Марија Попоска
Охрид

МЕТОД НА ПЛОШТИНИ

Геометриските задачи се карактеризираат со тоа што најчесто постојат повеќе начини за решавање на една иста задача. Притоа, многу од овие начини суштински се разликуваат, а често пати при докажување на некои тврдења или пак пресметување на елементи на некоја фигура се користиме со различните начини на пресметување на плоштината на таа фигура или на нејзини делови. Ваквата постапка во литературата е позната како *метод на плоштини*. Во натамошните разгледувања ќе покажеме како овој метод може да се искористи за решавање на некои задачи, односно за докажување на определени геометриски тврдења.

Задача 1. а) Докажи дека во произволен триаголник должините на било кои две висини се обратно пропорционални со должините на соодветните страни.

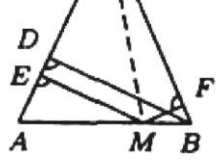
б) Докажи дека во произволен паралелограм должините на висините се обратно пропорционални со должините на соодветните страни.

Решение. а) Нека ABC е произволен триаголник, a и b се должините на две негови страни и h_a и h_b се должините на соодветните висини. Плоштината на триаголникот ABC е $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}$, од каде следува $a:b=h_b:h_a$, што и требаше да се докаже.

б) Нека $ABCD$ е произволен паралелограм, a и b се должините на неговите страни и h_a и h_b се должините на соодветните висини. Сега тврдењето следува од равенството $ah_a=bh_b$. ■

Задача 2. Докажи дека збирот на должините на нормалите повлечени од произволна точка M на основата AB на рамнокракиот триаголник ABC е константен.

Решение. Нека E и F се подножјата на нормалите повлечени од точката $M\in AB$ кон краците AC и BC, соодветно, а D е подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето B, цртеж десно. Тогаш, бидејќи $AC=BC$, последователно добиваме



$$P_{ABC} = P_{AMC} + P_{BMC}$$
$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC \cdot ME}{2} + \frac{BC \cdot MF}{2},$$
$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC \cdot ME}{2} + \frac{AC \cdot MF}{2},$$
$$ME + MF = BD,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Даден е правоаголен триаголник ABC со катети $a = 3cm$ и $b = 5cm$. Пресметај ги:

а) висината h_c,

б) радиусот r на впишаната кружница,

в) радиусот R на полукругот впишан во триаголникот ABC, чиј центар е на хипотенузата.

Решение. Прво, според Питагоровата теорема, за хипотенузата на триагоолникот добиваме

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,cm.$$

а) За плоштината на триаголникот имаме $\frac{ab}{2} = P = \frac{ch_c}{2}$, од каде следува

$$h_c = \frac{ab}{c} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4\,cm.$$

б) За плоштината на триаголникот добиваме $\frac{ab}{2} = P = \frac{a+b+c}{2} r$, од каде следува $r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3 \cdot 4}{3+4+5} = 1\,cm$.

в) Нека O е центарот на впишаната полукружница (цртеж десно). За плоштината на триаголникот ABC имаме

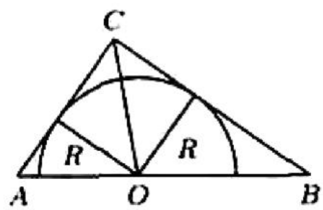
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOC} + P_{\triangle BCO},$$

па затоа

$$\frac{ab}{2} = \frac{bR}{2} + \frac{aR}{2},$$

т.е.

$$R = \frac{ab}{a+b} = \frac{3 \cdot 4}{3+4} = \frac{12}{7}\,cm. ■$$



Пример 4. Дијагоналите на еден ромб се $d_1 = 6\,cm$ и $d_2 = 8\,cm$. Определи ја должината на радиусот на впишаната кружница во тој ромб.

