Сојузен натпревар 1967

II година

1. Даден е триномот о $(k+1)x^2-2kx+k-1$, каде k е реален параметар.

а) Определи го геометриското место на темињата на сите параболи зададени со равенката

$$y=(k+1)x^2-2kx+k-1.$$

б) Дали сите овие параболи имаат заедничка точка?

в) Докажи дека само едно решение на равенката

$$(k+1)x^2-2kx+k-1=0 \quad (1)$$

е променливо и истото прикажи го графички.

г) Определи за кој природен број k променливото решение на равенката (1) е периодичен децимален број со една цифра во периодата.

Решение. а) Темето на параболата

$$y=(k+1)x^2-2kx+k-1, \text{ н } k\neq -1$$

има координати

$$x=1-\tfrac{1}{k+1},\ y=-\tfrac{1}{k+1}.$$

Геометриското место на темињата на овие параболи е множеството $\{(x,y)\,|\,y=x-1, x\neq 1\}$.

б) Секоја од параболите на дадената фамилија ја содржи точката (1,0), цртеж десно.

в) Решенијата на равенката (1) се $x_1=1$ и $x_2=\frac{k-1}{k+1}$.

г) Бараните броеви се 2, 5, 8 и 17.

2. Даден е триномот $9n^2+3n-2$, каде n е цел број.

а) Докажи дека за ниту еден n овој трином не е делив со 9.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу цели броеви n за кои дадениот трином е делив со 4.

Решение. Нека $f(n)=9n^2+3n-2$.

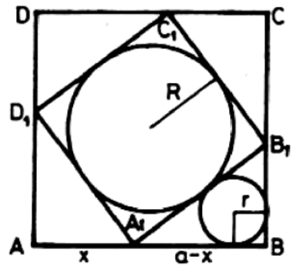
а) За секој цел број n важи $f(n)\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, од каде што следува дека бројот и $f(n)$ не е делив со 9 за ниту еден цел број м n.

б) Важи

$$f(4k)\equiv -2(\mathrm{mod}\,4),\ f(4k+1)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),\ f(4k+2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\ f(4k+3)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4).$$

Според тоа, бројот $f(n)$ е делив со 4 ако и само ако остатокот при делењето на бројот n со 4 е еднаков на 2 или 3.

3. Даден е квадрат Q со страна a во кој е впишан квадрат Q_1 чии темиња припаѓаат на страните на квадратот Q. Во квадратот Q_1 и во секој од четирите добиени триаголници се впишани кругови. Определи ја положбата на темињата на впишаниот квадрат Q_1 така што збирот на плоштините на сите впишани кругови и минимален.



Решение. Нека $ABCD$ е дадениот квадрат и $A_1B_1C_1D_1$ е впишаниот квадрат, при што точките A_1, B_1, C_1, D_1 припаѓаат соодветно на страните AB, BC, CD, DA. Со R и r да ги означиме радиусите на впишаните кружници во квадратот $A_1B_1C_1D_1$ и триаголникот A_1BB_1 (цртеж десно). Тогаш $A_1B_1 = 2R$ и $A_1B + BB_1 = a$, па бидејќи триаголникот A_1BB_1 е правоаголен (со прав агол во темето B), добиваме $a - 2r = 2R$. Збирот на плоштините на впишаните кругови е

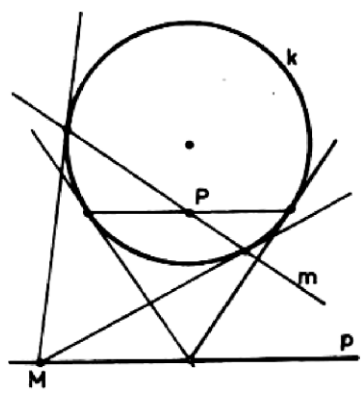
$$\pi R^2 + 4\pi r^2 = (\tfrac{a}{2} - r)^2\pi + 4\pi r^2 = (5r^2 - ar + \tfrac{a^2}{4})\pi = (5(r - \tfrac{a}{10})^2 + \tfrac{a^2}{5})\pi,$$

и има минимална вредност за $r = \frac{a}{10}$. Да означиме $AA_1 = x, BA_1 = y$. За $r = \frac{a}{10}$ добиваме $R = \frac{2a}{5}$ и

$$x + y = a,\ x^2 + y^2 = 4R^2 = \tfrac{16}{25}a^2,$$

од каде лесно се добива $x = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{10})a$ или $x = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{10})a$.

4. Дадена е непроѕирна сфера и рамнина α која со сферата нема заеднички точки. Во точка M на рамнината α се наоѓа светлосен извор кој ја осветлува сферата. Докажи дека рамнината која го одделува осветлениот од неосветлениот дел од сферата минува низ точка P која не зависи од положбата на точката M.



