Математичка гимназија у Београду
Додатна настава, шк.г. 2005/06.

Полиномске једначине

13.6.2006.

Наслов се односи на одређивање полинома по једној или више променљивих (са нпр. реалним или комплексним коефицијентима) који задовољавају неку дату релацију.

Следећи пример илуструје неке од основних метода:

1. Одредити полиноме P за које је $16P(x^2) = P(2x)^2$.

- *Први начин: одређивање вредности у појединим тачкама и свођење на нижи степен.*

  Убацивањем $x = 0$ у дату релацију добијамо $16P(0) = P(0)^2$, тј. $P(0) = 0$ или 16.

  (i) Нека је $P(0) = 0$. Тада је $P(x) = xQ(x)$ за неки полином Q, и важи $16x^2Q(x^2) = 4x^2Q(2x)^2$ што након скраћивања постаје $4Q(x^2) = Q(2x)^2$. Сада за $4Q(x) = R(x)$ имамо $16R(x^2) = R(2x)^2$. Дакле, $P(x) = \frac{1}{4}xR(x)$, где R задовољава исту релацију као P.

  (ii) Нека је $P(0) = 16$. Убацивањем $P(x) = xQ(x) + 16$ у дату релацију добијамо $4xQ(x^2) = xQ(2x)^2 + 16Q(2x)$ одакле је $Q(0) = 0$, тј. $Q(x) = xQ_1(x)$ за неки полином Q_1. Даље је $x^2Q_1(x^2) = x^2Q_1(2x)^2 + 8Q_1(2x)$, одакле је $Q_1(0) = 0$, тј. и Q_1 је дељиво са x и $Q(x) = x^2Q_1(x)$. Претпоставимо да је x^n највећи степен x који дели Q, тј. $Q(x) = x^nR(x)$, где је $R(0) \neq 0$. Тада R задовољава једначину $4x^{n+1}R(x^2) = 2^{2n}x^{n+1}R(2x)^2 + 2^{n+4}R(2x)$, тј. $R(0) = 0$ што је немогуће. Следи да је $Q \equiv 0$ и $P(x) \equiv 16$.

  Закључујемо да је $P(x) = 16\left(\frac{1}{4}x\right)^n$ за неко $n \in \mathbb{N}_0$.

- *Други начин: испитивање коефицијената.*

  Докажимо прво следећу (често употребљавану) лему:

Лема. Ако је $P(x)^2$ полином по x^2, онда је или $P(x)$ или $P(x)/x$ такође полином по x^2.

Доказ. Нека је $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ са $a_n \neq 0$. Коефицијент уз x^{2n-1} је $2a_na_{n-1}$, одакле следи $a_{n-1} = 0$. Сада је коефицијент уз x^{2n-3} једнак $2a_na_{n-3}$, одакле је и $a_{n-3} = 0$, итд. Настављајући овакво разматрање закључујемо да је $a_{n-2k-1} = 0$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$, тј. $P(x) = a_nx^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + \cdots$.

Како је $P(x)^2 = 16P(x^2/4)$ полином по x^2, имамо $P(x) = Q(x^2)$ или $P(x) = xQ(x^2)$. У првом случају је $16Q(x^4) = Q(4x^2)^2$, одакле је и $16Q(x^2) = Q(4x)^2$, а у другом је (на сличан начин) $4Q(x^2) = Q(4x)^2$ и у оба случаја закључујемо да је $Q(x) = R(x^2)$ или $Q(x) = xR(x^2)$ за неки полином R, тј. $P(x) = x^iR(x^4)$ за неко $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Настављајући на исти начин добићемо $P(x) = x^iS(x^{2^k})$ за свако $k \in \mathbb{N}$ и неко $i \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$. Сада је довољно узети $2^k > \deg P$ да би се закључило да је S константно, па је $P(x) = cx^i$ за неко $c \in \mathbb{R}$. Једноставна провера даје $P(x) = 16\left(\frac{1}{4}x\right)^n$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

Већина задатака овог типа се може решити једном од ове две методе (мада их има који не могу). Испитивање могућих нула траженог полинома такође спада у прву методу.

Задаци

1. Наћи све полиноме P за које је $P(x)^2 + P(\frac{1}{x})^2 = P(x^2)P(\frac{1}{x^2})$.

   Решење. По леми из уводног задатка постоји полином Q такав да је $P(x) = Q(x^2)$ или $P(x) = xQ(x^2)$. У првом случају је $Q(x^2)^2 + Q(\frac{1}{x^2}) = Q(x^4)Q(\frac{1}{x^4})$, одакле је $Q(x)^2 + Q(\frac{1}{x}) = Q(x^2)Q(\frac{1}{x^2})$ (што је она иста релација коју задовољава P), а у другом (слично) $xQ(x)^2 + \frac{1}{x}Q(\frac{1}{x})^2 = Q(x^2)Q(\frac{1}{x^2})$, што је немогуће јер лева страна има непаран степен, а десна паран. Закључујемо да је $P(x) = Q(x^2)$ где је и Q решење дате полиномске једначине, па посматрањем решења најмањег степена закључујемо да P мора бити константно.

2. Да ли постоје нелинеарни полиноми P и Q такви да је $P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\cdots(x-15)$?

   Решење. Претпоставимо да постоје. Тада је $\deg P \cdot \deg Q = 15$, па је $\deg P = k$, где је $k \in \{3, 5\}$. Ако ставимо $P(x) = c(x-a_1)\cdots(x-a_k)$, имамо $c(Q(x)-a_1)\cdots(Q(x)-a_k) = (x-1)(x-2)\cdots(x-15)$. Према томе, корени полинома $Q(x)-a_i$ су различити и чине скуп $\{1, 2, \ldots, 15\}$. Међутим, ови полиноми се разликују само у последњем коефицијенту. Посматрајући парност осталих коефицијената закључујемо да сваки од њих (а њих је три или пет) има једнак број непарних коренова. Ово је немогуће јер непарних коренова има укупно 8, што није дељиво ни са 3 ни са 5.

3. Одредити све полиноме P за које је $P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1)$.

   Решење. Означимо $P(1) = a$. Имамо $a^2 - 2a - 2 = 0$. Како је $P(x) = (x-1)P_1(x) + a$, убацивањем у полазну једначину и сређивањем добијамо $(x-1)P_1(x)^2 + 2aP_1(x) = 4(x+1)P_1(2x^2-1)$. За $x = 1$ имамо $2aP_1(1) = 8P_1(1)$, па због $a \neq 4$ следи $P_1(1) = 0$, тј. $P_1(x) = (x-1)P_2(x)$, тј. $P(x) = (x-1)^2P_2(x) + a$. Претпоставимо да је $P(x) = (x-1)^nQ(x) + a$, при чему је $Q(1) \neq 0$. Убацивањем у полазну релацију и сређивањем добијамо $(x-1)^nQ(x)^2 + 2aQ(x) = 2(2x+2)^nQ(2x^2-1)$, што опет даје $Q(1) = 0$, контрадикција. Закључујемо да је $P(x) = a$.

4. Одредити све полиноме P за које је $P(x)^2 - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1)$.

   Решење. Претпоставимо да P није константно. Фиксирајући $\deg P = n$ и упоређујући полиноме леве и десне стране уочавамо да су (какви год били) коефицијенти полинома P рационални. С друге стране, ако подесимо $x = a$ за које је $a = a^2 - 4a + 1$, а то је $a = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, добијамо $P(a) = b$, где је $b^2 - 4b - 1 = 0$, тј. $b = 2 \pm \sqrt{5}$. Ово је немогуће, јер $P(a)$ мора бити облика $p + q\sqrt{21}$ за неке $p, q \in \mathbb{Q}$ јер су коефицијенти полинома P рационални. Следи да је $P(x)$ константа.

5. За које реалне вредности a постоји рационална функција $f(x)$ која задовољава $f(x^2) = f(x)^2 - a$?

   Решење. Напишимо f у облику $f = P/Q$, где су P и Q узајамно прости полиноми и Q је моничан. Упоређивањем водећег коефицијента закључујемо да је и P моничан. Услов задатка постаје $P(x^2)/Q(x^2) = P(x)^2/Q(x)^2 - a$. Како су и $P(x^2)$ и $Q(x^2)$ узајамно прости (ако они имају заједничку нулу, имају је и P и Q), следи $Q(x^2) = Q(x)^2$. Одавде је $Q(x) = x^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Сада имамо $P(x^2) = P(x)^2 - ax^{2n}$.

   Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$. Упоређивањем коефицијената $P(x)^2$ и $P(x^2)$ видимо да је $a_{n-1} = \cdots = a_{2m-n+1} = 0$, $a_{2m-n} = a/2$, $a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ и $a_0 = 1$. Одавде закљудхујемо да је или $a = 0$, или $a = 2$ и $2m - n = 0$.

6. Наћи све полиноме P који задовољавају $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ за све x.

   Решење. На основу леме из уводног задатка постоји полином Q такав да је $P(x) = Q(x^2 + 1)$ или $P(x) = xQ(x^2 + 1)$. Тада је $Q((x^2+1)^2 + 1) = Q(x^2+1)^2 - 1$, односно $(x^2+1)Q((x^2+1)^2+1) = x^2Q(x^2+1)^2 + 1$. Смена $x^2 + 1 = y$ даје $Q(y^2+1) = Q(y)^2 + 1$, односно $yQ(y^2+1) = (y-1)Q(y)^2 + 1$.

Претпоставимо да је $yQ(y^2+1) = (y-1)Q(y)^2+1$. Убацивањем $y=1$ добијамо $Q(2)=1$. Приметимо да, ако је $Q(a)=1$, онда је $aQ(a^2+1) = (a-1)+1$ па је и $Q(a^2+1)=1$. Овако добијамо бесконачан низ (a_n) тачака у којима Q узима вредност 1, дат са $a_0=2$ и $a_{n+1}=a_n^2+1$. Закључујемо да је $Q \equiv 1$.

Сада лако долазимо до свих решења: то су полиноми облика $T(T(\cdots(T(x))\cdots))$, где је $T(x)=x^2+1$.

7. Ако полином P са реалним коефицијентима задовољава за свако x

$$P(\cos x) = P(\sin x),$$

доказати да постоји полином Q такав да је за свако x, $P(x) = Q(x^4-x^2)$.

Решење. Из услова лако следи да је $P(-\sin x) = P(\sin x)$, тј. $P(-t) = P(t)$ за бесконачно много t, па полиноми $P(x)$ и $P(-x)$ морају да се поклапају. Дакле, $P(x) = S(x^2)$ за неки полином S. Сада је $S(\cos^2 x) = S(\sin^2 x)$ за свако x, тј. $S(1-t) = S(t)$ за бесконачно много вредности t, што даје $S(x) \equiv S(1-x)$. То је еквивалентно са $R(x-\frac{1}{2}) = R(\frac{1}{2}-x)$, тј. $R(y) \equiv R(-y)$, где је R полином такав да је $S(x) = R(x-\frac{1}{2})$. Сада је $R(x) = T(x^2)$ за неки полином T, и најзад $P(x) = S(x^2) = R(x^2-\frac{1}{2}) = T(x^4-x^2+\frac{1}{4}) = Q(x^4-x^2)$ за неки полином Q.

8. Наћи све четворке полинома (P_1, P_2, P_3, P_4) такве да, кад год природни бројеви x, y, z, t задовољавају $xy - zt = 1$, важи $P_1(x)P_2(y) - P_3(z)P_4(t) = 1$.

Решење. Очигледно је да $P_1(x)P_2(y) = P_2(x)P_1(y)$ за све природне x, y, одакле следи да $P_2(x)/P_1(x)$ не зависи од x. Дакле, $P_2 = cP_1$ за неку константу c. Слично је $P_4 = dP_3$ за неку константу d. Сада имамо $cP_1(x)P_1(y) - dP_3(z)P_3(t) = 1$ кад год су x, y, z, t природни и $xy - zt = 1$. Такође видимо да $P_1(x)P_1(y)$ зависи само од xy. тј. $f(x) = P_1(x)P_1(n/x)$ је исто за све делиоце x броја n. Како је f рационална функција, а број делилаца x може бити произвољно велик, следи да је f константно, тј. полином по n (у развоју f се не појављује x). Лако се проверава да ово важи само када је P_1 облика $P_1(x) = x^n$ за неко n. Слично је $P_3(x) = x^m$ за неко m и $c(xy)^n - d(zt)^m = 1$. Одавде је $m = n$ и $c = d = 1$, и најзад $m = n = 1$. Дакле, $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = P_4(x) = x$.

9. Наћи све полиноме $P(x)$ са реалним коефицијентима који задовољавају једнакост

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

за све тројке (a, b, c) реалних бројева таквих да је $ab+bc+ca = 0$. *(ММО 2004.2)*

Решење. Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. За свако x тројка $(a,b,c) = (6x, 3x, -2x)$ задовољава услов $ab+bc+ca = 0$. Услов по P нам даје $P(3x)+P(5x)+P(-8x) = 2P(7x)$ за све x, одакле упоређивањем коефицијената добијамо $K(i) = \left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2\cdot 7^i\right) = 0$ кад год је $a_i \neq 0$. Како је $K(i)$ негативно за непарно i и позитивно за $i = 0$ и $i \geq 6$, $a_i = 0$ је могуће само за $i = 2$ и $i = 4$. Према томе, $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4$ за неке реалне бројеве a_2, a_4. Лако се проверава да сви овакви $P(x)$ задовољавају тражени услов.

