Здравко Цветковски, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ИГРИ И СТРАТЕГИИ

Во секоја игра треба да постигнеме определена цел, при што се почитуваат низа правила кои определуваат како се игра таа игра. Доколку играта ја игра еден играч, но притоа нема играч кој оневозможува да се постигне целта, тогаш велиме дека станува збор за неконкурентски игри. Во случајот кога играат двајца играчи, при што треба да се определи кој играч победува велиме дека станува збор за конкурентски игри.

Неразделив дел од поимот игра е поимот стратегија. Имено, секој учесник во некоја игра има за цел да победи. Начинот на играње на еден играч, кој начин води до победа го нарекуваме добра (победничка) стратегија. Во оваа статија ќе разгледаме неколку игри, во кои ќе ја определиме победничката стратегија на даден играч, доколку истата постои.

Задача 1. Играчите A и B наизменично повлекуваат дијагонали во конвексен 2008-аголник, при што прв почнува играчот A. Тие можат да формираат дијагонала од било кои две темиња на 2008 - аголникот ако добиената дијагонала не пресекува ниту една од претходно повлечените дијагонали. Губи играчот кој не може да повлече дијагонала. Кој од играч има победничка стратегија?

Решение. Играчот A има победничка стратегија. Имено тој во првиот чекор повлекува една од главните дијагонали, а потоа во секој следен чекор тој повлекува симетрична дијагонала на дијагоналата повлечена од B во однос на повлечената главна дијагонала. ■

Задача 2. Лицата A и B имаат 40 бонбони. Тие наизменично јадат најмалку по една, а најмногу по шест бонбони. Победник е оној кој ќе го изеде последниот бонбон. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Победничка стратегија има играчот A. Имено тој во првиот чекор јаде 5 бонбони, а потоа во секој следен чекор тој јаде по $7-x$ бонбони, каде x е бројот на бонбони што ги изел B во претходниот чекор. ■

Задача 3. Даден е $\triangle PQR$ со плоштина 1. Играчот A избира точка $X \in PQ$, потоа играчот B избира точка $Y \in QR$ и повторно A избира точка $Z \in PR$. Целта на A е да ја максимизира плоштината P_{XYZ}. Која е најголемата плоштина што може да си ја обезбеди играчот A при правилна игра на играчот B.

Решение. Играчот B може да игра така да не му дозволи на A да „земе“ плоштина поголема од $\frac{1}{4}$. Имено по било кој избор на точката $X \in PQ$ на страна на играчот A, играчот B ја избира точката $Y \in QR$ така што $XY \parallel PR$. Тогаш за било која точка $Z \in PR$ важи

$$\frac{P_{XYZ}}{P_{PQR}} = \frac{\overline{XY} \cdot (H-h)}{\overline{PR} \cdot H} = \frac{h \cdot (H-h)}{H^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Последново неравенство е точно поради неравенството $(H-2h)^2 \geq 0$. Значи, $P_{XYZ} \leq \frac{P_{PQR}}{4} = \frac{1}{4}$. Според ова при правилна игра на B играчот A не може да земе плоштина поголема од $\frac{1}{4}$.

Ќе покажеме дека A може да земе плоштина еднаква на $\frac{1}{4}$. Имено A ги бира точките X и Z така што X е средина на PQ и Z е средина на PR и тогаш при било кој избор на $Y \in QR$ на играчот B имаме $P_{XYZ} = \frac{P_{PQR}}{4} = \frac{1}{4}$. Со ова задачата е решена. ■

Задача 4. Дадена е равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Играчите A и B наизменично избираат по еден коефициент од a, b, c и го заменуваат со цел број. Докажи дека A може да игра така што сите три корени на добиената равенка се цели броеви.

Решение. Во првиот чекор A става $b = -1$. Тогаш при било кој избор на B за еден од преостанатите два коефициенти, играчот A преостанатиот коефициент го заменува со истиот избор на B со спротивен предзнак. Имено ако B избере $a = y$ тогаш A избира $c = -y$, и ако B избере $c = y$ тогаш A избира $a = -y$.

Во двата случаи се добива равенка од видот

$$x^3 - yx^2 - x + y = 0,$$

чии решенија се -1, 1 и y. ♦

Задача 5. Играчот A поставува коњ на шаховска табла 8×8. Потоа B прави (правилен) коњски потег, и така натаму. Притоа тие можат да го поместат коњот само на поле на кое коњот претходно не бил поставен.