Решение. Нека β е рамнината која ги содржи центарот на дадената сфера и точката M на рамнината α, а е нормална на рамнината α. Со p да го означиме пресекот на рамнините α и β, а со k пресекот на дадената сфера и рамнината β. Нека P е полот на правата p во однос на кружницата k и m е поларата на точката M во однос на истата кружница (цртеж десно). Тогаш правата m ги содржи точките во кои тангентите од M на кружницата k ја допираат таа кружница, а како $M \in p$, добиваме дека $P \in m$. Рамнината која ја содржи правата m (па според тоа и точката P), а е нормална на рамнината β, го одделува осветлениот од неосветлениот дел на сферата ако изворот на светлина е во точката M. Точката P е пол на рамнината α во однос на дадената сфера, а ја содржат сите опишани рамнини.

III година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{5x+1}-2\sqrt{4-x}+\sqrt{5}\sqrt{x+2}=\sqrt{61-4x}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10}=\sqrt{61-4x}+\sqrt{16-4x},$$

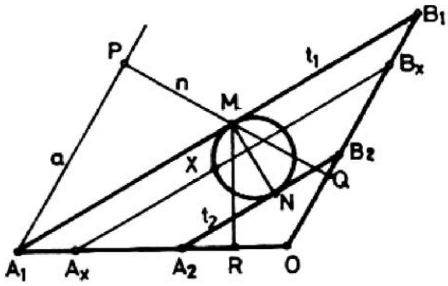
при што сите изрази се дефинирани за $-\frac{1}{5} \le x \le 4$. Да означиме

$$f(x)=\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10},\ g(x)=\sqrt{61-4x}+\sqrt{16-4x}.$$

Тогаш $f(3)=g(3)=9$. За $-\frac{1}{5} \le x < 3$ важи $f(x)<f(3)=g(3)<g(x)$, а за $3<x\le 4$ важи $f(x)>f(3)=g(3)>g(x)$. Според тоа, $x=3$ е единствено решение на равенката.

2. Во внатрешноста на даден агол со теме O се наоѓа кружница, која нема заеднички точки со краците на аголот. На кружницата определи точки M и N такви што збирот на растојанијата од точката M до краците на аголот е најголем можен, а збирот на растојанијата од точката N до краците на аголот е најмал можен.

Решение. Нека s симетралата на внатрешниот агол, а t_1 и t_2 се тангентите на дадената кружница кои се нормални на правата s. Нека се A_1, B_1 и M (односно A_2, B_2 и N) се соодветно пресечните точки на тангентата t_1 (односно t_2) со краците на дадениот агол и допирната точка со дадената кружница. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката A_2 припаѓа на отсечката OA_1, а точката B_2 на отсечката OB_1. Нека a е правата која ја содржи точката A_1 и е паралелна на OB_1, а P,Q,R се редоследно подножјата на нормалите од точката M на правитѕе a, OB_1, OA_1. Бидејќи $a \parallel OB_1$, заклучуваме дека точките P,M,Q се колинеарни., а отсечката PQ е еднаква на висината повлечена од темето A_1 во триаголникот A_1OB_1 (цртеж десно). Триаголниците



A_1RM и A_1PM се складни, бидејќи $\measuredangle PA_1M = \measuredangle A_1B_1O = \measuredangle RA_1M$, $A_1M = A_1M$ и $\measuredangle A_1PM = \measuredangle A_1RM = 90^\circ$. Затоа $MP = MR$, па добиваме

$$MR + MQ = MP + MQ = PQ.$$

Нека $X \neq M$ е произволна точка на дадената кружница, а A_x и B_x се редоследно пресеците на правата која минува низ X и е паралелна со t_1 со правите OA_1 и OB_1. Аналогно како погоре докажуваме дека збирот на растојанијата од точката X до краците OA_1 и OB_1 е еднаков на висината од темето A_x во триаголникот A_xOB_x. Бидејќи X е внатрешна точка на триаголникот A_1OB_1, заклучуваме дека точката A_x припаѓа на отсечката OA_1, па затоа $OA_1 > OA_x$, а како триаголниците A_1OB_1 и A_xOB_x се слични (имаат по две паралелни страни и налегнатите агли се еднакви), заклучуваме дека и висината од темето A_1 на триаголникот A_1OB_1 е поголема од висината од темето A_x на триаголникот A_xOB_x. Со тоа е докажано дека од сите точки на дадената кружница точката M има најголем збир на растојанијата до краците на дадениот агол. На сличен начин се докажува дека кај точката N тој збир е минимален.

3. Реши ја неравенката

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x + 2\cos^2 x \geq 2(1+\sqrt{3}\cos^2 x).$$

Решение. Користејќи ја формулата $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ дадената неравенка ја запишуваме во видот

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x \geq 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)\cos 2x. \tag{1}$$

Нека $t = \cos 2x$. Ако x е решение на дадената неравенска, тогаш $\sin 2x \geq 0$, па затоа $\sin 2x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$(1+\sqrt{3})\sqrt{1-t^2} \geq 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)t. \tag{2}$$

Неравенката (2) може да ја квадрираме бидејќи двете нејзини страни се ненегативни, со што ја добиваме неравенката $(2t+1)t \leq 0$, чие решение е множеството $[-\frac{1}{2}, 0]$. Множеството решенија на неравенката (1) е

