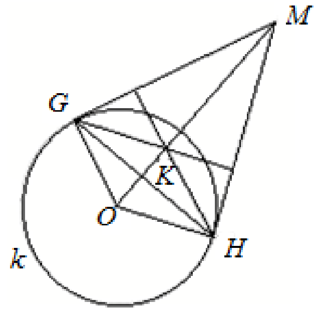
JMMO 2014

1. Докажи дека
$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<1.$$
Решение. *Прв начин.* За произволни природни броеви $n\neq 1\neq m$ е исполнето неравенството $nm\geq n+m$, бидејќи
$$(n-1)(m-1)\geq 1\Rightarrow nm-n-m+1\geq 1\Rightarrow nm-n-m\geq 0\Rightarrow nm\geq n+m,$$
при што знак за равенство важи само кога $n=m=2$. Тогаш за $n\geq 2$, имаме
$$\frac{1}{n(2014-n)}<\frac{1}{n+2014-n}=\frac{1}{2014},$$
од каде добиваме:
$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<\frac{2}{2013}+\frac{2011}{2014}<\frac{3}{2014}+\frac{2011}{2014}=1.$$
Втор начин. Имаме
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}=\\&=\frac{1}{2014}\left(\frac{1+2013}{1\cdot 2013}+\frac{2+2012}{2\cdot 2012}+\frac{3+2011}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{2012+2}{2012\cdot 2}+\frac{2013+1}{2013\cdot 1}\right)\\&=\frac{1}{2014}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2013}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2012}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{1}\right)\right)\\&=\frac{1}{2014}\cdot 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)\\&=\frac{1}{2014}\left(3+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{2012}+\frac{2}{2013}\right)\\&<\frac{1}{2014}(3+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2011})=1.\end{aligned}$$

2. Од точка M кон кружница k се повлечени две тангенти со допирни точки G и H. Ако O е центарот на k и K е ортоцентарот на триаголникот MGH докажи дека $\measuredangle GMH=\measuredangle OGK$.

Решение. Да забележиме дека K мора да лежи на OM. Од $HK\perp GM$ и $OG\perp GM$, следува $HK\parallel OG$. Аналогно, $OH\parallel GK$. Од $\overline{OG}=\overline{OH}$, следува четириаголникот $OHKG$ е ромб. Да забележиме дека O, H, M и G лежат на кружница со дијаметар OM. Оттука $\measuredangle OGH=\measuredangle OMH$. Сега тврдењето на задачата следува од
$$\measuredangle OGK=2\measuredangle OGH \text{ и } \measuredangle GMH=2\measuredangle OMH.$$



3. Најди ги сите $n \in \mathbb{N}$ деливи со 11, такви што сите броеви кои се добиваат со произволна прераспределба на цифрите на бројот n повторно се деливи со 11.

Решение. Од условот $11 | n$ следува дека бројот n мора да е најмалку двоцифрен. Нека $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0}$ каде $a_i, 0 \le i \le k$ се цифри и $a_k \neq 0$. Јасно, $k \ge 1$.

Ќе покажеме дека сите цифри во бројот n се еднакви. Имено, според условот на задачата и бројот

$$n' = \overline{a_k a_{k-1} ... a_{i+1} a_{i-1} a_i a_{i-2} ... a_0}$$

(n' е добиен од n со промена на местата на цифрите a_{i-1} и a_i) е делив со 11. Значи $11 | n - n'$, т.е.

$$11 | 10^{i-1}(\overline{a_i a_{i-1}} - \overline{a_{i-1} a_i}) \text{ или } 11 | 10^{i-1} \cdot 9(a_i - a_{i-1}),$$

па мора да важи $a_i = a_{i-1}$.

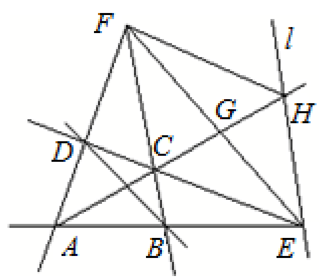
Следува, $n = a \cdot \underbrace{11...11}_{k+1}$. Лесно се проверува дека $11 | n$ ако и само ако k е непарен број.

4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Нека E е пресекот на AB и CD, F е пресекот на AD и BC и G е пресекот на AC и EF. Докажи дека следниве две тврдења се еквивалентни:

(i) BD и EF се паралелни

(ii) G е средина на отсечката EF

Решение. Низ E повлекуваме права l паралелна со BC. Нека H е пресечната точка на l и AG. Така G е пресечна точка на дијагоналите во трапезот $EHFC$.



$(i) \Rightarrow (ii)$. Нека правите BD и EF се паралелни. Тогаш, од Талесовата теорема за паралелни отсечки, следуваат равенствата:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \text{ и } \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}.$$

Следува дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}$, па повторно од Талесова теорема заклучуваме дека правите HF и ED се паралелни. Значи, $EHFC$ е паралелограм и неговите дијагонали се преполовуваат во пресечната точка G.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нека G е средина на отсечката EF. Тогаш $\triangle EGH \cong \triangle FGC$, па $EHFC$ е паралелограм и заклучуваме дека правите HF и ED се паралелни. Затоа важат равенствата:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \text{ и } \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}.$$

Следува дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}$, па повторно од Талесова теорема заклучуваме дека правите BD и EF се паралелни.

5. Докажи дека постојат по парови дисјунктни множества $A_1, A_2, ..., A_{2014}$, чија унија е множеството природни броеви, за кои важи следниот услов:
За произволни природни броеви a и b, барем два од броевите $a, b,$ $\text{NZD}(a,b)$ припаѓаат на едно од множествата $A_1, A_2, ..., A_{2014}$.

Решение. Нека $\nu_2(n)$ е најголемиот цел број за кој $2^{\nu_2(n)}$ е делител на n. Тогаш, $\nu_2(\text{NZD}(a,b)) = \min\{\nu_2(a), \nu_2(b)\}$. Значи, барем два од броевите $\nu_2(a)$, $\nu_2(b)$ и $\nu_2(\text{NZD}(a,b))$ се еднакви.
Дефинираме множества $A_{i+1} = \{n \mid \nu_2(n) \equiv i (\text{mod}\, 2014)\}$, за $0 \le i \le 2013$
Очиглегледно множества $A_1, A_2, ..., A_{2014}$ се по парови дисјунктни, нивната унија е множеството $\mathbb{N}$ и два од броевите $a, b, \text{NZD}(a,b)$ се наоѓаат во множеството A_{i+1}, каде i е остатокот при делење на $\nu_2(\text{NZD}(a,b))$ со 2014.