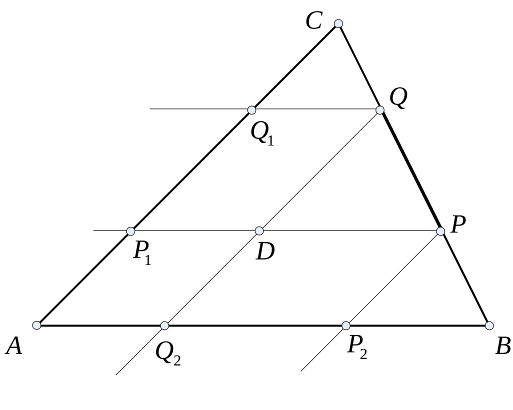
JMMO 2013

1. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

   Решение. Нека $a=x^3, b=x^2+x$. Тогаш
$$a=x^3+x^2-x^2-x+x=xb-b+x$$
   или
$$a=x(b+1)-b.$$
   Јасно, $b\neq -1$, бидејќи во спротивно
$$x^2+x=-1 \text{ т.е. } (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}=-1,$$
   што значи $0=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$, што е противречност. Според тоа, $x=\frac{a+b}{b+1}$ и како a и b се рационални броеви добиваме дека x е рационален број.

2. Даден е $\triangle ABC$ и отсечка PQ со должина t на отсечката BC, така што P е меѓу B и Q и Q е меѓу P и C. Од точката P се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во P_1 и P_2, соодветно. Од точката Q се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во Q_1 и Q_2, соодветно. Докажи дека збирот од плоштините на PQQ_1P_1 и PQQ_2P_2 не зависи од положбата на PQ на BC.



   Решение. Нека D е пресекот на PP_1 и QQ_2. Да забележеме дека
$$P_{PDQ_2P_2}=2P_{\triangle ADP} \text{ и}$$
$$P_{QDP_1Q_1}=2P_{\triangle ADQ}.$$
   Според тоа,
$$\begin{aligned} P_{PQQ_2P_2}+P_{PP_1Q_1Q} &= P_{PDQ_2P_2}+P_{QDP_1Q_1}+2P_{\Delta PQD} \\ &= 2P_{\triangle ADP}+2P_{\triangle ADQ}+2P_{\triangle PQD} \\ &= 2P_{\triangle APQ}=\overline{PQ}\cdot h_a, \end{aligned}$$

од што следува тврдењето на задачата.

3. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $(1-\sqrt{bc})^2\geq 0$ следува $1+bc\geq 2\sqrt{bc}$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{bc}}\geq\frac{1}{1+bc}$

Според тоа,

$$\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{1+a}\geq\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+a}=1.$$

На ист начин се докажува дека

$$\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{1}{1+b}\geq 1 \text{ и } \frac{\sqrt{c}}{2}+\frac{1}{1+c}\geq 1.$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако

$$1=\sqrt{bc},\ 1=\sqrt{ac} \text{ и } 1=\sqrt{ab},$$

т.е. ако и само ако $a=1$, $b=1$ и $c=1$.

4. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се m точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Ќе го определиме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120°. Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180°, бројот на делбени триаголници е:

$$\frac{m\cdot 360^0+6\cdot 120^0}{180^0}=2m+4.$$

Нека претпоставиме дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$. Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од $(2m+4)\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголникот е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$

5. Определи ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:
$$(p+q+r)^2=2p^2+2q^2+r^2.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$2r(p+q)=(p-q)^2.$$
Бидејќи r е прост, следува дека r е делител на $p-q$, па r^2 е делител на десната страна од последното равенство, од каде следува дека r е делител на $2(p+q)$. Ако $r>2$, тогаш r е делител на $p+q$, па мора r да е делител и на p и на q, но бидејќи p е прост, тоа е можно само ако $p=r$ и $q=sr$. По средување добиваме
$$2(1+s)=(s-1)^2,$$
од каде
$$s^2-4s-1=0.$$
Последното равенство нема целобројни решенија, па во овој случај равенката нема решение. Ако $r=2$, тогаш p и q се со иста парност, случајот кога $p=2$ не е можен исто како случајот $p=r$ од претходно, па мора да бидат непарни. Нека $a\neq 2$ е прост делител на $p+q$, тогаш мора a да е делител и на $p-q$, па мора да е делител и на p и на q, што е можно само ако $p=a$ и $q=sa$, во овој случај добиваме
$$4(1+s)=a(s-1)^2,$$
од каде
$$as^2-(2a+4)s+(a-4)=0.$$
Решенија на последната равенка се

$$\frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a}=\frac{a+2\pm2\sqrt{2a+1}}{a}.$$

Ако бројот $\sqrt{2a+1}$ е цел, тогаш е непарен, па $2a+1=4b^2+4b+1$, од каде $a=2b(b+1)$, па не може да е прост. Од досега изнесеното следува дека $p+q$ и $p-q$ мора да се степени на 2, т.е. $p-q=2^k$ и $p+q=2^{2k-2}$, од каде $2p=2^k+2^{2k-2}$ и $2q=2^{2k-2}-2^k$ и бидејќи p и q се непарни, мора $k=1$, но тогаш $p+q=1$, што не е можно. Следува дека равенката нема решенија кои се прости броеви.