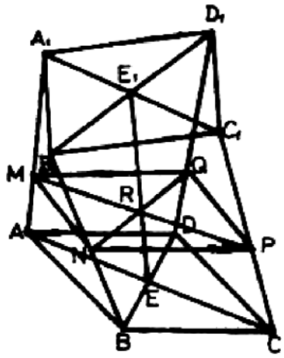
$$S = \{x \mid -\tfrac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 0, \sin 2x \geq 0\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [\tfrac{\pi}{4} + k\pi, \tfrac{\pi}{3} + k\pi].$$

4. Нека $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ се два паралелограми кои припаѓаат на непаралелни рамнини. Точките M, N, P, Q соодветно ги делат отсечките AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 во ист однос.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ паралелограм.

б) Определи го геометриското место на средините на сите паралелограми $MNPQ$ кои се добиваат кога точката M минува по отсечката AA_1.

Решение. а) Нека O е произволна точка и нека $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OA_1}$, каде $0 \le \lambda \le 1$. Тогаш (цртеж десно):



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB_1} - \lambda\overrightarrow{OA} - (1-\lambda)\overrightarrow{OA_1}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1})$$
$$= \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1},$$
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC_1} - \lambda\overrightarrow{OD} - (1-\lambda)\overrightarrow{OD_1}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) + (1-\lambda)(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1})$$
$$= \lambda\overrightarrow{DC} + (1-\lambda)\overrightarrow{D_1C_1}$$
$$= \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1}.$$

Според тоа, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, т.е. $MNPQ$ е паралелограм.

б) Нека E, E_1, R се центрите на паралелограмите $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $MNPQ$, соодветно. Тогаш

$$\overrightarrow{OR} = \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$
$$= \tfrac{\lambda}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \tfrac{1-\lambda}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1})$$
$$= \lambda\overrightarrow{OE} + (1-\lambda)\overrightarrow{OE_1}.$$

Ако $0 \le \lambda \le 1$, тогаш точката R припаѓа на отсечката EE_1. Обратно, нека X е произволна точка од отсечката EE_1 и нека

$$\overrightarrow{OX} = \mu\overrightarrow{OE} + (1-\mu)\overrightarrow{OE_1}.$$

Понатаму, нека M_1, N_1, P_1, Q_1 се редоследно точки на отсечките AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кои ги делат овие отсечки во ист однос во кој точката X ја дели отсечката EE_1. Тогаш $M_1N_1P_1Q_1$ е паралелограм чија средна точка е точката X.

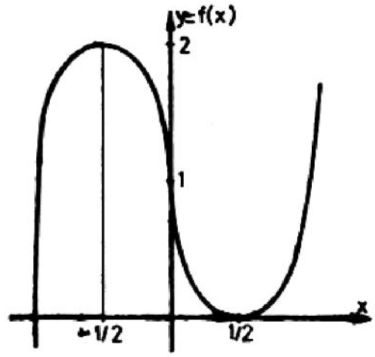
Значи, бараното геометриско место е отсечката EE_1.

IV година

1. а) Определи го множеството точки во кои функција од фамилијата определена со формулата $f(x) = \frac{4x^3}{p^2} - 3x + p$, каде $p \ne 0$, достигнува локален максимум и множеството точки во кои фукција од оваа фамилија достигнува локален минимум. Нацртај го графикот на функцијата која се добива за $p = 1$ и определи ги точките на пресек на тој график со $x-$оската.

б) Прикажи го $\cos 3t$ како функција од $\cos t$ и со смената $x=\cos t$ определи ги нулите на функцијата $f(x)=4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Функцијата $f(x)=\frac{4x^3}{p^2}-3x+p$, каде $p\neq 0$, во точката $-\frac{p}{2}$ има локален максимум еднаков на $2p$, а во точката $\frac{p}{2}$ има локален минимум еднаков на 0. Множеството точки на максимуми е $\{(x,y)\,|\,y=-4x,\ x\neq 0\}$, а множеството точки на минимуми е $\{(x,0)\,|\,x\neq 0\}$.



Графикот на функцијата $f(x)=4x^3-3x+1$ е прикажан на цртежот десно.

б) Бидејќи $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$, со смената $x=\cos t$ добиваме

$$f(x)=f(\cos t)=4\cos^3 t-3\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 3t+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Множеството решенија на равенката $\cos 3t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ е

$$S=\{\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{5\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\bigcup_{j=1}^{6}\{t_j+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\},$$

каде $t_1=\frac{\pi}{4}, t_2=\frac{5\pi}{12}, t_3=\frac{11\pi}{12}, t_4=\frac{13\pi}{12}, t_5=\frac{19\pi}{12}, t_6=\frac{21\pi}{12}$. Лесно се проверува дека $\cos t_1=\cos t_6, \cos t_2=\cos t_5, \cos t_3=\cos t_4$. Според тоа, равенката $4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ има три решенија: $x_1=\cos\frac{\pi}{4}, x_2=\cos\frac{5\pi}{12}, x_3=\cos\frac{11\pi}{12}$.

