ПОВРШИНА ТРАПЕЗА*

Приредила: Вера Јоцковић, Београд

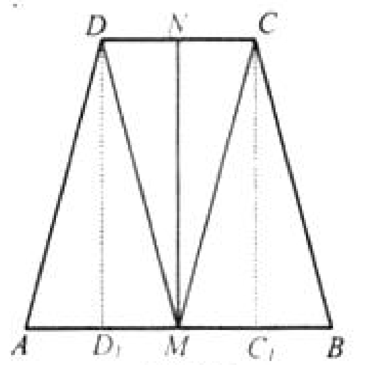
ЗАДАТАК.

Нека је $ABCD$ трапез такав да су $AB = 2CD$, $AD = BC = 10\ cm$ и углови на већој основици по 75°. Израчунај површину тог трапеза.

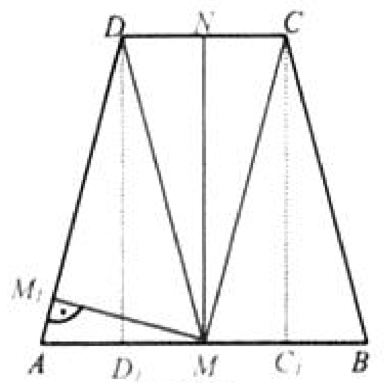
Решење 1.

Нека су CC_1 и DD_1 висине трапеза, а M и N редом средишта страница AB и CD. Тада је $AD_1 = D_1M = MC_1 = C_1B = CN = ND = \frac{b}{2}$ где је $CD = b$ (слика 1). Троуглови AD_1D, MD_1D, MC_1C, BC_1C, CNM, DNM су подударни и правоугли. Даље су троуглови AMD, BMC, CDM подударни и једнакокраки са углом од 30° при врху. Нека је MM_1 висина троугла AMD из темена M (слика 2). Из троугла MM_1D је $MM_1=\frac{1}{2}MD$ (катета наспрам угла од 30° је половина хипотенузе), односно $MM_1=5cm$.

Према томе, површина троугла AMD је $\frac{1}{2}\cdot 10cm\cdot 5cm = 25cm^2$. Површина трапеза $ABCD$ је 75 cm^2.



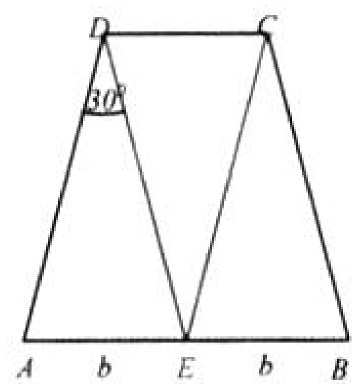
слика 1



слика 2

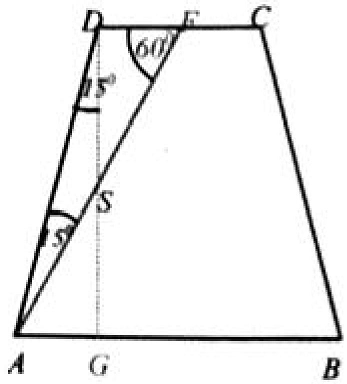
Решење 2.

Нека је E тачка на основици AB тако да је $ED \parallel BC$. Тада је $EBCD$ паралелограм, па је $ED = BC$, те је троугао AED једнакокрак са углом од 30° при врху. Троуглови AED и EBC су подударни ($AE=EB= b$, $ED = BC$, $\angle AED = \angle EBC$), а подударни су и троуглови EBC и CDE (јер је $EBCD$ паралелограм), па је трапез $ABCD$ (слика 3) подељен на три подударна једнакокрака троугла и даље је поступак као и у решењу 1.



слика 3

Решење 3.



слика 4

Нека је F тачка на основици CD тако да је $\angle AF= 60°$, а G тачка на основици AB тако да је DG висина. Обележимо са S пресек дужи AF и DG (слика 4). Тада су троуглови ASG и FSD правоугли са оштрим углом од 60°. Троугао ASD је једнакокрак са оштрим угловима SAD и SDA по 15°. Даље је

$AG = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{2b - b}{2} = \dfrac{b}{2}$, па из троугла AGS следи да је $AS = 2AG = b$, а из троугла ASD је $AS = SD = b$.

Из троугла AGS је $GS = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Сада је $GD = \dfrac{b\sqrt{3}}{2} + b$, а из правоуглог троугла AGD је $AD^2 = AG^2 + GD^2$, односно:

$$10^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + b\right)^2,$$

$$100 = \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + b^2\sqrt{3} + b^2,$$

$$100 = 2b^2 + b^2\sqrt{3},$$

$$100 = b^2\left(2 + \sqrt{3}\right),$$

па је $b^2 = \dfrac{100}{2 + \sqrt{3}}$.

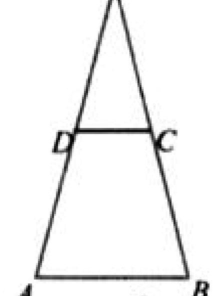
Нека је P површина трапеза $ABCD$. Тада је:

$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot GD = \frac{2b + b}{2} \cdot \left(b\frac{\sqrt{3}}{2} + b\right) = \frac{3b}{2} \cdot b\frac{\sqrt{3} + 2}{2} = 3b^2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{4}.$$

Заменом израчунате вредности за b^2, тражена површина је:

$$P = 3 \cdot \frac{100}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{4}, \ P = 75\ cm^2.$$

Решење 4.

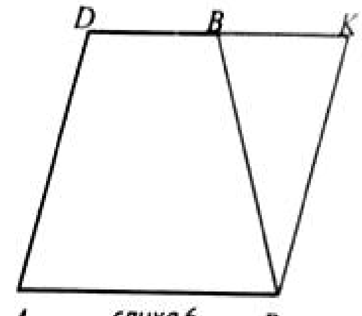


слика 5

Обележимо са T тачку пресека правих одређених краковима AD и BC трапеза $ABCD$ (слика 5). С обзиром да су AB и CD паралелне дужи и $AB=2CD$, то је CD средња линија троугла ABT. Троуглови ABT и DCT су слични са коефицијентом сличности 2. Тада површина троугла ABT је 4 пута већа од површине троугла DCT. Површина троугла DCT, из решења 1, је 25 cm^2, па површина троугла ABT је 100 cm^2, а површина траженог трапеза 75 cm^2.

Решење 5.

Нека је K тачка таква да је $ABKD$ паралелограм (слика 6). Тада је $BK=AD=BC$, па је троугао BKC једнакокрак са углом од 30° при врху и његова површина је 25 cm^2. Троуглови BKC и BCD имају једнаке површине ($KC=CD=b$, висина из темена B је заједничка). С обзиром да је $ABKD$ паралелограм то су и површине троуглова ABD и KDB једнаке. Површина паралелограма $ABKD$ је 100 cm^2, а површина трапеза је 75 cm^2.



слика 6

* Задатак је рађен на часовима геометрије у огледним одељењима Математичке гимназије у Београду.Сва решења, осим четвртог, предложили су ученици.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија