Републички натпревар 1996

I година

1. Збирот на три цели броеви a,b,c е нула. Докажете дека $2a^4+2b^4+2c^4$ е квадрат на цел број.

Решение. Нека $a+b+c=0$. Тогаш

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4 &= a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2\\ &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab\\ &= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)\\ &= (a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4,\end{aligned}$$

од каде што следува

$$2a^4+2b^4+2c^4=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

2. Докажете дека ако

$$a_0^{a_1}=a_1^{a_2}=...=a_{1995}^{a_{1996}}=a_{1996}^{a_0},\ a_i\in\mathbb{R}^+,$$

тогаш $a_0=a_1=....=a_{1995}=a_{1996}$.

Решение. Нека $a_0\ge a_1$. За да важи $a_0^{a_1}=a_1^{a_2}$, мора $a_1\le a_2$, итн. Така се добива

$$\begin{aligned}&a_0\ge a_1 \Rightarrow a_1\le a_2 \Rightarrow a_2\ge a_3 \Rightarrow ...\Rightarrow a_{1995}\le a_{1996}\\ &\Rightarrow a_{1996}\ge a_0 \Rightarrow a_0\le a_1 \Rightarrow ...\Rightarrow a_{1996}\ge a_0\end{aligned}$$

т.е. $a_0=a_1=....=a_{1996}$.

Аналогно се добива и при претпоставка $a_0\le a_1$.

3. Нека h_a,h_b,h_c се висини на триаголник со страни a,b,c, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот. Докажете дека триаголникот е рамностран ако и само ако $h_a+h_b+h_c=9r$.

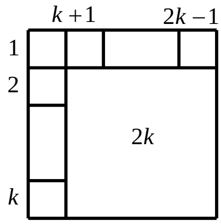
Решение.Од $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$, $r=\frac{2P}{a+b+c}$, добиваме

$$h_a+h_b+h_c=9r \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow$$

аритметичката средина е еднаква со хармониската ако и само ако $a=b=c$.

4. Докажете дека секој квадрат може да се расече на n, $(n\ge 6)$ квадрати, кои не мора да се складни.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Ако $n=2k$, ($k\geq 3$), постапуваме како на цртежот десно, при што страната на малиот квадрат е $\frac{a}{k}$. Ако $n=2k+1$, ($k\geq 3$), тогаш квадратот најпрво го делиме на $2k-2$ делови како во првиот случај, а потоа еден од квадратите го делиме на четири складни квадрати и вкупно добиваме



$$2k-2+3=2k+1=n$$

квадрати.

II година

1. Докажете дека за кои било позитивни реални броеви a и b важи неравенството

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритгметичка и геометриска средина за пет позитивни реал ни броеви имаме:

$$\begin{aligned}2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}&=\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\\&\geq 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}\\&=5\sqrt[5]{ab}.\end{aligned}$$

2. Во триаголник ABC точката M е средина на страната $\overline{BC}=a$. Нека r,r_1,r_2 се радиусите на кружинците впишани во триаголниците ABC, ABM и ACM соодветно. Докажете го неравенството

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\geq 2\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right).$$

Решение. Нека P,P_1,P_2 се плоштините на триаголниците ABC, ABM и ACM соодветно. Јасно е дека $P_1=P_2=\frac{P}{2}$. Од тоа што

$$P_1=r_1s_1=r_1\cdot\frac{\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{AM}}{2}=\frac{r_1}{2}(c+\frac{a}{2}+m)\,,$$

и

$$P_2=r_2s_2=r_2\cdot\frac{\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{AM}}{2}=\frac{r_2}{2}(m+\frac{a}{2}+b)\,,$$

имаме

$$P=r_1(c+\frac{a}{2}+m)=r_2(m+\frac{a}{2}+b)\,.$$

Така,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{c+\frac{a}{2}+m}{P}+\frac{m+\frac{a}{2}+b}{P}=\frac{a+b+c}{P}+\frac{2m}{P}=\frac{2}{r}+\frac{4m}{ah}\geq\frac{2}{r}+\frac{4}{a}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right).$$

3. Нека $A=\{z_1, z_2, ..., z_{1996}\}$ е множество од комплексни броеви и нека за секој $i \in \{1,2,3,....,1996\}$ е исполнето равенството

$$\{z_i z_1, z_i z_2, ..., z_i z_{1996}\} = A.$$

а) Докажете дека за секој i е исполнето $|z_i|=1$.

б) Докажете дека од $z \in A$ следува $\overline{z} \in A$.

Решение. а) Да претпоставиме дека за некое i важи $|z_i|>1$. Нека е тоа токму бројот со максимален модул. Тогаш $z_i^2 = z_i \overline{z_i} \in A$, па $|z_i^2|=|z_i|^2>|z_i|$, што противречи на максималноста на $|z_i|$.

Ако за некое i важи $0<|z_i|<1$, избирајќи го токму бројот со минимален модул, повторно добиваме прориврeчност $|z_i^2|=|z_i|^2<|z_i|$, со минималноста на $|z_i|$.

