IV олимпијада

1. Определи го најмалиот природен број n кој што ги има следниве својства:
а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,
б) ако цифрата на единиците се премести пред другите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n.
Решение. *I начин.* Бројот n можеме да го запишеме во облик $n=10A+6$. Тогаш $4n=6\cdot 10^m+A$, каде бројот A има m цифри. Од овие две равенки добиваме

$$A=\frac{2\cdot 10^m-8}{13}.$$

Сега бараме најмал број m за кој овој количникот е цел број. Лесно се гледа дека $m=5$, $A=15384$ и $n=153846$.
II начин. Од условот на задачата имаме

$$n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 6}, \qquad 4n=\overline{6a_m a_{m-1}...a_1},$$

односно

$$n=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+...+a_1\cdot 10+6$$

$$4n=6\cdot 10^m+a_m\cdot 10^{m-1}+a_{m-1}\cdot 10^{m-2}+...+a_1.$$

Бројот $4n$ завршува со 4, бидејќи $6\cdot 4=24$, па затоа $a_1=4$. Понатаму бројот $4n$ завршува со 84, бидејќи $4\cdot 46=184$, од што следува $a_2=8$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $n=153846$.

2. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Решение. За да изразот од левата страна на неравенката бидат дефиниран, треба да е исполнет условот $-1\le x\le 3$. Ако неравенката важи за некој $x\in\mathbb{R}$ тогаш $\sqrt{3-x}>\sqrt{x+1}$, од каде што добиваме $-1\le x<1$.
Неравенката ја запишуваме во облик

$$\sqrt{3-x}>\frac{1}{2}+\sqrt{x+1}.$$

Ако квадрираме, по средувањето на изразот добиваме

$$\frac{7}{4}-2x>\sqrt{x+1},$$

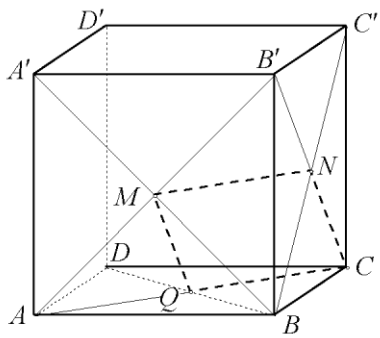
а со повторно квадрирање ја добиваме квадратната неравенка

$$4x^2-8x+\frac{33}{16}>0,$$

од каде што наоѓаме $x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ и $x>1+\frac{\sqrt{31}}{8}$. Ако се земат во предвид сите услови се добива $-1\le x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

3. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$, со горна и долна основа $ABCD$ и $A'B'C'D'$, соодветно и $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Точката X се движи со константна брзина по страните на квадратот $ABCD$ во насока $ABCDA$, а точката Y се движи со иста брзина по страните на квадратот $B'C'CB$ во насока $B'C'CBB'$. Точките X и Y почнуваат да се движат во ист момент при што X тргнува од A, а Y од B'. Најди го и нацртај го геометриското место на средините на отсечките XY.

Решение. *Прв начин.* Нека M, N, Q се центри на квадратите $ABB'A', BCC'B'$ и $ABCD,$ соодветно.



Да претпоставиме дека точката X се наоѓа на работ AB. Тогаш $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{B'Y} = \lambda\overrightarrow{B'C'},$ што значи

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \tfrac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'})$$
$$= \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{MN}.$$

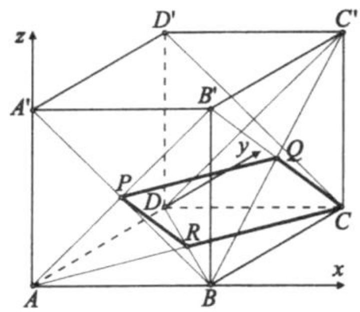
Според тоа, средината на отсечката XY се движи по отсечката $MN,$ додека X се движи по отсечката AB.

Нека точката X се движи по работ BC, т.е. нека $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC'} + \mu\overrightarrow{CC'} \text{ и } \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \overrightarrow{AN} + \tfrac{\mu}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AN} + \mu\overrightarrow{NC},$$

што значи дека средината на отсечката XY се движи по отсечката $NC,$ додека X се движи од B до C. Понатаму, на аналоген начин се докажува дека X се движи од C до Q и од Q до M. Бараното геометриско место на точки е четириаголникот $MNCQ$.

Втор начин. Коцката да ја поставиме во правоаголен координатен систем како на цртежот десно. Лесно се гледа дека бараното геометриско место од точки е ромбот $PQCR$, каде што точките P,Q и R се средините на ѕидовите $ABB'A''$, $BCC'B'$ и $ABCD$.