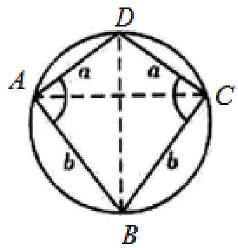
Решение. Со r да го означиме радиусот на впишаната кружница во дадениот ромб. Од Питагоровата теорема за должината на страната на ромбот добиваме (направи цртеж):

$$a=\sqrt{(\tfrac{d_1}{2})^2+(\tfrac{d_2}{2})^2}=\sqrt{(\tfrac{6}{2})^2+(\tfrac{8}{2})^2}=5\,cm.$$

Сега за плоштината на ромбот важи $\frac{d_1 d_2}{2}=4\frac{ar}{2}$, па затоа

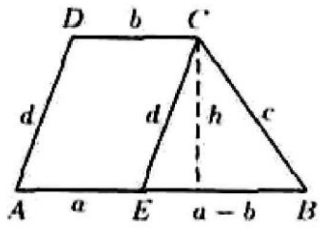
$$r=\frac{d_1 d_2}{4a}=\frac{6\cdot 8}{4\cdot 5}=2,4\,cm.\ \blacksquare$$

Задача 5. Во кружница со радиус $17\,cm$ е впишан делтоид кај кој едната страна е со должина $8\,cm$. Определи ги должините на дијагоналите на делтоидот.



Решение. Делтоидот $ABCD$ е тетивен и како дијагоналите кај делтоидот се заемно нормални заклучуваме дека BD е дијаметар на кружницата опишана околу него. Според тоа, едната дијагонала на делтоидот е $d_1=BD=17\,cm$. Понатаму, триаголниците DAB и DBC се правоаголни, па од Питагоровата теорема следува $b=\sqrt{17^2-8^2}=15\,cm$. Конечно, за плоштината на делтоидот добиваме $\frac{d_1 d_2}{2}=P=2\frac{ab}{2}=ab$, од каде следува $d_1=\frac{2ab}{d_2}=\frac{2\cdot 8\cdot 15}{17}=\frac{240}{17}\,cm.$ $\blacksquare$

Задача 6. Пресметај ја должината на висината на трапезот $ABCD$ со основи $a=105\,cm$, $b=25\,cm$, а краци $c=64\,cm$ и $d=48\,cm$.



Решение. Повлекуваме отсечка $CE \parallel AD$, цртеж десно. Тогаш должините на страните на триаголникот EBC се $CE=d=48\,cm$, $EB=a-b=80\,cm$ и $BC=c=64\,cm$. Според тоа, неговиот полупериметар е

$$s=\frac{48+80+64}{2}=96\,cm.$$

Сега, користејќи ја Хероновата формула за плоштината на $\triangle EBC$ добиваме

$$\begin{aligned}P_{\triangle EBC}&=\sqrt{s(s-CE)(S-EB)(s-BC)}\\&=\sqrt{96(96-48)(96-80)(96-64)}\\&=\sqrt{96\cdot 48\cdot 16\cdot 32}=1536\,cm^2.\end{aligned}$$

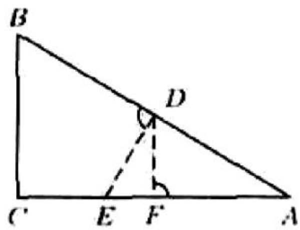
Од друга страна

$$P_{\triangle EBC} = \frac{a-b}{2}h,$$

па затоа

$$h = \frac{2P}{a-b} = \frac{2 \cdot 1536}{80} = 38,4\,cm. \ ■$$

Задача 7. Должината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на $40\,cm$. Од средината D на хипотенузата повлечена е нормала на хипотенузата која подолгата катета AC ја сече во точката E и $DE = 15\,cm$. Определи ги должините на катетатите на триаголникот ABC.



Решение. Триаголникот EAD е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\,cm.$$

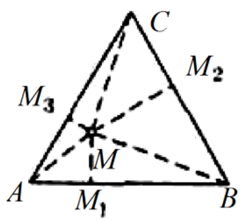
Понатаму, ако F е подножјето на нормалата повлечена од точката D на катетата AC, тогаш за плоштината на триаголникот EAD имаме $P_{\triangle EAD} = \frac{AE \cdot DF}{2} = \frac{AD \cdot DE}{2}$, па затоа $DF = \frac{AD \cdot DE}{AE} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12\,cm$. Но, DF е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $BC = 2DF = 24\,cm$. Конечно, од Питагоровата теорема следува

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32\,cm. \ ■$$

Задача 8. Нека M е точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC и M_1, M_2, M_3 се проекциите на точката M на страните на триаголникот. Докажи дека

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 = h. \tag{1}$$

каде h е висината на триаголникот.



