Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска во 1959

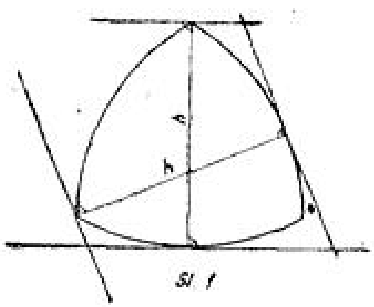
Figure konstantne širine

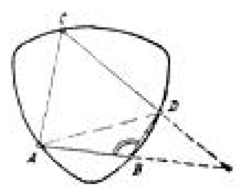
KREŠO HORVATIĆ, Zagreb

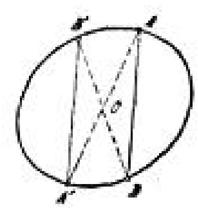
I.

U prošlom smo članku[1] definirali konveksnu figuru, nabrojili neka osnovna svojstva konveksnih figura i definirali izvjesne pojmove koji su s tim figurama u vezi. Tako smo specijalno definirali širinu konveksne figure u danom smjeru kao udaljenost para s tim smjerom paralelnim potpornih pravaca figure.

Konveksna figura, kojoj je širina u svakom smjeru jednaka, zove se figura konstantne širine. Konveksnu krivulju, koja je rub takove figure, zvat ćemo onda krivulja konstantne širine. Kako konstantnu širinu h figure možemo smatrati maksimalnom (ili minimalnom) širinom bit će prema prethodnom svaki dijametar figure okomit na par paralelnih potpornih pravaca, koji prolaze njegovim krajevima i svi će dijametri biti po duljini jednaki konstantnoj širini figure h. (Sl. 1). Figure konstantne širine su dakle ujedno i figure konstantne duljine dijametra i obratno. Iz prije rečenog slijedi također, da su svi potporni pravci figure konstantne širine regularni. Jasno je nadalje, da udaljenost bilo kojih dviju točaka figure konstantne širine ne može premašiti širinu h te figure.


Sl. 1


Sl. 2


Sl. 3

Bilo koja dva dijametra $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ figure konstantne širine moraju imati zajedničku točku. Kad bi se naime oni sjekli produženi, u jednoj točki izvan figure, ili kad bi čak bili paralelni, imali bi konveksan četverokut $ABCD$, koji je upisan figuri (Sl. 2). Kako je međutim suma kutova u četverokutu jednaka 2π, bar jedan od kutova četverokuta nije manji od $\pi/2$. Neka je to na primjer kut kod vrha B. No tada je

$$\overline{AD} > \overline{AB} = h$$

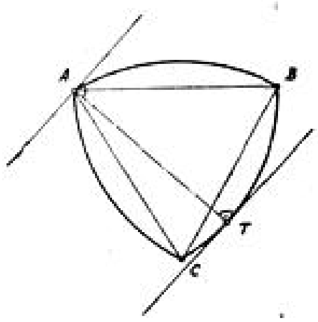
[1] Ovaj je članak nastavak članka „Konveksne figure" izašlog u br. 1. i 2. 1958.-59. Matem.-fiz. lista.

što je nemoguće. Znači, dva se dijametra uvijek sijeku u unutrašnjoj ili rubnoj točki figure. Ako se sijeku u nekoj rubnoj točki T, onda je ta točka singularna točka ruba. Pravci, koji prolaze tom točkom, a okomiti su na dijametre, jesu naime potporni pravci figure, odakle slijedi, da je točka T stvarno sigularna.

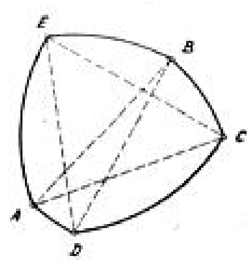
Najjednostavnija figura konstantne širine je dakako krug. Širina je jednaka njegovom dijametru. Krug je jedina centralno simetrična figura konstantne širine. Jer, ako je figura konstatne širine centralno simetrična, svi njezini dijametri moraju prolaziti centrom simetrije O. Kad bi, naime, postojao dijametar $\overline{AB}$, koji ne prolazi točkom O, zbog simetričnosti bi morao postojati i dijametar $\overline{B'A'}$ i ta bi dva dijametra bila paralelna. (Sl. 3). A to je, kako smo dokazali, nemoguće. Prema tome, svi dijametri prolaze kroz O. Nadalje, zbog centralne simetrije točka O raspolavlja svaki dijametar, dakle figura je krug.