Губитник е оној играч кој не може да направи потег. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Да ја разбиеме таблата на 4×2 правоаголници. Тогаш за секое поле во секој од овие правоаголници постои единствено поле од истиот правоаголник така што може да се „скокне“ од едното до другото поле. Поради ова B има победничка стратегија. Имено, за секој потег на A, играчот B го поместува коњот на единственото поле на даден правоаголник. ■

Задача 6. Играчите A и B имаат на располагање две купчиња со по p и q монети. Тие играат наизменично, прво A па потоа B, така што во секој чекор е дозволено да се земе една монета од едно од купчињата, да се земе по една монета од секое од двете купчиња или да се премести една монета од едно во друго куче. Победник е оној играч кој ќе ја земе последната монета. Кој од играчите во зависност од p и q има победничка стратегија?

Решение. Играчот A има победничка стратегија ако барем еден од броевите p и q е непарен. Имено тогаш, тој секогаш може на играчот B да му „остави“ две парни купчиња, при што играчот B во следниот чекор е принуден да „остави“ барем едно непарно купче, итн. се до состојба 0,2 која играчот A му ја „остава“ на играчот B и при која е јасно дека победува играчот A.

Ако p и q се парни броеви тогаш победничка стратегија има играчот B, имено B ја користи истата стратегија како претходно. ■

Задача 7. На табла се напишани $n\geq 12$ последователни природни броеви. Играчите A и B наизменично бришат по еден број од таблата, се додека на таблата не останат само два броја a и b. Играчот A е победник ако $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, ако пак $\mathrm{NZD}(a,b)>1$ победник е играчот B. Играта ја почнува играчот A. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Нека $n=2k+1$ е непарен број. Ќе покажеме дека играчот A има победничка стратегија.

Имено тој ги групира дадените броеви во парови последователни броеви и во првиот чекор го брише бројот кој нема свој пар. Потоа во секој нареден чекор играчот A го брише бројот кој припаѓа на парот на бројот кој го избришал во претходниот чекор играчот B. На овој начин на крајот на таблата остануваат два последователни броја, кои јасно се заемно прости.

Нека $n=2k$ е парен број. Ќе покажеме дека во овој случај играчот B има победничка стратегија. Имено B во секој чекор брише непарен број, освен два фиксирани непарни броеви кои се деливи со 3. Играчот A мора да брише во секој чекор парни броеви (бидејќи во спротивно на крајот ќе останат два парни броја и јасно тогаш B е победник). Со оваа стратегија на B, на крајот ќе останат два парни и два непарни броја деливи со 3, при што јасно е дека B е победник. Бидејќи ако A го избрише едниот парен број тогаш и B го брише другиот парен број, ако пак A го избрише едниот непарен број тогаш и B го брише другиот непарен број. Со ова задачата е решена. ■

Задача 8. Играчите A и B наизменично ставаат еден од знаците $+$, $-$ или $\cdot$ на празните места меѓу броевите 1 2 3 ... 99 100. Да се докаже дека играчот A секогаш може да го направи крајниот резултат:

а) парен,

б) непарен.

Решение. Бидејќи само парноста на броевите е важна, дадената задача ќе ја разгледаме по модул 2. Притоа еквивалентна позиција на почетната е 1 0 1...1 0. Но, по модул 2 одземањето е исто што и собирањето, па затоа доволно е да го разгледаме само случајот кога играчите ги користат само знаците $+$ и $\cdot$.

а) Во првиот случај во првото празно место играчот A го става знакот $\cdot$, па ја добива следнава низа 0 1 0 ...1 0. Сега, ако B стави било кој знак $*$, (или $+$, или $\cdot$) на некое празно место $0*1$ 0 односно 0 $1*0$, тогаш A става знак $\cdot$ во „спротивното“ поле на знакот на B. Имено се добива $0*1\cdot 0=0$ или $0\cdot 1*0=0$ итн. Бидејќи $3|99$ добиваме дека крајниот резултат е 0, т.е. е парен број.

б) Во првиот чекор на првото празно место играчот A става знак $+$, при што се добива низата 1 1 0 ...1 0. Во секој нареден чекор играчот A ја следи истата стратегија како под а). ■

Задача 9. Почнувајќи од $n=2$, двајца играчи A и B наизменично на дадениот број (добиен во претходниот чекор) му додаваат негов вистински делител. Победува оној играч по чиј потег добиениот број ќе биде поголем или еднаков на 2010. Кој од двајцата играчи има победничка стратегија?

Решение. Во првиот чекор A го додава бројот 1 (1 е единствен вистински делител на 2) и го добива бројот $n=3$. Во вториот чекор играчот B мора на бројот 3 да му го додаде бројот 1 и го добива бројот $n=4$. По овој чекор играчот A може секогаш да му остави на B непарен број, а како резултат на ова играчот B секогаш ќе добива парен број.

