Јожеф Б.Варга
Темерин, Србија

ДРУГ АГОЛ НА ГЛЕДАЊЕ

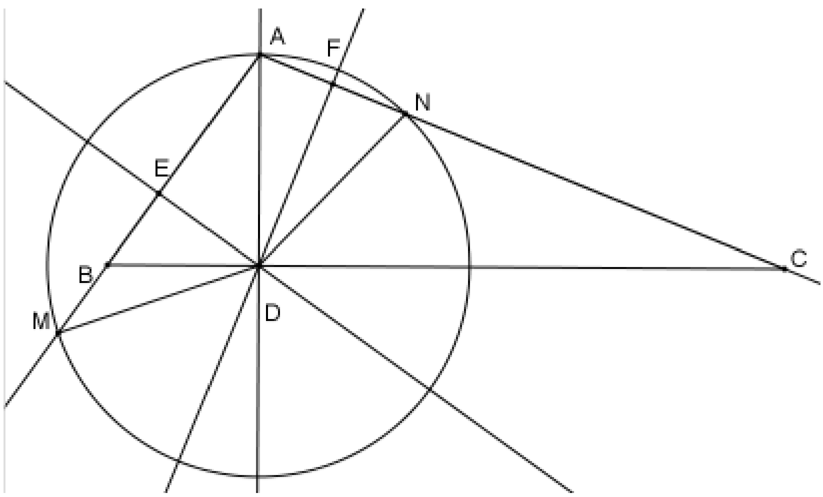
На почетокот да кажеме дека во оваа статија нема да стане збор за агли во математичка смисла, туку за начинот на гледање, кој во секојдневниот живот се нарекува агол на гледање. На часовите по математика често решаваме задача, која некој друг од одделението ја решава на некој друг начин. Во оваа статија е разгледана задача за која се дадени седум начини на решавање, повеќето од кои некои суштински се разликуваат.

Нека ABC е триаголник со тап агол во темето A и D е подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето A. Кружницата k со центар D, која минува низ A, ги сече правите AB и AC, редоследно во точките M и N. Докажи дека

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Решение. *Прв начин*. Нека E и F се подножјата на нормалите од точката D редоследно на правите AB и AC. Бидејќи $DM = DA = DN$ (радиуси на кружницата k), триаголниците ADM и ADN се рамнокраки, па точките E и F се средини на отсечките AM и AN. Триаголниците ABD и ADE се правоаголни со заеднички агол во темето A, па затоа тие се слични. Од сличноста следува $AB : AD = AD : AE$, т.е. $AB \cdot AE = AD^2$. Но $AM = 2AE$, па затоа

$$AB \cdot AM = 2AD^2.$$



На сличен начин се докажува дека

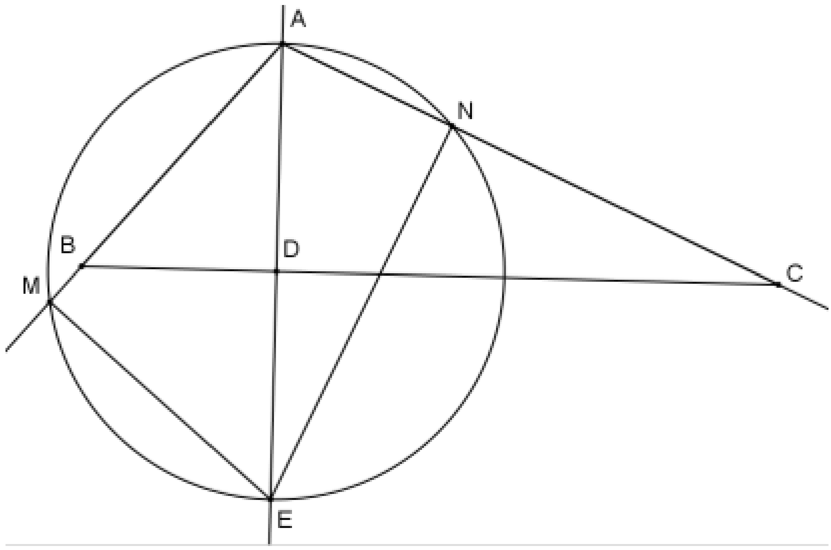
$$AC \cdot AN = 2AD^2.$$

Од последните две равенства следува дека

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Втор начин. Нека E е втората пресечна точка на правата AD и кружницата k. Триаголниците ABD и AEM се правоаголни со заеднички агол во темето A, па затоа се слични. Од оваа сличност следува $AB : AD = AE : AM$, односно