Prvi je Euler našao, da osim kruga ima i drugih figura konstatne širine. Ako na primjer uzmemo vrhove A, B i C istostranog trokuta stranice a, kao središta triju kružnica polumjera a, onda će lukovi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CA}$ tih triju kružnica omeđiti jednu figuru konstantne širine (Sl. 4). Odaberimo naime na jednom od tih lukova na primjer na $\widehat{BC}$, bilo koju točku T. Tangenta u toj točki na kružni luk $\widehat{BC}$ je potporni pravac figure. Kako je međutim tangenta okomita na polumjer, bit će A i T par dijametralnih točaka. Budući da je nadalje $\overline{AT} = a$, a zaključak vrijedi i za točke na $\widehat{CA}$ i $\widehat{AB}$, figura je stvarno konstantne širine $h = a$. Naravno, točke A, B i C su singularne točke rube figure. Ova se figura zove Reuleaux-ov trokut (ili trostran).

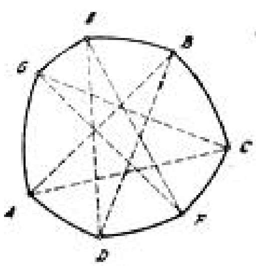
Poopćenje ovog postupka dovodi nas do tako zvanih Reuleaux-poligona, t. j. »poligona«, kojima su stranice kružni lukovi. Evo kako teče takav postupak: Odaberimo u ravnini točku A, pa oko A kao središta opišimo bilo kakav luk $\widehat{BC}$



Sl. 4



Sl. 5

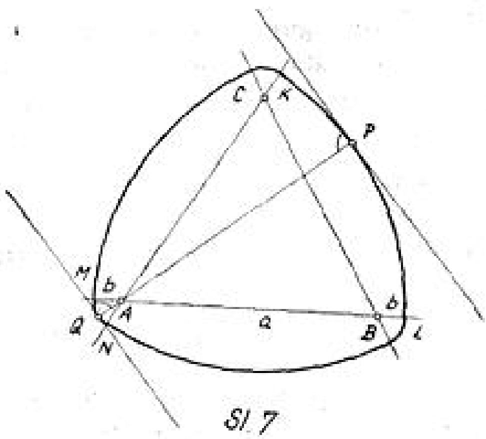


Sl. 6

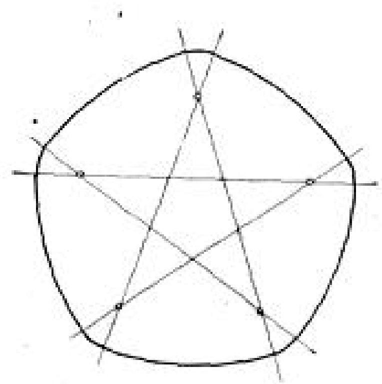
kružnice polumjera a. Opišimo zatim oko B kružnicu polumjera a (Sl. 5). Kružnica sigurno prolazi točkom A, jer je prema prethodnoj konstrukciji $\overline{AB} = a$. Odabrat ćemo na toj kružnici neku točku D. Postupak možemo nastaviti dalje, ali ako ga želimo završiti, opisat ćemo luk oko C kroz točku A i luk oko D kroz točku B. Ta će se dva luka presjeći u nekoj točki E. Kako je $\overline{EC} = \overline{AC} = a$ i $\overline{ED} = \overline{BD} = \overline{BA} = a$, to kružnica polumjera a sa središtem u E prolazi točkama C i D, i mi smo na taj način figuru zatvorili. Dobili smo jedan Reuleaux-ov peterokut $ADCBE$. Analogno bi konstruirali sedmerokut (Sl. 6), deveterokut i t. d. Svakom je »vrhu« (A, B, C . . .) takovog poligona nasuprot kružni luk, »stranica« poligona. Nadalje svaka točka neke stranice i suprotni vrh čine par dijametralnih točaka i njihova je udaljenost jednaka čvrstom broju a, polumjeru kružnih lukova. Reuleaux-ov je poligon dakle figura konstantne širine. Njegovi su vrhovi singularne točke ruba. Stranice Reuleaux poligona mogu, ali naravno općenito ne moraju biti jednake. Lako se može uvidjeti, da poligoni dobiveni navedenom konstrukcijom imaju uvijek neparan broj strana.

Sve dosada promatrane figure konstantne širine, izuzev krug, imale su na svom rubu singularnih točaka i konstruirane su iz kružnih lukova, čiji je polumjer jednak širini figure. Može se dokazati potpuno općenito: ako neka figura konstantne širine h ima na svom rubu singularnu točku, onda na rubu figure postoji luk kružnice polumjera h, i obratno.

