Алија Муминагиќ
Данска

НЕСТАНДАРДНИ РЕШЕНИЈА НА СТАНДАРДНИ ЗАДАЧИ

Во редовното образование најчесто дадена задача решаваме со знаењата кои сме ги стекнале од областа на која предметната задача припаѓа. Меѓутоа, често пати определени задачи може да се решат многу поедноставно и поелегантно, доколку имаме соодветни знаења од други математички дисциплини. Во оваа статија ќе се задржиме на неколку вакви задачи.

Задача 1. Докажи дека

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2499}{2500}<0,02\,.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2499}{2500}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2499}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2500}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2500}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2500}\\&=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot2500}{2^{1250}\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot1250)\cdot2^{1250}\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot1250)}\\&=\frac{2500!}{1250!\cdot1250!\cdot2^{1250}\cdot2^{1250}}\,.\end{aligned}$$

Кога $n>10$, за функцијата $n!$ добра апроксимација дава Стирлинговата формула:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{1}$$

која е позната и во видот

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}\,. \tag{2}$$

Користејќи ги неравенствата (2) добиваме

$$2500!<\sqrt{5000\pi}\left(\frac{2500}{e}\right)^{2500}e^{\frac{1}{30000}}\ \text{ и }\ \frac{1}{1250!}<\frac{1}{\sqrt{2500\pi}\left(\frac{1250}{e}\right)^{1250}}\,,$$

па затоа

$$A=\frac{2500!}{1250!\cdot1250!\cdot2^{1250}\cdot2^{1250}}<\frac{\sqrt{5000\pi}\left(\frac{2500}{e}\right)^{2500}e^{\frac{1}{30000}}}{2^{2500}\cdot2500\pi\left(\frac{1250}{e}\right)^{2500}}=\frac{\sqrt{5000\pi}}{2500\pi}e^{\frac{1}{30000}}<0,016<0,02\,.$$

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање добиваме

$$A=\frac{2500!}{1250!\cdot1250!\cdot2^{1250}\cdot2^{1250}}=\binom{2500}{1250}\left(\frac{1}{2}\right)^{1250}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1250}. \tag{3}$$

Разгледувајќи го равенството (3), забележуваме дека вредноста на изразот A всушност е веројатност во биномната распределба

$$P\{X_n=m\}=\binom{n}{m}p^m q^{n-m},\ p+q=1,\ m=0,1,2,\ldots,n\,,$$

каде $n=2500,\ m=1250,\ p=q=\frac{1}{2}$. Пресметувањето на оваа веројатност наједноставно може да се направи со помош на локалната теорема на Моавр-Лаплас (види [1]), според која:

$$P\{X_n = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Во нашиов случај имаме $x = \frac{1250-2500\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2500\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = 0$, па затоа бидејќи $2\pi > 6,25$

$$A = P\{X_{2500} = 1250\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2500\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} e^0 = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} < 0,016 < 0,02. \ ■$$

Забелешка. Бидејќи клучен момент во докажувањето на локалната теорема на Моавр-Лаплас е Стирлинговата формула, може да се каже дека решението на претходната задача во вториот начин на решавање, всушност е само поинаков испис на решението на задачата дадено во првиот начин на решавање.

Задача 2. Дадено е множество U од m триаголници. Докажи дека постои подмножество W на U, кое ги задоволува следниве услови:

1) Бројот на елементите (триаголниците) на W е поголем или еднаков на $0,45m^{\frac{4}{5}}$.
2) Не постојат шест точки A, B, C, D, E и F такви што сите триаголници: $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEF, \triangle EFA$ и $\triangle FAB$ припаѓаат на W.

Решение. Да конструираме подмножество U' на U со помош на независен случаен избор на секој од триаголниците во U, со веројатност p (која ќе ја избереме подоцна). Тогаш математичкото очекување на бројот на елементите на U' е $E(|U'|) = mp$.