Решение. За плоштината на триаголникот ABC добиваме

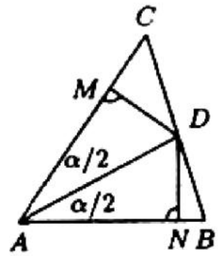
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BCM} + P_{\triangle CAM},$$

односно

$$\frac{ah}{2} = \frac{a \cdot MM_1}{2} + \frac{a \cdot MM_2}{2} + \frac{a \cdot MM_3}{2}.$$

каде a е должината на страната на триаголникот. Ако последното равенство го помножиме со $\frac{2}{a}$, го добиваме равенството (1). ■

Задача 9 (теорема за симетралата). Симетралата на внатрешниот агол во триаголникот ја дели спротивната страна на делови кои се пропорционални на другите две страни. Докажи!



Решение. Во триаголникот ABC нека симетралата на аголот α во темето A ја сече спротивната страна BC во точката D (цртеж десно). Од точката D повлекуваме нормали DM и DN на страните AC и AB, соодветно. Нека AA_1 е висината на триаголникот ABC. Тогаш за плоштината на триаголникот ACD имаме $\frac{CD\cdot AA_1}{2}=\frac{AC\cdot DM}{2}$, од каде добиваме

$$AC:CD=AA_1:DM. \tag{1}$$

На потполно ист начин, од тгриаголникот ABD, добиваме $\frac{BD\cdot AA_1}{2}=\frac{AB\cdot DN}{2}$, односно

$$BD:AB=DN:AA_1. \tag{2}$$

Понатаму, секоја точка на симетралата аголот е еднакво оддалечена од неговите краци, па затоа $DM=DN$. Сега, со замена во равенството (2) добиваме $BD:AB=DM:AA_1$, односно

$$AB:BD=AA_1:DM. \tag{3}$$

Конечно, од (1) и (3) следува

$$AC:CD=AB:BD,$$

т.е.

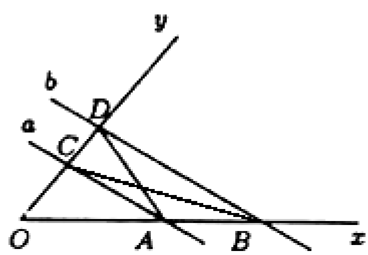
$$CD:BD=AC:AB,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 10 (Талесова теорема). Ако краците на произволен агол се пресечат со паралелни прави, тогаш добиените отсечки на едниот крак се пропорционални со соодветните отсечки на другиот крак, т.е.

$$OA:OB=OC:OD$$

(цртеж десно). Докажи!



Решение. Нека $P_1=P_{OAC}$, $P_2=P_{ABC}$ и $P_3=P_{ADC}$. Ако со d е растојанието меѓу правите a и b, тогаш $P_2=\frac{AC\cdot d}{2}$ и $P_3=\frac{AC\cdot d}{2}$, па затоа $P_2=P_3$. Според тоа,

$$P_1 : P_2 = P_1 : P_3. \tag{1}$$

Понатаму, ако h е растојанието од точката C до кракот Ox, а p е растојанието од точката A до кракот Oy, тогаш точни се равенствата

$$P_1 = \frac{OA \cdot h}{2}, P_2 = \frac{AB \cdot h}{2}, P_1 = \frac{OC \cdot p}{2}, P_3 = \frac{CD \cdot p}{2}. \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$(OA \cdot h):(AB \cdot h) = (OC \cdot p):(CD \cdot p),$$

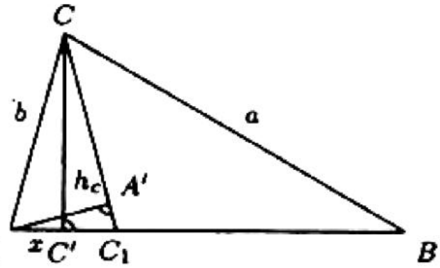
односно

$$OA : AB = OC : CD,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 11. Ако за триаголникот ABC важи $\alpha = 75^\circ$ и $h_c = \frac{c}{2}$, тогаш тој е рамнокрак триаголник. Докажи!

