Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ - НЕРАВЕНСТВА

Задачите со неравенства често пати се задаваат на математичките олимпијади, како за учениците од основното, така и за учениците од средното образование. Во оваа статија ќе разгледаме неколку задачи кои се решаваат како со користење на основните својства на неравенствата во множеството реални броеви, така и со користење на неравенствата меѓу средините и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

1. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што
$$a^2+b^2=c^2+d^2,\ \ ab+cd>0,\ \ ac+bd>0.$$
Докажи дека $ad+bc>0$.
Решение. Тврдењето следува од равенството
$$(ad+bc)(ac+bd)=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=(a^2+b^2)(ab+cd)$$
и фактот дека од условот на задачата следува дека $a^2+b^2>0$.

2. За кој x изразот $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмала можна вредност?
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}x(x+2)(x+4)(x+6)&=(x+6x)(x^2+6x+8)\\&=(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)+16-16\\&=(x^2+6x+4)^2-16,\end{aligned}$$
од каде што следува дека најмалата можна вредност на дадениот израз е -16 и истата се достигнува кога $x^2+6x+4=0$, односно кога $(x+3)^2=5$. Конечно најмалата можна вредност за денио израз е -16 и истата се достигнува кога $x+3=\pm\sqrt{5}$, односно за $x=-3-\sqrt{5}$ или $x=-3+\sqrt{5}$.

3. Збирот на три раба на правилна $n-$страна призма кои излегуваат од едно теме е 100. Колкава е најголемата можна плоштина на омотачот на оваа призма?

Решение. Нека должината на основниот раб е a и должината на висината на призмата е h. Тогаш $2a+h=100$. Плоштината на омотачот ќе биде најголема кога изразот nah, односно изразот ah има најголема можна вредност. Имаме

$$\begin{aligned} ah = a(100-2a) &= -2a^2+100a = -2(a^2-50a) \\ &= -2(a^2-50a+625-625) \\ &= -2(a^2-50+625)+1250 \\ &= -2(a-25)^2+1250 \le 1250, \end{aligned}$$

што значи дека ah има најголема можна вредност 1250 кога $a-25=0$, т.е. кога $a=25$. Значи, најголемата можна плоштина на омотачот на призмата е $1250n$.

4. Докажи дека за секои реални броеви a и b важи неравенството

$$4(a-b)^2-6(a-b)+4ab+3\ge 0 .$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 4(a-b)^2-6(a-b)+4ab+3 &= (a-b)^2+4ab+3(a-b)^2-6(a-b)+3 \\ &= a^2-2ab+b^2+4ab+3((a-b)^2-2(a-b)+1) \\ &= (a+b)^2+3(a-b-1)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a+b=0$ и $a-b-1=0$, т.е. ако и само ако $a=\frac{1}{2}$ и $b=-\frac{1}{2}$.

5. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=2$. Докажи дека важи

$$x^2y^2(x^2+y^2)\le 2 .$$

Решение. Нека $x=1+t$, $0\le t\le 1$. Тогаш $y=1-t$, па затоа

$$\begin{aligned} x^2y^2(x^2+y^2) &= (1+t)^2(1-t)^2((1+t)^2+(1-t)^2) \\ &= (1-t^2)^2(2+2t^2) = 2(1-t^4)(1-t^2) \le 2, \end{aligned}$$

бидејќи $0\le 1-t^2\le 1$ и $0\le 1-t^4\le 1$. Знак за равенство важи ако и само ако $1-t^2=1-t^4=1$, т.е. ако и само ако $t=0$, што значи ако и само ако $x=y=1$.

6. Докажи дека $a^2+b^2>\frac{1}{2}c^2$, каде a,b,c се должини на страни на произволен триаголник.

Решение. Од неравенството за должините на страните a,b,c на произволен триаголник $a+b>c$ следува

$$a^2+b^2+2ab>c^2. \qquad (1)$$

Од друга страна, од неравенството $(a-b)^2\ge 0$ следува неравенството

$$a^2+b^2-2ab\ge 0. \qquad (2)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството $2a^2+2b^2>c^2$, кое е еквивалентно со бараното неравенство.