Нека a е должината на работ на коцката, а v е брзината на движењето на точките. Координатите на точката X при рамномерното движење по отсечката AB се дадени со $x = vt, y = 0, z = 0$, каде t се менува од 0 до $\frac{a}{v}$. Истовремено за координатите на точката Y што се движи по работ $B'C'$ се дадени со $x = a$, $y = vt$, $z = a$. Средината на отсечката XY во произволен момент t ги определува координатите на точките од отсечката PQ кои се определени со $(\frac{a+vt}{2}, \frac{vt}{2}, \frac{a}{2})$. Аналогно се наоѓаат координатите на точките на отсечката QC определени со $(\frac{a}{2}, \frac{a+vt}{2}, \frac{a-vt}{2})$, кординатите на точките на отсечката CR определени со $(a-\frac{vt}{2}, a-\frac{vt}{2}, 0)$ и координатите на точките на отсечката RP определени со $(\frac{a}{2}, \frac{a-vt}{2}, \frac{vt}{2})$. Притоа како почетен момент за пресметување на времето во секоја одделна етапа на двужење се зема моментот кога точките X и Y се наоѓаат во некое од темињата на коцката.

4. Реши ја равенката

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Со примена на формулите

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{и} \quad 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

дадената равенка ја сведуваме на еквивалентната равенка

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0,$$

и користејќи ја формулата $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, последователно добиваме

$$\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0,$$

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 0.$$

Решенијата на оваа равенка се

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ каде } k \in \mathbb{Z}.$$

5. На кружница k се дадени три точки A, B и C. Конструирај тоќка $D \in k$ така што четириаголник $ABCD$ е тангентен.

Решение. *Анализа.* Четириаголник $ABCD$ е тангентен ако и само ако

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

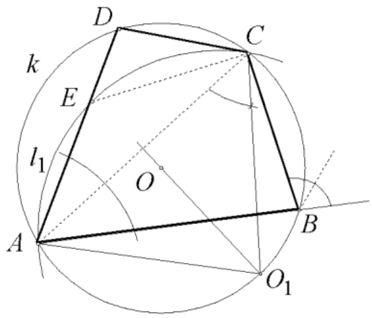
Нека $\overline{AB} \geq \overline{BC}$. Тогаш, $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{CD} \geq 0$. Сега задачата се сведува на конструкција на триаголник ACD со познати должината на страна AC, $\measuredangle CDA = \pi - \measuredangle ABC$ и растојанието $\overline{AD} - \overline{CD}$. Да претпоставиме дека задачата е решена. Ја нанесуваме точката E на страната AD така што $\overline{DE} = \overline{CD}$. Тогаш триаголникот ECD е рамнокрак и

$$\measuredangle DEC = \frac{1}{2}(\pi - \measuredangle CDA) = \frac{1}{2}\measuredangle ABC,\ \measuredangle CEA = \pi - \frac{1}{2}\measuredangle ABC.$$

Конструкција. Прво конструираме лак l_1 кој е од спротивната страна на правата AC во однос на точката B, таков отсечката AC се гледа под агол

$$\measuredangle CEA = \pi - \frac{1}{2}\measuredangle ABC.$$

Со центар во точката A опишуваме кружница со радиус $\overline{AB}-\overline{BC}$. Пресекот на лакот l_1 и оваа кружницата е точката E. Отсечката AE ја продолжуваме до пресекот со зададената кружница, со што го добиваме темето D.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Ако $\overline{AB}=\overline{BC}$, тогаш точката D лежи на симетралата на отсечката AC. Бидејќи $\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{CD}=\overline{AB}-\overline{BC}<\overline{AC}$, кружницата $k(A,\overline{AE})$ го сече лакот во точката E. Според тоа, задачата има единствено решение.

6. Даден е рамнокрак триаголник ABC, со радиуси на опишана и впишана кружница r и ρ, соодветно. Докажи дека растојанието d меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница е

$$d=\sqrt{r(r-2\rho)}. \qquad (1)$$

Решение. Ќе докажеме дека оваа формула важи за секој триаголник ABC. Нека O_1 и O се центри на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC, D е средната точка на лакот AB, кој не го содржи темето C. Секој од аглите $\measuredangle OAD$ и $\measuredangle DOA$ е еднаков на половината од збирот на аглите кај темињата A и C во триаголникот ABC. Според тоа $\overline{OD}=\overline{AD}$. Користејќи ја теоремата за степен на точка во однос на кружница за опишаната кружница и точката O добиваме

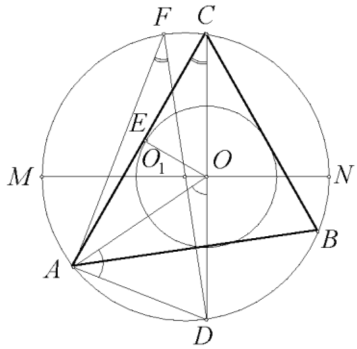
$$\overline{MO}\cdot\overline{ON}=\overline{CO}\cdot\overline{OD}.$$

Бидејќи $OE\perp AB$ и FD е дијаметар на опишаната кружница, триаголниците COE и FDA се слични, па според тоа

$$\overline{CO}:\overline{OE}=\overline{FD}:\overline{AD},$$

од каде што добиваме

$$\overline{CO}\cdot\overline{AD}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}.$$



Бидејќи $\overline{OD}=\overline{AD}$, добиваме

$$\overline{CO}\cdot\overline{OD}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}.$$

Конечно,

$$\overline{MO}\cdot\overline{ON}=\overline{OE}\cdot\overline{FD}.$$

Ако во ова равенство ставиме

$$\overline{MO}=r+d,\ \overline{ON}=r-d,\ \overline{OE}=\rho \text{ и } \overline{FD}=2r,$$

добиваме $r^2 - d^2 = 2r\rho$, што и требаше да докажеме.