На крајот ако за некое i важи $|z_i|=0$, т.е. $z_i = 0$, па сите елементи од A би биле еднакви на нула, што е невозможно.

Следствено, за секој i е исполнето $|z_i|=1$.

б) Нека $z \in A$. Ги разгледуваме броевите $z, z^2, z^3, ...$ Според условот на задачата и овие елементи припаѓаат во A. Бидејќи A е конечно множество, за некои m и l мора да важи $z^m = z^l$, односно $z^k = 1$. Ако ставиме $z' = z^{k-1}$, добиваме $z'z = z^k = 1$, а од тука

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z},$$

бидејќи $|z|=1$, според а). Така $\overline{z} = z' \in A$.

4. Одредете ја најголемата вредност на разликата $x-y$ ако

$$2(x^2+y^2) = x+y. \qquad (1)$$

Решение.Нека $a = x-y$, односно $x = a+y$. Ако замениме во (1), добиваме

$$2(y+a)^2 + 2y^2 = a+2y,$$

односно

$$4y^2+2(2a-1)y+2a^2-a=0.$$

Последната равенка е задоволена и за $a = a_{\max}$. Таа има барем еден реален корен y ако и само ако

$$D = (2a-1)^2 - 4(2a^2-a) \geq 0,$$

односно

$$4a^2 - 1 \leq 0.$$

Ова е точно само ако $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Така $a_{\max} = \frac{1}{2}$.

III година

1. Решете ја равенката

$$x^{1996}-1996x^{1995}+....+1=0$$

(коефициентите пред $x, x^2,..., x^{1994}$ не се познати), ако се знае дека нејзините корени се позитивни реални броеви.

Решение. Нека $x_1, x_2,..., x_{1996}$ се решенија на дадената равенка. Од Виетовите формули е:

$$x_1+x_2+...+x_{1996}=1996$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{1996}=1.$$

Значи,

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{1996}}{1996}=1=\sqrt[1996]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{1996}},$$

т.е. аритметичката средина е еднаква на геометриската средина, па следува дека

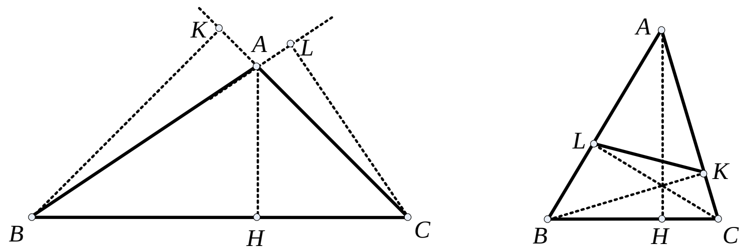
$$x_1=x_2=...=x_{1996}=1.$$

2. Нека AH, BK и CL се висини на произволен триаголник ABC. Докажете дека

$$\overline{AK}\cdot\overline{BL}\cdot\overline{CH}=\overline{AL}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CK}=\overline{HK}\cdot\overline{KL}\cdot\overline{LH}. \quad (1)$$

Решение. Нека аглите при темињата A, B, C на дадениот триаголник се α, β, γ соодветно. Тогаш

$$\overline{AK}=\overline{AB}\,|\cos\alpha|,\ \overline{AL}=\overline{AC}\,|\cos\alpha|,$$



(знакот за апсолутна вредност е за случај кога α е тап агол). Според тоа, триаголникот AKL е сличен со триаголникот ABC со коефициент на сличност $|\cos\alpha|$, па значи,

$$\overline{KL}=\overline{BC}\cdot|\cos\alpha|.$$

Ставајќи ги во равенствата (1) соодветните изрази за останатите отсечки, кои учествуваат во равенствата, се добива дека сите три разгледувани производи се еднакви на

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot|\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma|.$$

3. Дадена е тројката броеви $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Дозволен е премин на една тројка реални броеви во друга на следниот начин:кои било два броја од тројката се заменуваат со: нивниот збир поделен со $\sqrt{2}$, нивната разлика поделена со $\sqrt{2}$, а третиот останува ист. Дали е можно со такви постапки, по неколку чекори дадената тројка да премине во тројката $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

Решение. Трансформацијата

$$(x, y) \to (\tfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \tfrac{x-y}{\sqrt{2}}),$$

го запазува збирот на квадратите на парот броеви:

$$x^2 + y^2 = (\tfrac{x+y}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{x-y}{\sqrt{2}})^2.$$

Според тоа процедурата, дадена во задачата, ја запазува сумата од квадрати на дадената тројка. Па како е

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 = 6\tfrac{1}{2} \neq 6 + 2\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2,$$

не е можно да се премине од едната тројка во другата тројка.

4. Дадени се конечно многу точки во рамнината, такви што сите не припаѓаат на една права. На секоја точка и е придружен еден реален број. Збирот на броевите придружувани на точките што и припаѓаат на секоја права, која содржи барем две од дадените точки, е еднаков на нула. Докажете дека сите придружени броеви на дадените точки се еднакви на нула.