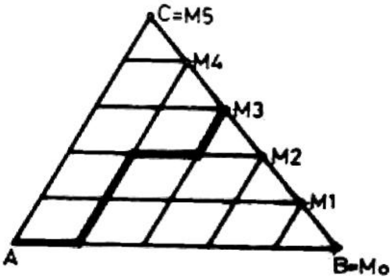
2. Страната BC на триаголникот ABC со точките $M_0=B, M_1, M_2, ..., M_{n-1}$, $M_n=C$ е поделена на n делови и од овие точки до страните AB и AC се конструирани отсечки паралелни со страните AC и AB соодветно.

а) На колку различни начини од точката A може да се стигне по добиената мрежа до точката M_k $(k=0,1,2,...,n)$, ако движењето е дозволено во насока на векторот $\overrightarrow{AB}$ и во насока на векторот $\overrightarrow{AC}$.

б) Определи го бројот на погоре опишаните патишта кои водат од точката A до сите точки $M_0, M_1, ..., M_n$.

в) Ако точките $M_0, M_1, ..., M_n$ се еквидистантни, определи го збирот на должините на сите патишта AM_k.

Решение. а) Патот до точката M_k се состои од k отсечки паралелни со правата AC и $n-k$ отсечки паралелни со правата AB (види цртеж).



Оттука следува дека бараниот број е еднаков на $\binom{n}{k}$.

б) Од а) следува дека бараниот број е:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n.$$

в) Должината на сите патишта е еднаква на

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(k\frac{AB}{n}+(n-k)\frac{AC}{n}\right)=AB\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+AC\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$
$$=2^{n-1}(AB+AC).$$

3. Ако n е природен број, а реалниот број $2^n x$ не е еднаков на цел број пати π, докажи дека

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

Решение. Да забележиме дека

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha},$$

ако $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Ставајќи во равенството $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}$ наместо α редоследно $x,2x,2^2x,...,2^{n-1}x$, при што $x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ и собирајќи ги добиените равенства, наоѓаме

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x.$$

4. Иста како 4-та задача за III година.

Мала олимпијада

1. Реши ја равенката $\log(ax+b)=2\log(x+1)$, каде a и b се реални параметри.

Решение. Прво $\log(ax+b)$ и $\log(x|+1)$ се определени за $ax+b>0$ и $x+1>0$ и дискриминантата на равенката $(x+1)^2=ax+b$ е еднаква на $D=a^2-4a+4b$. Според тоа, $x_1=\frac{a-2-\sqrt{D}}{2}$ е решение на дадената равенка ако

$$D\geq 0, \sqrt{D}<a, a\sqrt{D}<a^2-2a+2b,$$

$x_2=\frac{a-2+\sqrt{D}}{2}$ е решение на дадената равенка ако

$$D\geq 0, \sqrt{D}>-a, a\sqrt{D}>2a-a^2-2b.$$

Лесно се докажува дека запишаните услови можеме да ги изразиме во попогоден облик, т.е.

- x_1 е решение ако $D \geq 0, a > b, a > 0$,
- x_2 е решение ако $D \geq 0$ и важи $a > 0$ или $b > a$.

2. Ако a, b, c се страните на триаголникот и α, β, γ се соодветните агли изразени во радијани, докажи дека

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Неравенството $a \geq b$ е еквивалентно со неравенството $\alpha \geq \beta$, па затоа важи $(a-b)(\alpha-\beta) \geq 0$. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $a = b$. Слично, $(b-c)(\beta-\gamma) \geq 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0$. Затоа

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0. \qquad (1)$$

Ако искористиме дека $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, добиваме дека неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}
&a(2\alpha-\beta-\gamma)+b(2\beta-\alpha-\gamma)+c(2\gamma-\alpha-\beta) \geq 0,\\
&a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi) \geq 0,\\
&3(a\alpha+b\beta+c\gamma) \geq \pi(a+b+c),\\
&\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Од очигледното неравенство

$$(b+c-a)\alpha+\beta(c+a-b)+\gamma(a+b-c) > 0,$$

ако искористиме дека $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ со еквивалентни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}
&a(\beta+\gamma-\alpha)+b(\alpha+\gamma-\beta)+c(\alpha+\beta-\gamma) > 0,\\
&a(\pi-2\alpha)+b(\pi-2\beta)+c(\pi-2\gamma) > 0,\\
&2(a\alpha+b\beta+c\gamma) < \pi(a+b+c),\\
&\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Ако P и R се точки во кои спротивните страни AB и CD на просторниот четириаголник $ABCD$ сечат произволна рамнина π_1 паралелна со другите две спротивни страни, а Q и S се точките во кои страните BC и AD на тој четириаголник сечат произволна рамнина π_2 паралелна со другите две страни, докажи дека точките P, Q, R, S припаѓаат на иста рамнина.