7. Докажи го неравенството

$$2013<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}<2013+\frac{1}{2}.$$

Решение. Ако искористиме дека за секој природен број $n>1$ важи

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{n+1-(n-1)}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1},$$

добиваме

$$\begin{aligned}\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}&=\frac{2^2-1+2}{2^2-1}+\frac{3^2-1+2}{3^2-1}+...+\frac{2013^2-1+2}{2013^2-1}\\&=1+\frac{2}{2^2-1}+1+\frac{2}{3^2-1}+...+1+\frac{2}{2013^2-1}\\&=2012+\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+...+\frac{2}{2013^2-1}\\&=2012+(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014})\\&=2012+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\\&<2013+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

8. Нека x и y се броеви од интервалот $[1,2]$. Докажи дека

$$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\le\frac{9}{2}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{5}{2}.$$

Нека $\frac{x}{y}=k$. Од условот на задачата $x,y\in[1,2]$ следува $k\in[\frac{1}{2},2]$. Според тоа, треба да се докаже неравенството $k+\frac{1}{k}\le\frac{5}{2}$, кога $k\in[\frac{1}{2},2]$.

Понатаму, бидејќи $k>0$ последното неравенство е еквивалентно со неравенството $2k^2-5k+2\leq 0$, т.е. со неравенството $(2k-1)(k-2)\leq 0$, кое е исполнето, бидејќи од $k\in[\frac{1}{2},2]$ следува $2k-1\geq 0$ и $k-2\leq 0$.

9. Докажи дека

$$\frac{1}{2009}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}<\sqrt{\frac{1}{2009}}\,.$$

Решение. Нека $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$. Бидејќи за секој природен број n важи $\frac{n}{n+1}>\frac{n}{n+2}$, добиваме

$$A>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009}=\frac{1}{2009}\text{, т.е. }\frac{1}{2009}<A.$$

Бидејќи за секој природен број n важи $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$, добиваме

$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2009}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2007}\cdot\frac{1}{2009}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2009}\,.$$

Според тоа, $A^2<\frac{1}{2009}$, од каде следува $A<\sqrt{\frac{1}{2009}}$.

10. За позитивните реални броеви x,y,z важи

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}\,. \qquad (1)$$

Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{1}{3}\,. \qquad (2)$$

Решение. Од равенството (1) следува дека броевите x,y,z се поголеми од 1. Ќе го докажеме неравенството

$$\frac{1}{x^3+2}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,, \qquad (3)$$

кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(x^3+2)-3(x^2+1)>0,$$
$$2(x^3-1)-3(x^2-1)>0,$$
$$2(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)(x+1)>0,$$
$$(x-1)(2x^2-x-1)>0.$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенствата $x-1>0$ и $2x^2=x^2+x^2>x+1$, што значи дека е точно неравенството (3). Јасно, точни се и неравенствата

$$\frac{1}{y^3+2}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^2+1},\ \frac{1}{z^3+2}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z^2+1}. \qquad (4)$$

Ако ги собереме неравенствата (3) и (4) и го искористиме равенството (1), добиваме

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

11. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Решение. Нека претпоставиме дека сите три броја $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1. Од $abc=1$ следува дека барем еден од броевите a,b,c мора да е позитивен. Ако $a>0$, тогаш $2c>2c-\frac{1}{a}>1$, па затоа $c>0$, што значи дека и $b>0$. Значи, сите три броја се позитивни. Од $2b-\frac{1}{c}>1$ следува

$$b>\frac{1+\frac{1}{c}}{2}. \qquad (1)$$

Од $2a-\frac{1}{b}>1$ и $abc=1$ следува $\frac{2}{bc}-\frac{1}{b}>1$, т.е.