$$AB \cdot AM = AD \cdot AE.$$



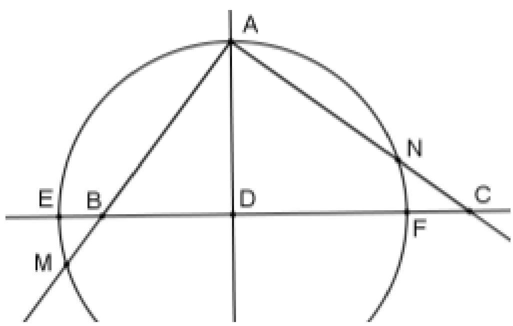
На сличен начин се докажува дека

$$AC \cdot AN = AD \cdot AE.$$

Од последните две равенства следува дека

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Трет начин. Нека E и F се пресечните точки на правата BC и кружницата k, при што E е на полуправата DB, а F на полуправата DC. Прво ќе го разгледаме случајот кога кружницата го сече продолжението на страната на триаголникот (види цртеж), кога точката B е меѓу точките A и M. Во овој случај важи $AM = AB + BM$ и $BF = EF - EB$.



Ако се искористи Питагоровата теорема за триаголникот ABD и степенот на точката B во однос на кружницата, добиваме

$$\begin{aligned} AB \cdot AM &= AB \cdot (AB + BM) = AB^2 + AB \cdot BM \\ &= AD^2 + BD^2 + AB \cdot BM = AD^2 + BD^2 + BF \cdot BE \\ &= AD^2 + (ED - BE)^2 + (EF - BE) \cdot BE \\ &= AD^2 + ED^2 - 2 \cdot ED \cdot BE + BE^2 + EF \cdot BE - BE \cdot BE \\ &= r^2 + r^2 + 2r \cdot BE + BE^2 - 2r \cdot BE - BE^2 \\ &= 2r^2 \end{aligned}$$

Сега да го разгледаме случајот кога кружницата ја сече страната на триаголникот (види цртеж), кога N е меѓу A и C. Имаме:

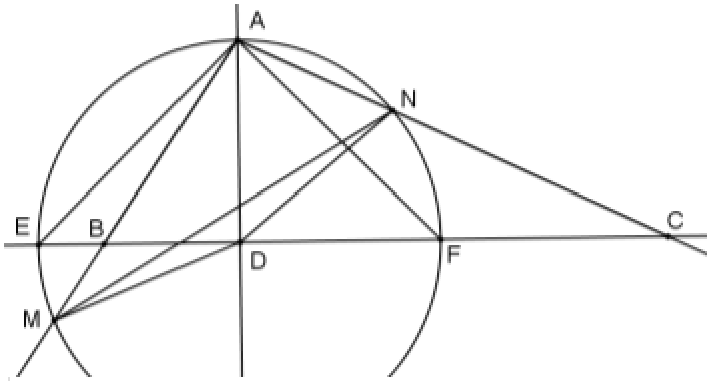
$$\begin{aligned} AC \cdot AN &= AC \cdot (AC - CN) = AC^2 - AC \cdot CN = AD^2 + CD^2 - CE \cdot CF \\ &= AD^2 + (CF + FD)^2 - (CF + FE) \cdot CF \\ &= AD^2 + CF^2 + 2 \cdot CF \cdot FD + FD^2 - CF \cdot CF - FE \cdot CF \\ &= r^2 + CF^2 + 2 \cdot CF \cdot r + r^2 - CF^2 - 2r \cdot CF \\ &= 2r^2. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$AB \cdot AM = 2r^2 = AC \cdot AN,$$

што и требаше да се докаже.

Четврт начин. Нека E и F се пресечните точки на правата BC и кружницата k, при што E е на полуправата DB, а F на полуправата DC. Прво ќе го разгледаме случајот кога кружницата го сече продолжението на страната на триаголникот, како на цртежот, кога точката B е меѓу точките A и M. Во тој случај $AM = AB + BM$ и $BF = EF - EB$.