Решение. Нека C' е подножјето на висината повлечена од темето C (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle CAB = \alpha = 75^\circ$ и $CC' \perp AB$, важи $\measuredangle ACC' = 15^\circ$.



Нека C_1 е симетричната точка на точката A во однос на точката C'. Тогаш $\measuredangle ACC_1 = 30^\circ$. Нека A' е подножјето на нормалата повлечена од точката A на отсечката AC_1. Тогаш ACA' е половина од рамностран триаголник, па затоа $AA' = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$. Бидејќи $CC_1 = AC = b$ и $AA' = \frac{b}{2}$, добиваме дека

$$P_{\triangle AC_1C} = \frac{1}{2}CC_1 \cdot AA' = \frac{1}{2}b\frac{b}{2} = \frac{b^2}{4},$$

па затоа

$$P_{\triangle AC'C} = \frac{1}{2}P_{\triangle AC_1C} = \frac{b^2}{8}. \tag{1}$$

Нека $AC' = x$. Од Питагоровата теорема применета на правоаголните триаголници $AC'C$ и BCC' следува $h_c^2 = b^2 - x^2$ и $h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, па затоа $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, т.е. $2cx = b^2 + c^2 - a^2$ или

$$x = \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - x^2)$$

Понатаму, $P_{\triangle AC'C} = \frac{1}{2}xh_c$, па затоа

$$P_{\triangle AC'C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2c}(b^2+c^2-a^2)\cdot\frac{c}{2}=\frac{1}{8}(b^2+c^2-a^2)\,. \qquad (2)$$

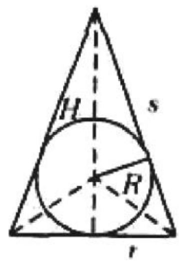
Сега од (1) и (2) следува $a^2=c^2$ и како $a>0, c>0$ добиваме $a=c$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак. ■

Во следните две задачи ќе се задржиме на примената на методот на плоштини при решавање на стереометриски задачи.

Задача 12. Во конус со радиус на основата $r=6cm$ и висина $H=8cm$ е впишана сфера. Определи го волуменот на оваа сфера?

Решение. За изводницата на конусот s добиваме

$$s=\sqrt{H^2+r^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,cm\,.$$



За плоштината на триаголникот во оскиниот пресек на конусот добиваме

$$P=\frac{2rH}{2}=rH \text{ и } P=\frac{2rR}{2}+2\cdot\frac{Rs}{2}=R(r+s)\,,$$

каде R е радиусот на сферата. (цртеж десно). Затоа

$$R(r+s)=rH\,, \text{ т.е. } R=\frac{6\cdot 8}{6+10}=3\,cm.$$

Конечно, за волуменот на сферата добиваме

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi\,cm^3\,. \blacksquare$$

Задача 13. Нека P е точка во внатрешноста на правилен тетраедар $ABCD$ со висина H и нека P_1, P_2, P_3, P_4 се подножјата на нормалите повлечени од точката P на ѕидовите на тетраедарот. Докажи дека важи

$$PP_1+PP_2+PP_3+PP_4=H\,. \qquad (1)$$

Решение. Аналогно како во задача 8 за волуменот на тетраедарот имаме

$$V_{ABCD}=V_{ABCP}+V_{BCDP}+V_{CDAP}+V_{DABP}\,,$$

од каде добиваме

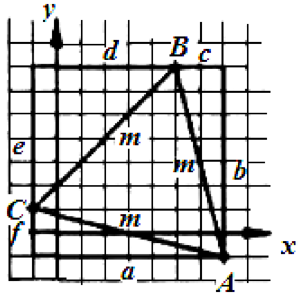
$$\frac{PP_1\cdot B}{3}+\frac{PP_2\cdot B}{3}+\frac{PP_3\cdot B}{3}+\frac{PP_4\cdot B}{3}=\frac{H\cdot B}{3}\,,$$

каде со B е означена плоштината на ѕидот на тетраедарот. Ако последното равенство го помножиме со $\frac{3}{B}$ го добиваме равенството (1). ■

Во следните две задачи ќе покажеме како методот на плоштини може да се примени во комбинаторната геометрија.

