (5). Понатаму, од (3) и (5) добиваме

$$\begin{aligned}1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3&=1^3+2^3+...+(2n-1)^3+(2n)^3-(2^3+4^3+6^3+...(2n)^3)\\&=\tfrac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}-2n^2(n+1)^2=n^2((2n+1)^2-2(n+1)^2)\\&=n^2(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)=n^2(2n^2-1),\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (6). ■

2. МУЛТИПЛИКАТИВНА ИНДУКЦИЈА

Да забележиме дека ако на некој начин сме дошле до формулите (4) и (5), тогаш истите можеме да ги докажме со помош на математичка индукција. Меѓутоа, математичката индукција не е доволна за докажување на некои тврдења, па затоа се применуваат и други методи. Еден таков метод е таканаречената *мултипликативна индукција,* со која тврдењето:

Секој природен број n го има својството T .

го докажуваме во следниве четири чекори:

1) Докажуваме дека бројот 1 и сите прости броеви го имаат својството T .
2) Претпоставуваме дека природниот број m го има својството T .
3) Докажуваме дека за секој прост број p бројот mp го има својството T .
4) Заклучуваме дека секој природен број n го има својството T .

Пред да преминема на примена на погоре изложениот метод на мултипликативна индукција, ќе покажеме дека ваквиот начин на заклучување е коректен.

Во чекорот 1) докажавме дека сите прости броеви го имаат својството T . Нека p е прост број и нека за некој природен број k бројот m од чекор 2) е од видот $m=p^k$. Тогаш од чекор 3) следува дека бројот $mp=p^{k+1}$ исто така го има својството T . Оттука и од принципот на математичка индукција следува дека сите степени на простиот број p го имаат својството T .

Нека $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_{t-1}^{k_{t-1}}p_t^{k_t}$ е произволен природен број претставен со неговиот каноничен запис. Од претходните разгледувања следува дека бројот $p_1^{k_1}$ го има својството T. Ставаме $m = m_1 = p_1^{k_1}$ и $p = p_2$, па од 3) следува дека $mp = p_1^{k_1} p_2$ го има својството T. Сега повторно од 3) и принципот на математичка индукција добиваме дека бројот $m_2 = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ го има својството T. Ставаме $m = m_2$ и $p = p_3$, па од 3) следува дека бројот $mp = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3$ го има својството T. Сега повторно од 3) и принципот на математичка индукција добиваме дека бројот $m_3 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ го има својството T. Претходната постапка ја повторуваме $t-3$ пати и добиваме дека бројот $n = m_t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_{t-1}^{k_{t-1}} p_t^{k_t}$ го има својството T.

Конечно, од горните разгледувања следува дека доказите реализирани со правилна примена на мултипликативната индукција се коректни.

3. ТЕОРЕМА НА ЛУИВИЛ

Во овој дел користејќи ја мултипликативната индукција ќе ја докажеме теоремата на Луивил, која се однесува на бројот на делители на делителите на произволен природен број n.

Теорема 1. Ако $d_1 = 1, d_2, ..., d_k = n$ се сите позитивни делители на природниот број n, а a_i е соодветно бројот на делителите на бројот d_i, $i = 1, 2, ..., k$, тогаш

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_k^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 . \tag{7}$$

Доказ. За $n = 1$ имаме $d_1 = 1$ и $a_1 = 1$, па затоа $a_1^3 = 1 = a_1^2$, т.е. точно е равенството (7).

Нека p е произволен прост број. Тогаш единствени делители на бројот p се $d_1 = 1$ и $d_2 = p$, па затоа $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Сега, ако го искористиме равенството (4) добиваме

$$a_1^3 + a_2^3 = 1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = (a_1 + a_2)^2 ,$$

со што теоремата е докажана за сите прости броеви.

Нека претпоставиме дека теоремата важи за некој природен број m. Нека p е произволен прост број. Можни се два случаја,

а) $\text{NZD}(m, p) = 1$ и

б) $\text{NZD}(m, p) = p$,

кои ќе ги разгледаме одделно.

Нека $\text{NZD}(m, p) = 1$. Ако $d_1 = 1, d_2, ..., d_s = m$ се сите природни делители на бројот m, а a_i соодветно е бројот на делителите на бројот d_i, $i = 1, 2, ..., s$, тогаш

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_s^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_s)^2 , \tag{8}$$

а сите природни делители на бројот mp се:

$$d_1 = 1, d_2, ..., d_s = m, pd_1 = p, pd_2, ..., pd_s = pm \qquad (9)$$

Бидејќи $\text{NZD}(d_i, p) = 1$, за $i = 1, 2, ..., s$, од својствата на функцијата $\tau(u)$ (број на делители на природен број u), следува $\tau(d_i p) = \tau(d_i)\tau(p) = 2a_i$, за $i = 1, 2, ..., s$. Според тоа, соодветните броеви делители на делителите (9) на бројот mp се:

$$a_1 = 1, a_2, ..., a_s, 2a_1, 2a_2, ..., 2a_s .$$

Сега, ако го искористиме равенството (8) добиваме

$$\begin{aligned} a_1^3 + ... + a_s^3 + (2a_1)^3 + ... + (2a_s)^3 &= 9(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_s^3) \\ &= 9(a_1 + a_2 + ... + a_s)^2 \\ &= (3a_1 + 3a_2 + ... + 3a_s)^2 \\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_s + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_s)^2, \end{aligned}$$

што значи дека во овој случај равенството (7) е точно.