$$b<\frac{2}{c}-1. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) добиваме $\frac{2}{c}-1>\frac{1+\frac{1}{c}}{2}$, од каде по средувањето наоѓаме $c<1$. Аналогно се добива дека $a<1$ и $b<1$, па како $a,b,c>0$ добиваме $abc<1$, што противречи на $abc=1$. Конечно, од добиената противречност следува дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

12. Нека $n\geq 3$ и $p_i, i=1,2,...,n$ се првите n прости броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+...+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1p_2...p_n}<\frac{1}{2}.$$

Решение. Бидејќи $p_1=2$ и $p_k\geq 2k-1$, важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+...+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1p_2...p_n}&\leq\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{2\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}\\&<\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2-1}+...+\frac{1}{(2n-1)^2-1}+\frac{1}{2\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot4}+...+\frac{1}{(2n-2)\cdot2n}+\frac{1}{2\cdot3\cdot...\cdot(2n-1)}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$
$$=\frac{1}{2}-(\frac{1}{4n}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}).$$

Изразот во последната заграда е позитивен бидејќи

$$2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\geq 2\cdot 3\cdot(2n-1)=12n-6>4n,$$

па затоа важи

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1p_2\cdots p_n}<\frac{1}{2}.$$

13. Броевите 1, 2, ..., 2022 се распоредени на 1011 домина, така што на секое домино се наоѓаат два броја. Ако производите на броевите на домината ги означиме со $p_1, p_2, ..., p_{1011}$ докажи дека

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}}\leq\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+\ldots+\frac{1}{2022}.$$

Решение. Ќе докажеме дека збирот $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}}$ е најголем ако имаме домина со парови (1,2), (3,4), ..., (2021,2022). Нека претпоставиме дека на две домина имаме парови (a,b) и (c,d) и дека важи $a>b$ и $c>d$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека a е најголем меѓу броевите a,b,c,d. Ако направиме замена на броеви – тогаш може да имаме домина со парови (a,c) и (b,d). Ако збирот на реципрочните вредности се зголемува, тогаш важи неравенството

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}<\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$

Последното неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$ab+cd-ac-bd<0,$$
$$(a-d)(b-c)<0.$$

Но, $a>d$, па затоа мора да важи $b<c$. Повторувајќи ја оваа постапка, добиваме дека збирот $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}}$ е најголем кога броевите распоредени на домината се последователни и еднакви на (1,2), (3,4), ..., (2021,2022). Според тоа,

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{1011}}\leq\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2021\cdot 2022}$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+...+\frac{2022-2021}{2021\cdot 2022}$$
$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022})$$
$$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2022})$$
$$=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})=(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1011})$$
$$=\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+...+\frac{1}{2022}.$$

14.Ако x,y,z и $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}$ се природни броеви, определи ја намалата можна вредност на изразот $\frac{x+z}{y}$.

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}}=k, k\in\mathbb{N}$. Затоа $y+x\sqrt{2}=kz+ky\sqrt{2}$, односно $(x-ky)\sqrt{2}=zk-y$. Но, $x,y,z,k\in\mathbb{N}$, што значи дека ако $x-ky\neq 0$, тогаш бројот на десната страна во последното равенство е ирационален, а на левата страна е цел број, што р противречност. Затоа, од последното равенство следува $x-ky=0$ и $zk-y=0$, односно $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}=k$, од каде добиваме $y^2=xz$, т.е. $y=\sqrt{xz}$. Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{x+z}{y}=\frac{x}{\sqrt{xz}}+\frac{z}{\sqrt{xz}}=\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\geq 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=2.$$

Значи, бараната најмала вредност на изразот $\frac{x+z}{y}$ е 2 и истата се достигнува за $\frac{x}{z}=\frac{z}{x}$ и $y=\sqrt{xz}$, односно за $x=y=z$.