Задача 14. Докажи дека не постои рамностран триаголник чии темиња се во јазлите на целобројна решетка.

Решение. Нека претпоставиме дека постои таков триаголник ABC и да го разгледаме правоаголникот определен со неговите темиња како на цртежот десно. Тогаш за плоштината на триаголникот ABC добиваме



$$\frac{m^2\sqrt{3}}{4}=ab-\frac{af}{2}-\frac{cd}{2}-\frac{bc}{2},$$

и како $m^2=b^2+c^2$, следува

$$\sqrt{3}=\frac{2(2ab-af-bc-cd)}{b^2+c^2}. \qquad (1)$$

Но, a,b,c,d,e,f се природни броеви, па затоа десната страна на (1) е рацио

нален број, што е противречност бидејќи $\sqrt{3}$ е ирационален број. ■

Задача 15. Во рамнината е дадено множество од $n\,(n\geq 3)$ точки такви што сите не лежат на иста права. Докажи дека постои триаголник кој ги содржи дадените точки, а средините на неговите страни припаѓаат на даденото множество точки.

Решение. Нека од сите триаголници чии темиња се дадените точки триаголникот ABC има најголема плоштина. Сега низ точката A повлекуваме права паралелна со правата BC, низ точката B повлекуваме пртава паралелна со правата CA и низ точката C повлекуваме права паралелна со правата AB. Во пресекот на овие три прави ги добиваме точките A_1, B_1, C_1 кои соодветно се спротивни на точките A, B, C (направи цртеж). Бидејќи секоја од точките A, B, C е најоддалечена точка на даденото множество точки од правата определена со другите две точки, заклучуваме дека сите точки на дадено множество се наоѓаат во триаголникот $A_1B_1C_1$. Понатаму, триаголниците ABC, A_1CB, CB_1A, BAC_1 се складни (секој пар има по една заедничка страна и еднакви налегнати агли), па затоа

$$C_1B=BA_1=AC,$$
$$A_1C=CB_1=AB,\ ,$$
$$B_1A=AC_1=BC,$$

од што следува тврдењетѕо на задачата. ■

Задачи за самостојна работа

1. Нека за триаголникот ABC со страни $BC=a$ и $AC=b$ и висини h_a,h_b,h_c важи $h_a+h_b=h_c$. Докажи дека должината на третата страна е $c=\frac{ab}{a+b}$.

2. Нека h_a,h_b,h_c се висини на триаголник. Ако $(\frac{h_c}{h_a})^2+(\frac{h_c}{h_b})^2=1$, докажи дека триаголникот е правоаголен.

3. Во триаголник ABC со страна $AB=12\,cm$ и соодветна висина $h_c=9\,cm$ е впишан правоаголник $KLMN$ така што точките K и L припаѓаат на страната AB, точката M на страната BC и точката N на страната CA. Ако $MN=6\,cm$, определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

4. Збирот на должините на страните AB и AC на триаголникот ABC е еднаков на $7998\,cm$, а симетралата на внатрешниот $\measuredangle BAC$ ги дели спротивните страни во однос $1999:2000$.
   а) Колкава може да биде должината $a\,(a\in\mathbb{N})$ на страната BC?
   б) Ако триаголникот ABC е рамнокрак, колкав е неговиот периметар?

5. Нека P е произволна точка во внатрешноста на тетраедарот $ABCD$. Докажи дека
$$\frac{d_1}{H_1}+\frac{d_2}{H_2}+\frac{d_3}{H_3}+\frac{d_4}{H_4}=1,$$
каде d_1,d_2,d_3,d_4 се растојанијата од точката P до ѕидовите на тетраедарот, а H_1,H_2,H_3,H_4 се соодветните висини на тетраедарот.