Нека $\text{NZD}(m, p) = p$. Тогаш $m = m_1 p^t$, за некој $t \geq 1$, $\text{NZD}(m_1, p) = 1$, а $mp = m_1 p^{t+1}$. Ако $d_1 = 1, d_2, ..., d_s = m_1$ се делителите на m_1, при што a_i е соодветно бројот на делителите на бројот d_i, $i = 1, 2, ..., s$, тогаш бидејќи $\text{NZD}(d_i, p) = 1$, за $i = 1, 2, ..., s$, делители на бројот $m = m_1 p^t$ се:

$$\begin{aligned} &d_1, d_2, ..., d_s, \\ &pd_1, pd_2, ..., pd_s, \\ &p^2 d_1, p^2 d_2, ..., p^2 d_s, \\ &.............................. \\ &p^t d_1, p^t d_2, ..., p^t d_s, \end{aligned} \qquad (10)$$

па од својствата на функцијата $\tau(u)$ следува дека соодветните броеви делители на делителите на бројот m се:

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, ..., a_s, \\ &2a_1, 2a_2, ..., 2a_s, \\ &3a_1, 3ad_2, ..., 3ad_s, \\ &........................... \\ &(t+1)a_1, (t+1)a_2, ..., (t+1)a_s, \end{aligned}$$

па затоа важи

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} a_i^3 + \sum_{i=1}^{s} (2a_i)^3 + ... + \sum_{i=1}^{s} ((t+1)a_s)^3 &= (\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{i=1}^{s} 2a_i + ... + \sum_{i=1}^{s} (t+1)a_i)^2 \\ &= (1 + 2 + ... + (t+1))^2 (\sum_{i=1}^{s} a_i)^2. \end{aligned} \qquad (11)$$

Уште повеќе, равенството (11) е еквивалентно со равенството

$$(1^3+2^3+...+(t+1)^3)\sum_{i=1}^{s}a_i^3=(1+2+...+(t+1))^2(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2.$$

па ако за $n=t+1$ го искористиме равенството (4), добиваме

$$\sum_{i=1}^{s}a_i^3=(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2. \qquad (12)$$

Понатаму, како и погоре заклучуваме дека делителите на бројот $mp=m_1p^{t+1}$ се добиваат ако на броевите (1) ги додадеме броевите

$$p^{t+1}d_1, p^{t+1}d_2,..., p^{t+1}d_s,$$

за кои заради својствата на функцијата $\tau(u)$ соодветните броеви делители се

$$(t+2)a_1,(t+2)a_2,...,(t+2)a_s.$$

Сега, ако ги искористиме равенствата (1), (11) и (12) добиваме:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}a_i^3+...+\sum_{i=1}^{s}((t+1)a_s)^3+\sum_{i=1}^{s}((t+2)a_s)^3&=(\sum_{i=1}^{s}a_i+\sum_{i=1}^{s}2a_i+...+\sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i)^2+\sum_{i=1}^{s}((t+2)a_s)^3\\
&=(\tfrac{(t+1)(t+2)}{2})^2(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2+(t+2)^3\sum_{i=1}^{s}a_i^3\\
&=\tfrac{(t+1)^2(t+2)^2}{4}(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2+(t+2)^3(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2\\
&=\tfrac{(t+1)^2(t+2)^2+4(t+2)^3}{4}(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2\\
&=(\tfrac{(t+2)(t+3)}{2})^2(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2\\
&=(1+2+...+(t+1)+(t+2))^2(\sum_{i=1}^{s}a_i)^2\\
&=(\sum_{i=1}^{s}a_i+\sum_{i=1}^{s}2a_i+...+\sum_{i=1}^{s}(t+1)a_i+\sum_{i=1}^{s}(t+2)a_i)^2,\end{aligned}$$

што значи дека и во овој случај равенството (7) е точно.

Конечно, од принципот на мултипликативната индукција следува дека равенството (7) важи за секој природен број n. ■

Литература

1. Niven, I., Zuckerman, H. S. *An introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
2. Дирихле, П. Г. Л. *Лекции по теория на числата*, Наука и изкуство, София, 1980
3. Малчески, Р. (2004). Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје
4. Нагел, Т. Увод во теорияата на числата, Наука и изкуство, София, 1971