Решение. Нека O е произволна точка. Бидејќи точките P и R припаѓаат на рамнина на која се паралелни правите AD и BC, добиваме дека овие точки ги делат отсечките AB и DC во ист однос, т.е. постои реален број λ таков што важи

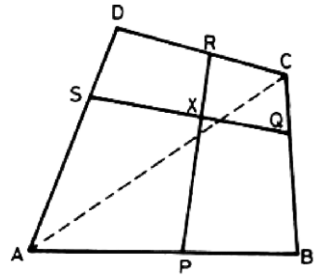
$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OD}+(1-\lambda)\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Аналогно добиваме дека постои број μ таков што

$$\overrightarrow{OS}=\mu\overrightarrow{OA}+(1-\mu)\overrightarrow{OD},\quad \overrightarrow{OQ}=\mu\overrightarrow{OB}+(1-\mu)\overrightarrow{OC}. \quad (2)$$

Нека X е точка на отсечката PR и Y е точка на отсечката QS определени со условите

$$\overrightarrow{OX}=\lambda\overrightarrow{OS}+(1-\lambda)\overrightarrow{OQ},\quad \overrightarrow{OY}=\mu\overrightarrow{OP}+(1-\mu)\overrightarrow{OR}. \quad (3)$$



(цртеж десно). Тогаш од равенствата (1), (2) и (3) следува

$$\overrightarrow{OX}=\lambda\mu\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\mu\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{OC}+\lambda(1-\mu)\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OY}.$$

Според тоа, $X\equiv Y$, правите PR и QS се сечат, а точките P,Q,R,S припаѓаат на иста рамнина.

4. Во просторот се дадени точките A,B,C,D,E такви што важи

$$AB=BC=CD=DE=EA,\ \measuredangle ABC=\measuredangle BCD=\measuredangle CDE=\measuredangle DEA=\measuredangle EAB.$$

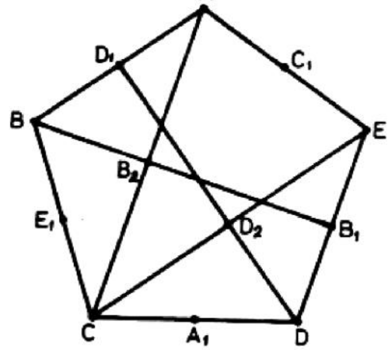
Докажи дека точките A,B,C,D,E припаѓаат на една рамнина.

Решение. Од условот на задачата следува дека триаголниците ABC, BCD, CDE, DEA и EAB се складни, па затоа дијагоналите AC,BD,CE,DA,EB на петаголникот $ABCDE$ се еднакви. Нека $f(A)=B,\ f(B)=A,\ f(C)=E$ и $f(D)=D$. Тогаш f е изометрички го пресликува множеството $\{A,B,C,D\}$ на множеството $\{A,B,E,D\}$ и еднозначно може да се продолжи до изометрија на целиот простор. Таа изометрија е едно од следниве две пресликувања:

1) Симетрија во однос на рамнина π која ја содржи средината D_1 на отсечката AB и е нормална на правата AB. Во овој случај точките C и E се заемно симетрични во однос на рамнината π. Затоа $AB\,||\,CE$, па следува дека точките A,B,C,E припаѓаат на една рамнина.

2) Симетрија во однос на правата DD_1. Во овој случај средината D_2 на отсечката CE припаѓа на правата DD_1, па точките C,D,E,D_1,D_2 припаѓаат на една рамнина.

Аналогно можеме да заклучуваме тргнувајќи од множествата $\{B,C,D,E\}$, $\{C,D,E,A\}$, $\{D,E,A,B\}$ или $\{E,A,B,C\}$ наместо од множеството $\{A,B,C,D\}$. Ако барем два од паровите C и E, D и A, E и B, A и C, B и D се симетрични во однос на рамнините кои се дефинираат аналогно на дефиницијата на рамнината π, тогаш од дадените пет точки можеме да избереме барем две четворки компланарни точки, па



следува дека и сите дадени точки се компланарни.

Во спротивно, средините на барем четири од дијагоналите CE, DA, EB, AC, BD припаѓаат по ред на правите $DD_1, EE_1, AA_1, BB_1, CC_1$, каде A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 се по ред средините на отсечките CD, DE, EA, AB, BC. Барем две од овие четири дијагонали тргнуваат од исто теме на петаголникот $ABCDE$. Нека, на пример, тоа се дијагоналите CE и CA, т.е. нека средините D_2 и B_2 на дијагоналите CE и CA припаѓаат по ред на правите DD_1 и BB_1. Тогаш компланарни се точките C, D, E, B_1, D_1, D_2. Истото тоа важи и за точките A, B, C, D_1, B_1, B_2. Според тоа, рамнината определена со точките B_1, C, D_1 ја содржи секоја од точките A, B, C, D, E.

5. Докажи дека условите

(A) $c \neq 0, \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$,

(B) $a > 0, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

се еквивалентни.