15.Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c е точно неравенството

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{bc}+\frac{b^2+2c^2+4a^2}{ca}+\frac{c^2+2a^2+4b^2}{ab}\geq 21. \qquad (1)$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

Решение. Од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина следуваат неравенствата

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc,$$
$$ab^2+bc^2+ca^2\geq 3abc,$$

$$ac^2+ba^2+cb^2 \geq 3abc.$$

Ако првото неравенство го помножиме со 1, вторoт со2 , третото со 4 и ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$(a^3+2ab^2+4ac^2)+(b^3+2bc^2+4ba^2)+(c^3+2ca^2+4cb^2) \geq 21abc\ .$$

Последното неравенство го делиме со $abc>0$ и го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

16. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a и b важи неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2ab}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\ . \qquad (1)$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

Решение. Со K,A,G,H да ги означиме редоследно квадратната, аритметичката, геометриската и хармониската средина на броевите a и b. Познато е дека за овие средини се точни неравенствата $K \geq A \geq G \geq H$, а неравенсвото (1) всушност е неравенството $K+H \geq A+G$, односно неравенството $K-G \geq A-H$. Понатаму, за аритметичката и хармониската средина имаме:

$$A=\frac{a+b}{2}=\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4}}=\sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+ab}{2}}=\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}} \text{ и}$$

$$H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{G^2}{\sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}}=\frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}},$$

што значи дека за да го докажеме неравенството $K-G \geq A-H$, потребно е да го докажеме неравенството

$$K-G \geq \sqrt{\frac{K^2+G^2}{2}}-\frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}=\frac{K^2-G^2}{\sqrt{2(K^2+G^2)}}\ .$$

Бидејќи $K \geq G$ последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{2(K^2+G^2)} \geq K+G,$$

кое всушност е неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за броевите K и G, што значи дека истото е точно. Притоа знак за равенсво важи ако и само ако $K=G$, т.е. ако и само ако $a=b$.

17. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1}\geq\frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$(a(9bc+1)+b(9ca+1)+c(9ab+1))(\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1})\geq(a+b+c)^2,$$

од каде што следува

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c}. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+b+c)^3\geq(3\sqrt[3]{abc})^3=27abc,$$

па затоа

$$(a+b+c)^3+a+b+c\geq 27abc+a+b+c. \qquad (2)$$

Сега, од неравенствата (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1}&\geq\frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3+a+b+c}\\&=\frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2},\end{aligned}$$

што ио требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во (1) и (2), т.е. ако и само ако $a=b=c$

18. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+zx\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz. \qquad (*)$$

Кога важи знак за равенство?

Решенија. Ако искористиме дека $x+y+z=1$, даденото неравенство го трансформираме во неравенството

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)^2\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz(x+y+z),$$

т.е. во неравенството

$$x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+xz^3\geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2). \qquad (1)$$

Според тоа, за да го докажеме неравенството (*) доволно е да го докажеме неравенство (1). Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два броја следува

$$x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+xz^3=xy(x^2+y^2)+yz(z^2+y^2)+za(z^2+x^2)$$
$$\geq xy\cdot 2xy+yz\cdot 2yz+zx\cdot 2zx$$
$$=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),$$

т.е. точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и како $x+y+z=1$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\geq\frac{9}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\left(\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\right)(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y))\geq(x+y+z)^2,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$4(x+y+z)^2\geq 9(x(y^2+z)+y(z^2+x)+z(x^2+y)),$$

односно

$$4(x^2+y^2+z^2)\geq xy+yz+zx+9(xy^2+yz^2+zx^2).$$

Но, $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, па затоа доволно е да докажеме дека

$$x^2+y^2+z^2\geq 3(xy^2+yz^2+zx^2). \qquad (1)$$

Имаме

$$x^2+y^2+z^2=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$$
$$=x(x^2+z^2)+y(x^2+y^2)+z(z^2+y^2)+xy^2+yz^2+zx^2$$
$$\geq x\cdot 2xz+y\cdot 2xy+z\cdot 2zy+xy^2+yz^2+zx^2$$
$$=3(xy^2+yz^2+zx^2),$$

т.е. точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и како $x+y+z=1$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

20. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Докажи дека

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ .$$

Решение. Даденото неравенство го делиме со $\sqrt{xyz}$ и ги добиваме еквивалентните неравенства:

$$\sqrt{\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{xz}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{z}}\geq 1+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{xz}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}\ ,$$

$$\sqrt{\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{xz}+\frac{1}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{z}}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{yz}}+\sqrt{\frac{1}{xz}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}\ . \qquad (1)$$

Според тоа, доволно е да го докажеме неравенството (1).