Решение. Нека на некоја точка X и е придружен број a_x. Да претпоставиме дека $a_x \neq 0$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_x > 0$. Низ X ги повлекуваме сите прави кои содржат барем уште една точка од дадените. Нека n_x е бројот на сите прави низ X, а S е збирот на сите броеви придружени на дадените точки. Бидејќи збирот на броевите придружени на точките кои што припаѓаат на права која содржи барем две од дадените точки е нула, следува дека збирот на броевие на сите n_x прави е нула. Оттука добиваме

$$n_x a_x + S - a_x = 0,$$

т.е.

$$(n_x - 1)a_x + S = 0. \qquad (1)$$

Бидејќи $a_x > 0$, постои точка Y различна од X, така што $a_y < 0$ (збирот на броевите од една права е еднаков на нула). И за точката Y како и за точката X, важи

$$(n_y - 1)a_y + S = 0 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$(n_x - 1)a_x = (n_y - 1)a_y. \qquad (3)$$

Бидејќи сите точки не припаѓаат на една права, следува дека $n_x > 1$ и $n_y > 1$. Левата страна во (3) е пзитивна а десната страна е негативна. Добиената контрадикција со претпоставката дека постои точка X на која и е придружен број различен од нула. Значи, сите придружени броеви на дадените точки се нула.

IV година

1. Иста како задача 3 од трети клас.

2. Иста како задача 4 од трети клас.

3. Дадени се реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ за кои важи $|a_j| < M$, $j = 1, 2, ..., n$ и $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$. Докажете дека

$$a_1 + 2a_2 + ... + na_n \leq \tfrac{n^2}{4} M .$$

Решение. Нека $S = a_1 + 2a_2 + ... + na_n$. Тогаш

$$S = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_2 + a_3 + ... + a_n) + ... + (a_{n-1} + a_n) + a_n .$$

Понатаму, $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$, а за $k \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ добиваме

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \leq \left|\sum_{j=k+1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=k+1}^{n} |a_j| \leq (n-k)M$$

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \leq \left|\sum_{j=k+1}^{n} a_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| \leq kM .$$

Па затоа

$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_n \leq \min\{(n-k)M, kM\} = \begin{cases} kM, & \text{за } k \leq \frac{n}{2} \\ (n-k)M, & \text{за } k > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно n е непарен број.

i) Ако $n = 2l$, тогаш

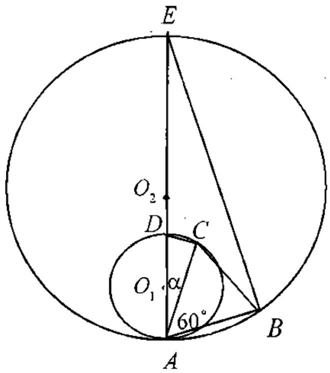
$$S \leq M + ... + (l-1)M + lM + (l-1)M + ... + M = 2\tfrac{l(l-1)}{2} M + lM = l^2 M = \tfrac{n^2}{4} M .$$

ii) Ако $n = 2l + 1$, тогаш

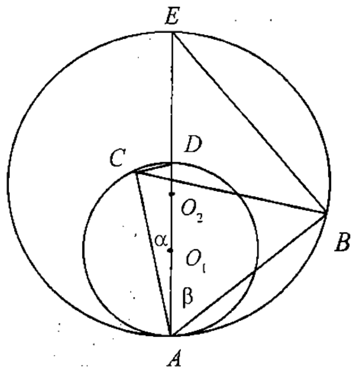
$$S \leq 2(M + 2M + ... + lM) = l(l+1)M = \tfrac{n^2-1}{4} M < \tfrac{n^2}{4} M .$$

4. Две кружници со радиуси R и r, $r < R$ се допираат од внатрешната страна. Најдете ја страната на рамностраниот триаголник ако се знае дека едно негово теме е допирната точка на кружниците, а другите две темиња лежат на кружниците, по едно на секоја.

Решение. Бидејќи кружниците се допираат, допирната точка и нивните центри лежат на една иста права. Имаме $\measuredangle ACD = \measuredangle ABE = 90^\circ$.Ќе разгледаме два случаи:



црт. 1



црт. 2

i) Бараниот триаголник ABC е на една страна од дијаметарот (цртеж 1).

Имаме, $\overline{AD} = 2r$, $\overline{AE} = 2R$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{a}{2R} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$, $\frac{a}{2r} = \cos\alpha$. Значи,

$$\frac{a}{2R} = \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2r} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4r^2}}\ ,\ 0 < \alpha < 90^\circ .$$

Бидејќи, $2r < R$ добиваме $\frac{a}{4r} - \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$, односно

$$a = rR\sqrt{\frac{3}{R^2 - Rr + r^2}} . \qquad (1)$$

ii) Бараниот триаголник ABC е поделен од дијаметарот (цртеж 2). Сега $\alpha + \beta = 60^\circ$, $\frac{a}{2R} = \cos\beta$, $\frac{a}{2r} = \cos\alpha$. Значи,

$$\frac{a}{2R} = \cos(\tfrac{\pi}{3} - \alpha) = \tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2r} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4r^2}}\ ,\ 0 < \alpha < 90^\circ .$$

Од $2r > R$ го добиваме (1).