Решение. Нека $c \neq 0, \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$. Тогаш

$$a+b = a+b+2c+2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \text{ т.е. } c = -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}.$$

Затоа $c < 0$, $a \geq -c > 0, b \geq -c > 0$ и притоа важи

$$\begin{aligned} &c^2 = (a+c)(b+c), \\ &ab+bc+ca = 0, \\ &\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c} = 0. \end{aligned}$$

Нека $a > 0, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Тогаш $c < 0$ и $ab+bc+ca = 0$, од каде следува $c^2 = (a+c)(b+c)$. Но, $c < 0$, па од последното равенство следува равенството $c = -\sqrt{(a+c)(b+c)}$. Броевите $a+c$ и $b+c$ се со ист знак. Ако $a+c < 0$ и $b+c < 0$, тогаш $c < -a < 0$ и $c < -b < 0$, па следува

$$|c+a| < |c|, \ |b+c| < |c| \text{ и } (a+c)(b+c) < c^2,$$

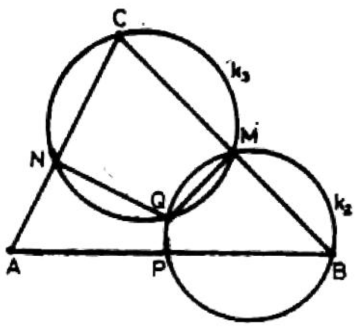
што е противречност. Затоа $a+c > 0, b+c > 0$, па добиваме

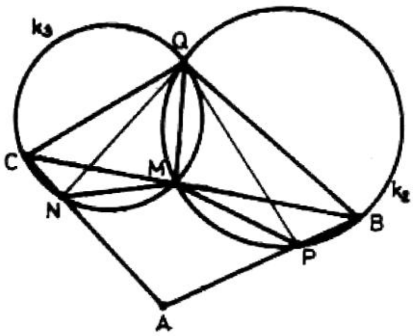
$$\begin{aligned} &c = -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ &a+b = a+b+2c+2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ &a+b = (\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})^2, \\ &\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}. \end{aligned}$$

6. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точките M, N, P различни од темињата. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците ANP, BPM, CMN имаат заедничка точка.

Решение. Нека k_1, k_2, k_3 се редоследно кружниците опишани околу триаголниците ANP, BPM, CMN . Ќе ги разгледаме следниве случаи.

а) Кружниците k_2 и k_3 имаат две заеднички точки M и Q и точката Q се наоѓа во внатрешноста на триаголникот ABC (цртеж долу лево). Тогаш





$$\measuredangle NAP + \measuredangle NQP = 180^\circ - \measuredangle NCM - \measuredangle PBM + 360^\circ - \measuredangle MQN - \measuredangle PQM$$
$$= 540^\circ - (\measuredangle NCM + \measuredangle MQN) - (\measuredangle PBM + \measuredangle PQM)$$
$$= 540^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

па следува дека Q припаѓа на кружницата k_1.

б) Кружниците k_2 и k_3 имаат две заеднички точки M и Q и точките A и Q се наоѓаат на различни страни од правата BC (цртеж десно горе). Тогаш

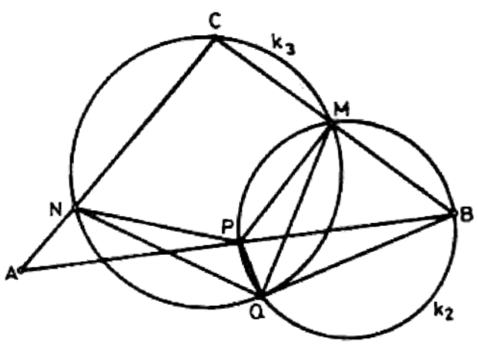
$$\measuredangle NAP + \measuredangle NQP = \measuredangle NAP + \measuredangle NQM + \measuredangle MQP = \measuredangle NAP + \measuredangle NCM + \measuredangle MBP = 180^\circ,$$

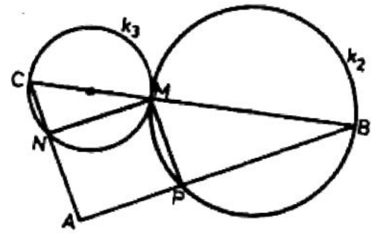
па следува дека Q припаѓа на кружницата k_1.

в) Кружниците k_2 и k_3 имаат заедничка точка Q надвор од триаголникот ABC, но на иста страна на правата BC на која е точката A (цртеж лево долу). Тогаш

$$\measuredangle ANQ = 180^\circ - \measuredangle CNQ = \measuredangle CMQ = 180^\circ - \measuredangle QMB = 180^\circ - \measuredangle QPB = \measuredangle APQ,$$

па точките A, Q, P, N припаѓаат на иста кружница.





г) Кружниците k_2 и k_3 се допираат во точка M (цртеж горе десно). Тогаш центрите на кружниците k_2 и k_3 се на правата BC, па затоа

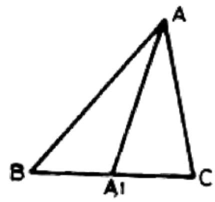
$$\measuredangle CNM = \measuredangle MPB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle NAP + \measuredangle NMP = 360^\circ - \measuredangle MNA - \measuredangle MPA = 180^\circ,$$

од каде следува дека точката M припаѓа на кружницата k_1.