Имаме:

$\measuredangle ANM = \frac{1}{2} \measuredangle ADM$ (перифериски и централен агол)

$\frac{1}{2} \measuredangle ADM = \frac{1}{2} \measuredangle ADE + \frac{1}{2} \measuredangle EDM$ (збир на соседни агли)

$\frac{1}{2} \measuredangle EDM = \measuredangle EAM$ (перифериски и централен агол)

$\measuredangle ANM = 45^\circ + \measuredangle EAM$

$\measuredangle ABC = \measuredangle AEB + \measuredangle EAB$ (надворешен агол на ΔABE)

$\measuredangle ABC = 45^\circ + \measuredangle EAM$ ($\measuredangle EAB$ е еднаков на $\measuredangle EAM$ и $\measuredangle AEB = 45^\circ$)

$\measuredangle ANM = \measuredangle ABC$

Ако кружницата ја сече страната на триаголникот, како на цртежот, кога N е меѓу A и C, слично имаме:

$$\measuredangle AMN = \frac{1}{2}\measuredangle ADN = \frac{1}{2}\measuredangle ADC - \frac{1}{2}\measuredangle NDC$$

$$= 45^\circ - \measuredangle NAF = \measuredangle AFD - \measuredangle NAF = \measuredangle ACB$$

Уште важи $\measuredangle BAC = \measuredangle MAN$. Од добиените равенства следува дека триаголниците ABC и ANM се слични, па е

$$AB : AC = AN : AM,$$

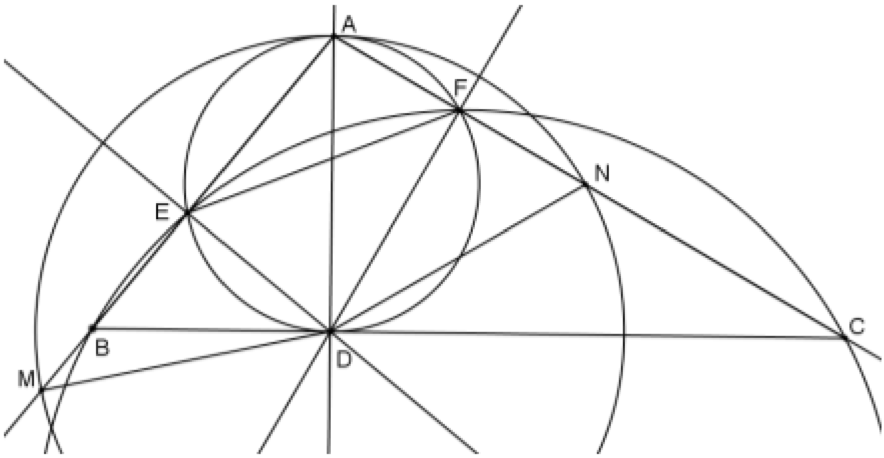
односно

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN,$$

што и требаше да се докаже.

Петти начин. Четириаголникот $AEDF$ е тетивен, бидејќи аглите во темињата E и F се прави. Затоа $\measuredangle DEF = \measuredangle DAF$. Но

$$\measuredangle DAF + \measuredangle DCF = 180^\circ - \measuredangle ADC = 90^\circ.$$



Според тоа,

$$\measuredangle BEF + \measuredangle BCF = \measuredangle BED + \measuredangle DEF + \measuredangle DCF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

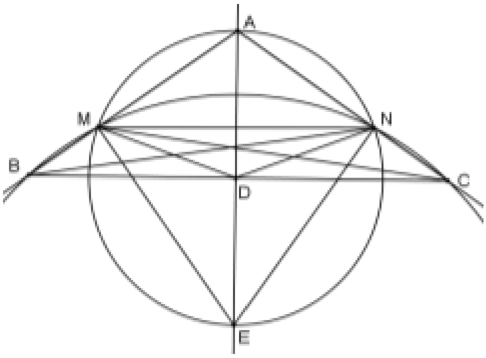
па значи четириаголникот $BCFE$ е тетивен, т.е. точките B, C, F и E лежат на една кружница. Производите $AB \cdot AE$ и $AC \cdot AF$ се степени на точката A на таа кружница, па затоа се еднакви. Но, како $AM = 2AE$ и $AN = 2AF$, добиваме