Ако искористиме дека $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, последователно добиваме

$$(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{z}})^2\geq 0,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{2}{\sqrt{yz}}\geq 0,$$

$$1\geq\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{yz}},$$

$$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x\sqrt{yz}},$$

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{yz},$$

$$\sqrt{\frac{1}{yz}+\frac{1}{x}}\geq\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{yz}},$$

и аналогно $\sqrt{\frac{1}{xz}+\frac{1}{y}}\geq\frac{1}{y}+\sqrt{\frac{1}{xz}}$ и $\sqrt{\frac{1}{xy}+\frac{1}{z}}\geq\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{xy}}$. Ги собираме последните три неравенства и го добиваме неравенството (1).

21. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката иу геометриската средина следува $2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})}\leq 1+b+\frac{1}{a}$, односно

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geq\frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}\ . \qquad (1)$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}} \qquad (2)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}\,. \qquad (3)$$

Ги собираме неравенствата (1), (2) и (3) и ако го искористиме равенството

$$\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+b}+\frac{1}{1+a+ab}=1$$

кој се добива со примена на $abc=1$, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}\left(\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}\right)=\sqrt{2}\,.$$

22.Нека a,b,c се реални броеви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека важи

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\,.$$

Решение. Од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 4(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}$$

$$=60abc\cdot a^{-\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{20}}c^{\frac{2}{15}}\geq 60abc,$$

бидејќи од $0<a\leq b\leq c$ следува $c^8\geq a^5b^3$, што значи

$$c^{\frac{2}{15}}\geq a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}, \text{ т.е. } a^{-\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{20}}c^{\frac{2}{15}}\geq 1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

23.Нека $n\geq 3$ и $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви такви што

$$a_1\geq a_2\geq ...\geq a_n\geq 0\,.$$

Докажи дека важи

$$a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+...+a_{n-2}a_{n-1}a_n\leq\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{3}\right)^3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. За $n=3$ неравенството од задачата всушност е неравенствотѕо меѓу аритметичката и геометриската средина.

За $n>3$ поради даденото подредување имаме $a_1a_2\geq a_ka_{k+1}$, за $k=1,2,...,n-2$, па затоа

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+...+a_{n-2}a_{n-1}a_n &\le a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+...+a_1a_2a_n \\ &= a_1a_2(a_3+a_4+...+a_n) \\ &\le \left(\tfrac{a_1+a_2+...+a_n}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Понатаму, во првото неравенство знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=a_k=a_{k+1}$ или $a_{k+2}=0$, а во второто важи ако и само ако $a_1=a_2=a_3+...+a_n$, што значи ако и само ако

$$a_1=a_2=a_3 \text{ и } a_4=a_5=...=a_n=0.$$

24.Нека a,b,c се позитивни реални броеви и n,k се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\ge a^k+b^k+c^k.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$kx^{n+k}+ny^{n+k}\ge(n+k)\sqrt[n+k]{x^{k(n+k)}y^{n(n+k)}}=(n+k)x^ky^n$$

и ако поделиме со y^n добиваме

$$k\frac{x^{n+k}}{y^n}\ge(n+k)x^k-ny^k. \qquad (1)$$

Ако во неравенствот (1) прво ставиме $x=a,y=b$, потоа $x=b,y=c$ и на крајот $x=c,y=a$ и ги собереме добиените неравенства го добиваме бараното неравенство.