Шесторката точки $(x_1, x_2, ..., x_6)$ ќе ја наречеме лоша ако секој од триаголниците $x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, ..., x_6x_1x_2$ припаѓа на U. Бројот на лошите шесторки во U не е поголем од $m(m-1)(3!) \leq 36m^2$ (Зошто?). Но сметајќи ги цикличните пермутации и симетрии во $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ кои ги има $6 \cdot 2 = 12$ добиваме дека овој број всушност е помал или еднаков на $3m^2$. Веројатноста на избор на шесторка е p^6, па затоа очекуваниот број на лоши шесторки е помал или еднаков на $3m^2p^6$. Според тоа, очекуваната разлика на бројот на елементите на U' и бројот на лошите шесторки е поголема или еднаква на $mp - 3m^2p^6$.

Сега, ако за веројатноста p земеме $p = \frac{1}{2}m^{-\frac{1}{5}}$, добиваме

$$mp - 3m^2p^6 = \frac{1}{2}m^{1-\frac{1}{5}} - \frac{3}{64}m^{2-\frac{6}{5}} = \frac{29}{64}m^{\frac{4}{5}} > 0,45m^{\frac{4}{5}},$$

што значи дека постои подмножество U' за кое горната разлика е поголема или еднаква на $0,45m^{\frac{4}{5}}$.

Останува да го конструираме W, кога од секоја лоша шесторка во U' отстраниме по еден триаголник. ■

Во претходните две задачи покажавме како теоријата на веројатност може да се искористи за решавање на едно неравенство и една задача од комбинаторна геометрија. Во следните две задачи со помош на диференцијалното и интегралното ќе докажеме два тригонометриски идентитети.

Задача 3. Докажи дека за секој $x \in \mathbb{R}$ важи:

$$2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x = \tfrac{1}{4}\sin 4x . \qquad (1)$$

Решение. Нека $F(x) = 2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x$. За изводот на оваа функција добиваме

$$\begin{aligned} F'(x) &= 6\cos^2 x \sin x(-\sin x) + 2\cos^3 x \cos x - (-\sin x \sin x + \cos x \cos x) \\ &= -6\cos^2 x \sin^2 x + 2\cos^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= -6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 2\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = -8\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 1 \\ &= 1 - 8\cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2(2\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x. \end{aligned}$$

Значи, функцијата $F(x) = 2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x$ е примитивна функција за функцијата $f(x) = \cos 4x$. Од друга страна, бидејќи за функцијата $G(x) = \frac{1}{4}\sin 4x$ важи $G'(x) = \frac{1}{4}\cdot 4\cos 4x = \cos 4x$, заклучуваме дека и функцијата $G(x) = \frac{1}{4}\sin 4x$ е примитивна за функцијата $f(x) = \cos 4x$. Но, две примитивни функции на една иста функција се разликуваат за константа, па затоа $F(x) = G(x) + C$, за секој $x \in \mathbb{R}$ односно

$$2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x = \tfrac{1}{4}\sin 4x + C ,$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Ако во последното равенство земеме $x = 0$, добиваме $C = 0$, што значи точен е идентитетот (1). ■

Задача 4. Докажи дека за секој $x \in \mathbb{R}$ важи:

$$\sin^4 x = \tfrac{1}{8}\cos 4x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{3}{8} .$$

Решение. Нека $f(x) = \sin^4 x$. Тогаш

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \sin^4 t dt = \int_a^x (\sin^2 t)^2 dt = \int_a^x (\tfrac{1-\cos 2t}{2})^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_a^x (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_a^x (1 - \cos 2t + \tfrac{1+\cos 4t}{2})dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_a^x (\tfrac{3}{2} - 2\cos 2t + \tfrac{1}{2}\cos 4t)dt$$
$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x - (\tfrac{3}{8}a - \tfrac{1}{4}\sin 2a + \tfrac{1}{32}\sin 4a).$$

Функцијата $f(x) = \sin^4 x$ е непрекината на секој интервал $[a,b],\ a,b \in \mathbb{R}$, па затоа за секој реален број x важи $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, односно

$$\sin^4 x = f(x) = \tfrac{d}{dx}(\tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x - (\tfrac{3}{8}a - \tfrac{1}{4}\sin 2a + \tfrac{1}{32}\sin 4a))$$
$$= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{8}\cos 4x,$$

што и требаше да се докаже. ■

Литература

1. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018
2. Малчески, Р. (2002). Математичка анализа I, ПМФ, Скопје
3. Малчески, Р., Малческа, В. (2019). Теорија на веројатност (трето издание), Армаганка, Скопје