Вистински делител на непарен број е најмногу $\frac{1}{3}$ од самиот број. Значи B ќе може да додаде најмногу $\frac{1}{3}$ од бројот добиен во претходниот чекор од играчот A. Играчот A секогаш има на располагање парен број и тој може да додаде најмногу $\frac{1}{2}$ од дадениот број. Според тоа, A игра со следнава стратегија: му остава непарен број на играчот B се додека не се случи B да добие број поголем или еднаков на 1340, и тогаш јасно A во следниот чекор со додавање на половина од добиениот број добива број кој е поголем или еднаков на 2010. ■

Задача 10. Играчите A и B, наизменично на табла запишуваат природни броеви помали или еднакви на даден природен број n. Притоа не е дозволено да се запишуваат броеви кои се делители на броевите кои веќе се запишани на таблата. Губитник е играчот кој што не може да направи правилен чекор. Кој од играчите има победничка стратегија ако $n=10$.

Решение. Играчот A го запишува бројот 6. Тогаш B во наредните чекори може да запише еден од броевите во паровите $\{4,5\}$, $\{7,9\}$, $\{8,10\}$. При било кој избор на B, играчот A во наредниот чекор го запишува преостанатиот број од соодветниот пар, и со тоа јасно победува. ■

Задача 11. Играчите A и B имаат на располагање две купчиња со по p и q монети. Тие играат наизменично, при што прв игра играчот A. Еден чекор се состои во отстранување на едно од купчињата и поделба на останатото купче на две купчиња. Губитник е играчот кој што не може да направи чекор. Кој од играчите во зависност од p и q има победничка стратегија?

Решение. Ќе покажеме дека ако барем еден од броевите p и q е парен тогаш играчот A има победничка стратегија, инаку играчот B е победник. Имено ако p и q се двата парни броја тогаш A, го трга едното од купчињата, а преостанатото купче го дели на две непарни купчиња. Играчот B во наредниот чекор мора да отстрани непарно купче, а преостанатото непарно купче мора да го раздели на едно парно и едно непарно купче, па така A во следниот чекор го трга непарното купче и го дели парното купче на две непарни купчиња итн. се до позиција 1, 3 која му ја остава на B. Тогаш е јасно B мора да го отстрани првото купче а второто да го раздели на две купчиња т.е. остава позиција 1, 2 и конечно во последниот чекор играчот A го отстранува првото купче и го дели второто купче на две купчиња 1, 1. Конечно, играчот B не може да направи чекор, што значи дека победува играчот A.

Ако пак само еден од p и q е непарен тогаш A го трга непарното купче, а преостанатото парно купче го дели на две непарни итн. стратегијата е иста како во претходниот случај.

Ако двата броја p и q се непарни тогаш истата стратегија е победничка за играчот B. ■

Задача 12. Двајца играчи A и B имаат купче со n монети. Тие играат наизменично, прво A па B. Во првиот чекор A зема s, $0<s<n$ монети. Во секој следен чекор играчот што е на потег може да земе било кој број на монети од купчето ако тој број е делител на бројот на земени монети во претходниот чекор. Губитник е оној од играчите кој не може да направи правилен чекор. Кој од играчите во зависност од n има победничка стратегија?

Решение. Ќе покажеме дека за $n>1$, B е победник ако $n=2^m$.

Нека $n=2^m$, $m\geq 1$. Во првиот чекор бројот на монетитѕе кој нги зел играчот A е $2^a(2b+1)$, $a,b\geq 0$. Тогаш B може да победи ако ја користи следнава стратегија: Во вториот чекор B зема 2^a монети, а во секој нареден чекор играчот B зема онолку монети колку што земал A во претходниот чекор. (да забележиме дека во било кој чекор може да зема само 2^k каде $k\leq a$, монети).

Ако $n=2^a(2b+1)$ тогаш играчот A има стратегија за победа. Имено тој во првиот чекор зема 2^a монети, а во секој нареден чекор играчот A зема онолку монети колку што земал играчот B во претходниот чекор. ■

Задача 13. Даден е полиномот

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Двајца играчи A и B наизменично, прво A па B, еден од коефициентите a,b,c,d (по свој избор) го заменуваат со цел број. Играчот A е победник ако добиениот полином по четвртиот чекор нема целобројни решенија, во спротивно победник е играчот B. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. По три чекори нека три од коефициентите a,b,c,d се заменети со цели броеви x, y и z. Тогаш B победува ако преостанатиот коефициент го замени со $-x-y-z-1$, при што добиениот полином има барем едно целобројно решение, имено 1 е решение на дадената равенка.
Според тоа, играчот B со оваа стратегија може секогаш да си обезбеди победа. ■