10. (а) Ако за реалан полином $P(x)$ важи $P(x) \geq 0$ за свако x, доказати да постоје реални полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви да је $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$.

(б) Ако за реалан полином $P(x)$ важи $P(x) \geq 0$ за свако $x \geq 0$, доказати да постоје реални полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви да је $P(x) = A(x)^2 + xB(x)^2$.

Решење. Полином $P(x)$ се може представити у облику

$$P(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_k)^{\alpha_k}\cdot(x^2-b_1x+c_1)\cdots(x^2-b_mx+c_m), \qquad (*)$$

при чему су a_i, b_j, c_j реални бројеви такви да су a_i различити и полиноми $x^2-b_ix+c_i$ немају реалних нула.

Из услова $P(x) \geq 0$ за све x следи да су сви α_i парни, а из услова $P(x) \geq 0$ за све $x \geq 0$ следи да је $(\forall i)$ α_i парно или $a_i < 0$. Сада је лако представити сваки од чинилаца у $(*)$ у облику $A^2 + B^2$, односно $A^2 + xB^2$, па је по познатој формули $(a^2 + \gamma b^2)(c^2 + \gamma d^2) = (ac + \gamma bd)^2 + \gamma(ad - bc)^2$ њихов производ $P(x)$ такође могуће представити у жељеном облику.

11. Ако полиноми P и Q имају бар по један реалан корен, и

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2),$$

доказати да је $P \equiv Q$.

Решење. Приметимо да постоји $x = a$ такво да је $P(a)^2 = Q(a)^2$. Ово следи из чињенице да, ако су p и q редом реални коренови P и Q, онда је $P(p)^2 - Q(p)^2 \leq 0 \leq P(q)^2 - Q(q)^2$, а $P^2 - Q^2$ је непрекидна функција. Сада је $P(b) = Q(b)$ за $b = 1 + a + P(a)^2$. Ако претпоставимо да је a највећи реалан број такав да је $P(a) = Q(a)$, одмах долазимо до контрадикције.

12. Ако су P и Q монични полиноми такви да је $P(P(x)) = Q(Q(x))$, доказати да је $P \equiv Q$.

Решење. Претпоставимо да је $R = P - Q \neq 0$ и да је $0 < k \leq n - 1$ степен $R(x)$. Тада је

$$P(P(x)) - Q(Q(x)) = [Q(P(x)) - Q(Q(x))] + R(P(x)).$$

Ако напишемо $Q(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, имамо $Q(P(x)) - Q(Q(x)) = [P(x)^n - Q(x)^n] + \cdots + a_1[P(x) - Q(x)]$, при чему сви сабирци осим првог имају степен највише $n^2 - n$, док је први сабирак једнак $R(x) \cdot \left(P(x)^{n-1} + P(x)^{n-2}Q(x) + \cdots + Q(x)^{n-1}\right)$ и отуда има степен $n^2 - n + k$ са водећим коефицијентом n. Дакле, степен $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ је $n^2 - n + k$. Степен полинома $R(P(x))$ је једнак $kn < n^2 - n + k$, одакле закључујемо да је разлика $P(P(x)) - Q(Q(x))$ степена $n^2 - n + k$, што је контрадикција.

Остаје случај када је $R \equiv c$ константно. Тада услов $P(P(x)) = Q(Q(x))$ даје $Q(Q(x) + c) = Q(Q(x)) - c$, па једнакост $Q(y + c) = Q(y) - c$ важи за бесконачно много y, одакле је $Q(y + c) \equiv Q(y) - c$ што је могуће само за $c = 0$ (довољно је упоредити коефицијенте).

13. Ако постоје узајамно прости полиноми P, Q, R са комплексним коефицијентима такви да је

$$P^a + Q^b + R^c = 0,$$

где су a, b, c природни бројеви, доказати да важи $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$.

Решење. Прво докажимо следеће помоћно тврђење.

Лема. Ако су A, B и C узајамно прости полиноми са $A + B + C = 0$, онда је степен сваког од полинома A, B, C мањи од броја различитих нула полинома ABC.

