Методи Главче
Скопје

ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ НА РЕШАВАЊЕ

Сигурно ти е позната поговорката: „*Во математиката нема кралски патишта.*“, што со други зборови значи дека не постои начин за брзо и лесно да се научи математика, туку за тоа е потребно време и многу работа. Меѓутоа, математиката е посебна и по тоа што повеќето нејзини задачи можат да се решат на различни начини и тоа е дел од нејзината убавина. Токму една ваква задача ќе биде предмет на нашите следни разгледувања.

Задача. За природните броеви a и b и простиот број p важи $a^2 + p^2 = b^2$. Докажи дека $2(b+p)$ е квадрат на природен број.

Решение. *Прв начин*. Од $a^2 + p^2 = b^2$ следува $p^2 = (b-a)(b+a)$. Бидејќи a и b се природни броеви, броевите $a-b$ и $a+b$ се разчични природни делители на бројот p^2. Но, бројот p^2 има само три природни делители: $1, p, p^2$, па затоа $a-b=1$ и $a+b=p^2$. Ако ги собререме последниве равенства добиваме $2b=1+p^2$, па затоа

$$2(b+p) = 2b+2p = p^2+2p+1 = (p+1)^2,$$

што значи дека бројот $2(b+p)$ навистина е точен квадрат на природен број.

Втор начин. Ако $p=2$, тогаш $a^2+4=b^2$. Квадратите 1^2 и b^2 се разликуваат за 3, а разликата меѓу квадратите на било кои други два броја е најмалку 5, па затоа не е можно $p=2$. Значи, можеме да претпоставиме дека p е непарен природен број.

Броевите a,b и p формираат Питагорова тројка, и како p е непарен број добиваме дека постојат природни броеви d,m и n такви што

$$a = 2mnd,\ \ p = d(m^2-n^2),\ \ b = d(m^2+n^2)\,,$$

каде $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Бидејќи p е прост број, добиваме дека $d=1$, односно

$$a = 2mn,\ \ p = m^2-n^2,\ \ b = m^2+n^2\,.$$

Според тоа,

$$2(b+p) = 2(m^2+n^2+m^2-n^2) = 4m^2 = (2m)^2\,,$$

т.е. $2(b+p)$ навистина е точен квадрат на природен број.

Трет начиен. Ќе докажеме дека броевите b и p мора да бидат непарни. Ако $p=2$, тогаш $a^2+4=b^2$. Квадратите 1^2 и b^2 се разликуваат за 3, а разликата меѓу квадратите на било кои други два броја е најмалку 5, па затоа не е можно $p=2$. Значи, можеме да претпоставиме дека p е непарен природен број.

Ако b е парен број, тогаш a мора да биде непарен број, па затоа бројот a^2+p^2 дава остаток 2 при делење со 4, а бројот b^2 дава остаток 0 при делење со 4, што е противречност. Според тоа, b мора да е непарен број.

Даденото равенство е еквивалентно на равенството $a^2=b^2-p^2$, т.е. на равенството $p^2=(b-a)(b+a)$. Ќе го искористиме добро познатиот факт:

Ако x и y се заемно прости броеви такви што xy е точен квадрат, тогаш x и y се точни квадрати.

Ќе докажеме дека $\mathrm{NZD}(b-p,b+p)=2$.

Имаме $\mathrm{NZD}(b-p,b+p)=\mathrm{NZD}(2p,b+p)$. Бидејќи $b+p$ е парен број, за да докажеме дека $\mathrm{NZD}(b-p,b+p)=2$ доволно е да докажеме дека p не е делител на b. Навистина, ако p е делител на b, тогаш p е делител и на a, па затоа $a=km, b=pn$, од каде следува дека $m^2+1=n^2$, што не е можно бидејќи не постојат два точни квадрати на природни броеви кои се последователни природни броеви.

Понатаму, од $\mathrm{NZD}(b-p,b+p)=2$ следува дека постојат заемно прости природни броеви x и y такви што $b-p=2x$ и $b+p=2y$. Според тоа,

$$(b-p)(b+p)=2x\cdot 2y$$
$$b^2-p^2=4xy$$
$$4xy=a^2$$
$$xy=(\tfrac{a}{2})^2.$$

Сега, бидејќи $(\frac{a}{2})^2$ е точен квадрат и x и y се заемно прости броеви добиваме дека x и y се точни квадрат. Последното значи дека постои природен број z таков што $y=z^2$. Конечно,

$$2(b+p)=2y=2\cdot 2z^2=(2z)^2,$$

што и требаше да се докаже.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