д) Случајот кога кружниците k_2 и k_3 имаат заеднички точки M и Q, при што $Q = P$ или $Q = N$ е едноставен и го препушптаме на читателот за вежба.

7. Определи триаголник со минимален периметар чии што должини на страни се цели броеви, а една тежишна линија е еднаква на соодветната страна.

Решение. Нека A_1 е средина на страната BC на триаголникот ABC (цртеж десно) и нека a,b,c се природни броеви такви што $BC = AA_1 = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Тогаш



$$b^2 = \tfrac{5a^2}{4} - a^2 \cos\measuredangle AA_1C,$$
$$c^2 = \tfrac{5a^2}{4} + a^2 \cos\measuredangle AA_1C,$$

од каде следува $\frac{5a^2}{4} - b^2 = c^2 - \frac{5a^2}{4}$, т.е. $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Од последното равенство следува дека a е парен број. Лесно се проверува дека за $a \in \{2,4,6,8,12,14\}$ равенката $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ нема решение во множеството природни броеви за кое важи $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$. За $a = 10$ единствено решение за кое важат наведените услови е $a = 10, \{b,c\} = \{9,13\}$. Периметарот на соодветниот триаголник е 32. Ако за природните броеви a,b,c кои може да бидат должини на страни на триаголники важи $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ и $a \ge 16$, тогаш $a + b + c > a + a \ge 32$. Според тоа, должините на страните на бараниот триаголник се 9, 10 и 13.

8. Ако е $a_k \ge 0$ за $k = 1,2,...,n$ и $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, докажи дека

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \le 1 + S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n.$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n = 1$ неравенството го прима обликот $1 + a_1 \le 1 + a_1$ и очигледно и точно.

Нека претпоставиме дека за некоју природен број n важи

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \le 1 + S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n \tag{1}$$

Од биномната формула следува дека за ненегативни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ и за секој природен број $k \in \{1,2,...,n\}$ важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1})^k \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)^k + k(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{k-1}a_{n+1},$$

од каде следува

$$\frac{S_{n+1}^k}{k!} \geq \frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!} a_{n+1}, \qquad (2)$$

каде $S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}$. Од биномната формула исто така следува

$$\frac{S_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(S_n + a_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{(n+1)S_n^n a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{S_n^n}{n!} a_{n+1}. \qquad (3)$$

Сега, од индуктивната претпоставка (1) и неравенствата (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\leq (1+S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n)(1+a_{n+1}) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!} a_{n+1}\right) + \frac{S_n^n}{n!} a_{n+1} \\ &\leq 1 + S_{n+1} + \tfrac{1}{2!} S_{n+1}^2 + ... + \tfrac{1}{(n+1)!} S_{n+1}^{n+1}\end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

9. Дадени се броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ секој од кои е еднаков или на 1 или на -1 и такви што $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 = 0$. Докажи дека бројот n е делив со 4.

Решение. Од $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 = 0$ и како секој од броевите $x_1x_2, x_2x_3, ...,$ x_nx_1 е еднаков на 1 или -1, заклучуваме дека меѓу броевите има еднаков број позитивни и негативни броеви. Затоа $n = 2k$, каде k е природен број. Да забележиме дека меѓу броевите $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_nx_1$ има толку негативни броеви колку што во низата $x_1, x_2, ..., x_n, x_1$ има членови со различен предзнак од претхгодниот член. Бидејќи во оваа низа првиот и последниот член се еднакви на x_1, заклучуваме дека бројот на промените на знакот е парен. Според тоа, постои природен број l таков што важи $k = 2l$, па затоа $n = 4l$.

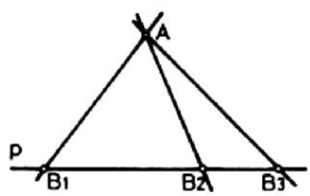
10. Во рамнината се дадени милион прави такви што

а) Никои две од дадените прави не се паралелни.

б) Пресекот на произволни две од дадените прави припаѓа барем на уште една од тие прави.

Докажи дека сите прави се сечат во една точка.

Решение. Нека претпоставиме дека не постои точка која припаѓа на секоја од дадените прави. Нека A е пресечна точка и p е дадена права за кои важи:



а) точката A не припаѓа на правата p,

б) растојанието од точката A до правата p е минимално.

Според условот на задачата точката A припаѓа на барем три од дадените прави. Нека тие прави ја сечат правата p во точките B_1, B_2, B_3 и нека е, на пример, точката B_2 меѓу точките B_1 и B_3 (види цртеж). Јасно, барем еден од аглите $\measuredangle AB_2B_1$ и $\measuredangle AB_2B_3$ не е остар. Нека, на пример, $\measuredangle AB_2B_3 > 90^\circ$. Тогаш во триаголникот AB_2B_3 важи $AB_3 > B_2B_3$, па затоа $d(B_2, AB_3) < d(A, B_2B_3)$, што е противречност. ($d(X,YZ)$ е ознака за растојанието од точката X до правата YZ.)