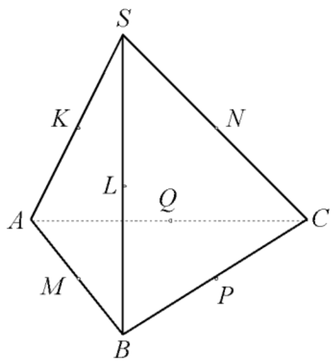
Забелешка. Формулата (1) во литературата е позната како Ојлењрова формула за растојанието меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголник.

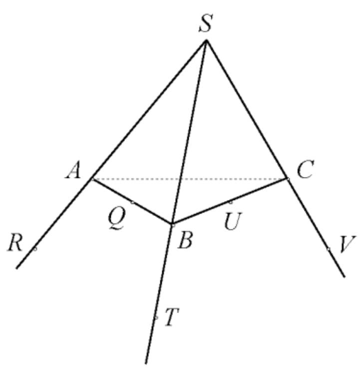
7. Докажи дека тетраедарот $SABC$ е правилен ако и само ако постојат пет различни сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA.

Решение. Да забележиме дека секоја сфера која ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA ја сече секоја од рамнините на триаголниците SAB, SBC, SCA, ABC во впишаната или припишаната кружница на тој триаголник. За секоја таква сфера од четирите добиени кружници три се припишани, а една е впишана или сите четири се впишани. За да го докажеме ова ќе разгледаме два случаи.

Нека сферата σ ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA, а рамнините на триаголниците SAB и SBC ги сече по впишаните кружници.

Нека K, L, M, N, P се допирните точки со рабовите SA, SB, AB, SC, BC, соодветно. Бидејќи припишаната кружница на триаголник има само една заедничка точка со триаголникот, сферата σ мора да ги сече рамнините на триаголниците SCA и ABC по впишаните кружници во тие триаголници. Нека Q е допирната точка на σ и AC. Од овде следува дека сите четири кружници се впишани, т.е. ако две кружници се впишани, тогаш и другите две се впишани.





Нека претпоставиме дека сферата τ ги допира сите прави SA, SB, SC, AB, BC, CA и дека ја сече рамнината на триаголникот SAB по припишаната кружница на триаголникот SAB. Таа има заедничка точка Q со работ AB, а со правите SA и SB заеднички точки R и T, соодветно. Бидејќи точката T не припаѓа на работ SB на тетраедарот, пресекот на сферата τ со рамнината на триаголникот SBC е припишаната кружница на тој триаголник. Таа ја допира отсечката BC во некоја точка U, а правата SC во некоја точка V. Од овде се гледа дека сферата ја сече рамнината на триаголникот ABC по впишана кружница, а рамнината на триаголникот SCA по опишана кружница. Значи, од четирите споменати кружници три се припишани, а една е впишана. Според тоа, ако некоја од кружниците е припишана, тогаш мора три од кружниците да се припишани, а една да е впишана.

Постојат најмногу пет сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA и тоа најмногу една за која сите пресеци на сферата со рамнините на страните на тетраедарот се впишани кружници во страните на тетраедарот и најмногу четири сфери кај кои три од пресечните кружници се припишани, а една е впишана.

Ако претпоставиме дека постојат сите пет сфери $(\sigma, \tau$ и останатите три) добиваме дека

$$\overline{SK} = \overline{SL} = \overline{SN},\ \overline{AK} = \overline{AM} = \overline{AQ},\ \overline{BM} = \overline{BL} = \overline{BP},\ \overline{CP} = \overline{CN} = \overline{CQ},$$

од што следува

$$\overline{SA} + \overline{BC} = \overline{SB} + \overline{CA} = \overline{SC} + \overline{AB},$$

бидејќи сферата σ постои. Аналогно добиваме

$$\overline{SA} - \overline{BC} = \overline{SB} - \overline{CA} = \overline{SC} - \overline{AB},$$

па според тоа

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} \text{ и } \overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB}.$$

Од претпоставката дека постои барем една од преостанатите три сфери, добиваме дека $\overline{SA} = \overline{AB}$, односно дека тетраедарот е правилен.

Останува да докажеме дека кај правилен тетраедар постојат сите пет сфери. Центарот на правилен тетраедар е на еднаква оддалеченост од секој негов раб, што значи дека сферата σ постои и нејзин центар е центарот на тетраедарот. Ако точките S, A, B, C се центри на хомотетија со коефициент 3, добиваме четири сфери кои се хомотетични слики на сферата σ. Секоја од нив ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC и CA.