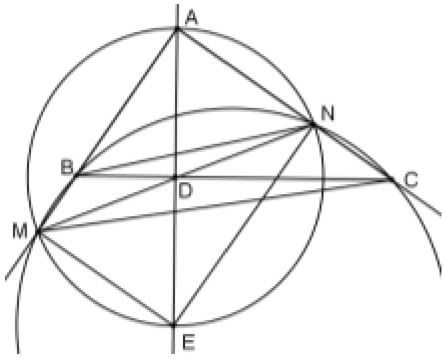
$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Шести начин. За ова решение ќе разликуваме три случаи:

1. Кружницата ги сече двете страни AB и AC на триаголникот.
2. Кружницата сече една од страните AB и AC.
3. Кружницата не сече ниту една од страните AB и AC.

Нека E е втората пресечна точка на правата AD и кружницата k. Четириаголникот $AMEN$ е тетивен бидејќи сите темиња се на кружницата k.





Во првиот случај можеме да претпоставиме дека кружницата не ја сече страната AB, а ја сече страната AC. Од тетивноста на четириаголникот $AMEN$ следува дека $\measuredangle EMN = \measuredangle EAN$, па е

$$\measuredangle NMA = 90^{\circ} - \measuredangle EMN = 90^{\circ} - \measuredangle EAN =. \measuredangle BCN.$$

Тоа значи дека отсечката BN од точките C и M се гледа дод ист агол, и како M и C се од иста страна на правата BN четириаголникот $BMCN$ е тетивен, т.е. точките B, M, C и N лежат на иста кружница. Производите $AB \cdot AM$ и $AC \cdot AN$ се степени на точката A на таа кружница, па затоа се еднакви, т.е.

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

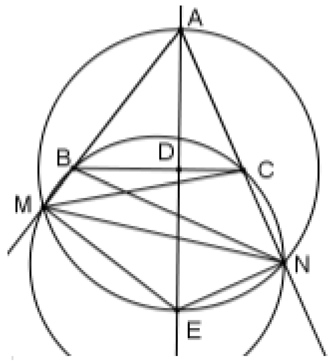
Во вториот случај исто имаме дека

$$\measuredangle EMN = \measuredangle EAN \text{ и } \measuredangle NMA = \measuredangle BCN.$$

Но, во овој случај $\measuredangle NMA$ е надворешен кај темето M, а $\measuredangle BCN$ е внатрешен кај темето C, кое е наспроти темето M. Тоа повторно значи дека четириаголникот $BMCN$ е тетивен, т.е.

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Да забележиме дека во претходните докази никаде не користевме дека $\measuredangle BAC$ е тап агол. Тоа значи дека тврдењето важи и за правоаголни и за остроаголни триаголници, како и за тапоаголен триаголник ABC, но тапиот агол е во темето A.



Да забележиме дека третиот случај од овој начин на решавање (кружницата не сече ниту една од страните *AB* и *AC*) важи само ако аголот во темето *A* е остар. Во овој случај важи $\measuredangle EMN = \measuredangle EAN$, но $\measuredangle NMA = \measuredangle BCA$, при што $\measuredangle BCA$ е надворешен агол кај темето *C*, а $\measuredangle NMA$ е внатрешен агол кај темето *M*, кое е наспроти темето *C*. Тоа повторно значи дека четириаголникот *BMCN* е тетивен, т.е.

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN.$$

Седми начин. Нека точките *E* и *F* на кружницата се такви што $ME \parallel BC$ и $NF \parallel BC$. Тетивите *AM* и *AE* се еднакви, бидејќи се симетрични во однос на правата *AD*, па затоа соодветните перифериски агли се еднакви, т.е. $\measuredangle ANM = \measuredangle AME$. Но, $\measuredangle AME = \measuredangle ABC$, па е $\measuredangle ANM = \measuredangle ABC$. Слично добиваме дека $\measuredangle AMN = \measuredangle ACB$. Оттука следува дека триаголниците *ABC* и *ANM* се слични, па затоа

$$AB : AC = AN : AM,$$

односно

$$AB \cdot AM = AC \cdot AN$$