11. Во рамнината се дадени n точки такви што меѓу произволни пет од тие точки постојат четири кои припаѓаат на една кружница. Ако $n \geq 7$, докажи дека барем $n-1$ од дадените точки припаѓаат на една кружница. Дали ова тврдење важи за $n < 7$?

Решение. Нека $n \geq 7$ и нека $S = \{A_1, A_2, ..., A_7\}$ е подмножество од даденото множество точки. Да претпоставиме дека никои пет од точките на множеството S не припаѓаат на една кружница. Нека k_1 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, на пример,

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \in k_1.$$

Нека k_2 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_5, A_6. Тогаш кружницата k_2 не може да ги содржи сите точки A_1, A_2, A_3, бидејќи во спротивно би се поклопувала со k_1 и би содржела барем пет од дадените n точки. Нека, на пример,

$$A_2, A_3, A_5, A_6 \in k_2.$$

Нека k_3 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_3, A_4, A_5, A_6. Лесно се добива дека $A_3 \notin k_3$, т.е. дека

$$A_1, A_4, A_5, A_6 \in k_3,$$

(во останатите случаи k_3 се поклопува со некоја од кружниците k_1 или k_2 и содржи пет од дадените n точки). Нека k_4 е кружница која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_5, A_7. Тогаш кружницата k_4 ја содржи точката A_1 (во спротивно се поклопува со k_2 и содржи пет од дадените точки), k_4 ги содржи точките A_5 и A_7 (во спротивно ќе се поклопува со k_1 и ќе содржи пет точки). Нека, на пример,

$$A_1, A_3, A_5, A_7 \in k_4.$$

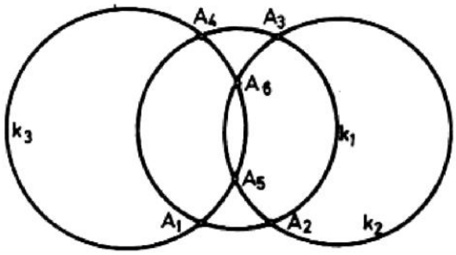
Нека k_5, k_6, k_7 се кружници кои содржат по четири точки соодветно од следниве петчлени множества

$$\{A_2, A_3, A_4, A_5, A_7\}, \quad \{A_2, A_3, A_5, A_6, A_7\}, \quad \{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Лесно се докажува дека важи

$$A_2, A_4, A_5, A_7 \in k_5, \qquad A_1, A_2, A_6, A_7 \in k_6, \qquad A_3, A_4, A_6, A_7 \in k_7.$$

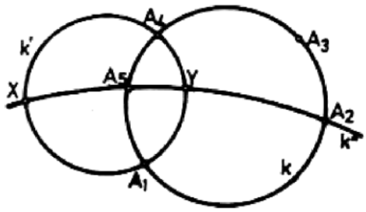
Да претпоставиме дека точките A_1, A_2, A_3, A_4 во запишаниот редослед се јавуваат на кружницата k_1 (цртеж десно). Бидејќи k_2 ги содржи точките A_2 и A_3, а k_3 ги содржи точките A_1 и A_4, добиваме дека заедничките точки A_5 и A_6 на овие кружници двете се наоѓаат внатре или двете се надвор од кружницата k_1. Нека претпоставиме дека точките A_5 и A_6 се во кружницата k_1. Тогаш и точката A_7 е во кружницата k_1, бидејќи



$$A_6, A_7 \in k_6 \cap k_7, \quad A_1, A_2 \in k_6, \quad A_3, A_4 \in k_7.$$

Но, бидејќи $A_1, A_3 \in k_4, A_2, A_4 \in k_5$ и $A_5, A_7 \in k_4 \cap k_5$, добиваме дека една од точките A_5 и A_7 е внатре во кружницата k_1, а другата е надвор од неа. Добиената противречност покажува дека пет од точките на множеството S припаѓаат на една кружница. Нека претпоставиме дека кружницата k ги содржи точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Нека X и Y се некои две од дадените точки за кои важи $X, Y \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Нека претпоставиме дека $X \notin k, Y \notin k$.

Нека k' е кружница која содржи четири од точките A_1, A_4, A_5, X, Y, а k'' е кружница која содржи четири од точките A_2, A_3, A_5, X, Y. Тогаш една од точките A_1, A_4, A_5 не припаѓа на кружницата k'. Нека, на пример, $A_1, A_4, X, Y \in k'$ (цртеж десно). Слично, една од точките A_2, A_3, A_5 не припаѓа на k''. Нека, на пример, $A_2, A_5, X, Y \in k''$. Тогаш никои четири од точките A_3, A_4, A_5, X, Y не припаѓаат на една кружница, што е противречност. Според тоа, најмногу една од точките X и Y не припаѓа на k, па лесно следува дека најмногу една од сите n точки не припаѓа на k.



За $n = 6$ тврдењето не важи (цртеж горе), за $n = 5$ тврдењетѕо очигледно важи, а за $n < 5$ тврдењето губи смисла.