25.Нека $x_1,x_2,...,x_{2001}$ се позитивни реални броеви такви што

$$x_i^2\ge x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+...+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3},\ 2\le i\le 2001.$$

Докажи дека

$$\sum_{i=2}^{2001}\frac{x_i}{x_1+x_2+...+x_{i-1}}>1,999.$$

Решение. Од

$$x_i^2\ge x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+...+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3},$$

неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и

$$1^3+2^3+...+(i-1)^3=\frac{i^2(i-1)^2}{4}$$

следува

$$\frac{i^2(i-1)^2}{4}x_i^2 = x_i^2(1^3+2^3+...+(i-1)^3)$$
$$\geq (1^3+2^3+...+(i-1)^3)(x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+...+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3})$$
$$\geq (x_1+x_2+...+x_{i-1})^2,$$

односно

$$\frac{x_i}{x_1+x_2+...+x_{i-1}} \geq \frac{2}{(i-1)i}\ .$$

Според тоа, точна е оценката

$$\sum_{i=2}^{2001}\frac{x_i}{x_1+x_2+...+x_{i-1}} \geq \sum_{i=2}^{2001}\frac{2}{(i-1)i} = 2(1-\frac{1}{2001})$$
$$= 2-\frac{2}{2001} > 2-\frac{2}{2000} = 1{,}999.$$

26. Докажи дека за позитивни реални броеви a_1,a_2,a_3,a_4 важи неравенството

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3} \geq \frac{4}{3}$$

и дека равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=a_3=a_4$.

Решение. Да ги воведеме ознаките

$$S = \frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3},$$
$$S_2 = \frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_4}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3},$$
$$S_3 = \frac{a_3}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_4}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_1}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2+a_3},$$
$$S_4 = \frac{a_4}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_1}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_2}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}.$$

Очигледно $S_2+S_3+S_4=4$. Ако ги собереме горните равенства и го искористиме неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, добиваме

$$S+4 = S+S_2+S_3+S_4$$
$$= (a_1+a_2+a_3+a_4)(\frac{1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{1}{a_3+a_4+a_1}+\frac{1}{a_4+a_1+a_2}+\frac{1}{a_1+a_2+a_3})$$
$$\geq (a_1+a_2+a_3+a_4)\frac{16}{3(a_1+a_2+a_3+a_4)} = \frac{16}{3}.$$

Значи, $S \geq \frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_1=a_4+a_1+a_2=a_1+a_2+a_3,$$

т.е. ако и само ако $a_1=a_2=a_3=a_4$.

Задачи за самостојна работа

27. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c е точно неравенството

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}+\frac{\sqrt{bc}}{2a+b+c}+\frac{\sqrt{ca}}{a+2b+c}\le\frac{3}{4}.$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

28. За позитивните реални броеви x,y,z важи $xyz=1$. Докажи дека.

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\le 1.$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

29. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x,y,z важи неравенството

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)(xy+yz+zx)\ge 3(x+y+z)^2x^2y^2z^2.$$

30. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}}+\frac{2b}{\sqrt{3b+c}}+\frac{2c}{\sqrt{3c+a}}\le\sqrt{3(a+b+c)}.$$

31. Докажи го неравенството

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2015^3}<\frac{5}{4}.$$

32. Докажи дека за реалните броеви a,b,c,d,e кои припаѓаат на интервалот $[0,1]$ важи неравенството

$$(1+a+b+c+d+e)^2\ge 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2).$$

Кога во ова неравенство важи знак за равенство?

33. Нека $a,b,c,$ се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$M=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}.$$

34.Докажи дека за $a>0$ и $0<b<1$ важи неравенството

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-b^2}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

35.Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=x+y+z+2$.

Докажи го неравенството

$$5(x+y+z)+18\geq 8(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}).$$

36.Нека за броевите $x_i\in(0,\frac{\pi}{2})$, $i=1,2,...,n$ важи

$$\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2+...+\operatorname{tg}x_n\leq n.$$

Докажи дека

$$\sin x_1\sin x_2...\sin x_n\leq 2^{-\frac{n}{2}}.$$

37.Нека

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...++\frac{1}{1+2+3+...+2000}}.$$

Докажи дека $S>1003$.