Доказ. Нека је

$$A(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - p_i)^{a_i}, \quad B(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - q_i)^{b_i}, \quad C(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - r_i)^{c_i}.$$

Напишимо дату једнакост као $A(x)C(x)^{-1} + B(x)C(x)^{-1} = 1$ и диференцирајмо је по x. Добијамо

$$A(x)C(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{x - p_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{x - r_i}\right) = -B(x)C(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{b_i}{x - q_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{x - r_i}\right),$$

из чега видимо да се $A(x)/B(x)$ може представити као количник два полинома степена не већег од $k+l+m-1$. Тврђење следи из чињенице да су A и B узајамно прости.

Применимо ово тврђење на полиноме P^a, Q^b, R^c. Сваки од $a \deg P$, $b \deg Q$, $c \deg R$ је мањи од $\deg P + \deg Q + \deg R$, одакле је $\frac{1}{a} > \frac{\deg P}{\deg P + \deg Q + \deg R}$, итд. Сабирањем добијамо тражену неједнакост.

Последица: Велика Фермаова теорема за полиноме.

14. Цилиндар је подељен на mn квадратних поља са m вертикала и n паралела. Доказати да је могуће у свако поље добијене табле уписати по један реалан број, од којих бар један није нула, тако да је сваки број једнак збиру свих својих суседа (тј. оних који с њим деле једну страницу), ако и само ако је за неке целе бројеве k и l

$$\cos\frac{2l\pi}{m} + \cos\frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Решење. Означимо са a_{ij} број у пресеку i-те паралеле и j-те вертикале. Придружимо i-тој паралели полином $p_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \cdots + a_{im}x^{m-1}$ и дефинишимо $p_0(x) = p_{n+1}(x) = 0$. Својство да је сваки број једнак збиру својих суседа може се записати као $p_i(x) = p_{i-1}(x) + p_{i+1}(x) + (x^{m-1} + x)p_i(x)$ по модулу $x^m - 1$, тј.

$$p_{i+1}(x) = (1 - x - x^{m-1})p_i(x) - p_{i-1}(x) \pmod{x^m - 1}.$$

Овај низ полинома је потпуно одређен чланом $p_1(x)$. Бројеве a_{ij} је могуће уписати на тражени начин ако и само ако се може одабрати $p_1(x) \neq 0$ тако да је $p_{n+1}(x) = 0$.

Ако дефинишемо низ полинома $r_i(x)$ са $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ и $r_{i+1} = (1 - x - x^{m-1})r_i - r_{i-1}$, имамо $p_{n+1}(x) = r_{n+1}(x)p_1(x) \pmod{x^m - 1}$. Полином $p_1 \neq 0$ за који је $p_{n+1} = 0$ постоји ако и само ако $r_{n+1}(x)$ и $x^m - 1$ нису узајамно прости, тј. ако и само ако постоји ε такав да је $\varepsilon^m = 1$ и $r_{n+1}(\varepsilon) = 0$. Сада посматрајмо низ (x_i) одређен са $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_{i+1} = (1 - \varepsilon - \varepsilon^{m-1})x_i - x_{i-1}$. Ако означимо $c = 1 - \varepsilon - \varepsilon^{m-1}$ и ако су u_1, u_2 нуле полинома $x^2 - cx + 1$, општи члан управо дефинисаног рекурентног низа је $x_i = \dfrac{u_1^i - u_2^i}{u_1 - u_2}$ ако $u_1 \neq u_2$ и $x_i = iu_1^i$ ако $u_1 = u_2$. Други случај је очигледно немогућ. У првом случају ($u_1 \neq u_2$) услов $x_{n+1} = 0$ је еквивалентан са $u_1^{n+1} = u_2^{n+1}$, тј. са $\omega^{n+1} = 1$, где је $u_1 = u_2\omega$, што важи ако и само ако је $(\exists u_2)\ u_2^2\omega = 1$ и $u_2(1+\omega) = c$, дакле $(1+\omega)^2 = c^2\omega$, тј.

$$2 + \omega + \bar{\omega} = (1 - \varepsilon - \bar{\varepsilon})^2.$$

Ако је сада $\omega = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$ и $\varepsilon = \cos\frac{2l\pi}{m} + i\sin\frac{2l\pi}{m}$, горња једнакост се своди на тражену.

15. Ако је дат прост број $p > 2$, наћи све природне бројеве n за које постоје полиноми P и Q са рационалним коефицијентима такви да је

$$P(x)^2 + nQ(x)^2 = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}.$$