Mogu se međutim konstruirati i figure konstantne širine bez singularnih, ugaonih točaka na rubu. Prema definiciji takova će figura biti oval, dakle oval konstantne širine. Evo jednog primjera: Dani su istostraničan trokut ABC sa



Sl 7


Sl 8

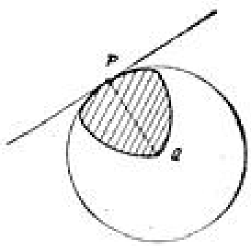
stranicom a i neka dužina b. Opisat ćemo oko vrha A kao središta luk $\widehat{KL}$ polumjera $a + b$ te luk $\widehat{MN}$ polumjera b, i zatim isto takove lukove oko vrhova B i C (Sl. 7). Ovi će lukovi omeđiti jednu figuru konstantne širine i to bez singularnih točaka na rubu. U to se možemo lako uvjeriti. Neka je naime P bilo koja točka luka $\widehat{KL}$. Pravac PA sijeći će onda luk $\widehat{MN}$ u nekoj točki Q. Točke P i Q čine par dijametralnih točaka ruba, jer su tangente u tim točkama okomite na PQ, dakle paralelne. Dijametar PQ je jednak $a + 2b$. Zaključak bi bio isti, da se točka P nalazila na bilo kojem drugom luku, pa je figura stvarno konstantne širine $h = a + 2b$. Vidi se nadalje, da su sve točke ruba regularne, jer je pridruživanje dijametralnih točaka obostrano jednoznačno. Taj se postupak može poopćiti tako, da se umjesto trokuta uzme pravilni zvjezdasti mnogokut,[2] pa se oko svakog njegovog vrha opisuju kružni lukovi polumjera $a + b$ i b. Rezultat je opet jedna figura konstantne širine $h = a + 2b$ bez singularnih točaka. Mnogokut čak ne mora biti pravilan, dovoljno je da bude istostraničan. Na sl. 8. je na primjer figura konstruirana oko pravilnog zvjezdastog peterokuta. Sve figure konstatne širine, koje smo konstruirali, imaju zajedničku karakteristiku da su omeđene kružnim lukovima. Moglo bi se zato pomisliti, da će tako biti uvijek. Postoji, međutim, niz drugih, složenijih postupaka, koji nam omogućuju dobivanje figura konstantne širine bez ijednog kružnog luka na rubu.

Nabrojit ćemo neka svojstva figure konstantne širine. Na primjer, svakom rubnom točkom figure konstatne širine h prolazi kružnica polumjera h, koja obuhvaća čitavu figuru. Da bi to dokazali, izabrat ćemo na rubu figure konstantne širine bilo koju točku P (Sl. 9). Njoj dijametralna neka je točka Q. Kako je dija-

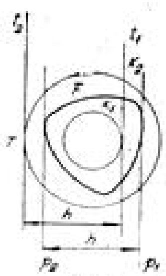
[2] Pod zvjezdatim mnogokutom ovdje ćemo razumijevati samo mnogokut, koji se dobije, ako se uzme $n + 1$ točka u cikličkom poretku, pa se svaka točka spaja sa n-tom točkom u tom poretku.

metar $\overline{PQ}$ jednak h, to će kružnica polumjera h sa središtem u točki Q prolaziti točkom P. Ta kružnica sigurno obuhvaća cijelu figuru, jer kad bi postojala neka točka T figure izvan kružnice, bilo bi $\overline{TQ} > h$, što je nemoguće. Tangenta na kružnicu u točki P je naravno i potporni pravac figure. U vezi sa kružnicom može se dokazati i ovo svojstvo figura konstantne širine: Ako neka kružnica ima s rubom figure konstantne širine h bar tri točke zajedničke, onda njezin polumjer nije veći od h. Na primjer stranice kod Reuleaux poligona pripadaju takovim kružnicama polumjera h.

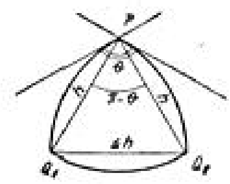
Pod kružnicom figuri opisanom razumijevat ćemo najmanju od kružnica, koje obuhvaćaju tu figuru. Slično, figuri upisana kružnica je najveća od kružnica, koje su sadržane u toj figuri. Može se strogo dokazati, da za svaku konveksnu



Sl. 9



Sl 10



Sl 11

figuru postoji opisana i upisana kružnica. Dok je opisana kružnica uvijek samo jedna, upisanih može biti više, čak beskonačno mnogo (na primjer kod pravokutnika). Kod figura konstatne širine opisana i upisana kružnica su koncentrične i suma njihovih polumjera je jednaka širini figure. To ćemo dokazati. Prije svega, ako su K_1 i K_2 dvije koncentrične kružnice, kojih je suma polumjera $r_1 + r_2 = h$, pa je kružnica K_1 sadržana u figuri konstantne širine h, onda kružnica K_2 tu figuru obuhvaća (Sl. 10). Neka je naime T bilo koja točka kružnice K_2. Povući ćemo redom tangentu t_2 kružnice K_2 u točki T, zatim onu tangentu t_1 kružnice K_1, koja je paralelna sa t_2 (od dviju mogućih onu, koja je od t_2 udaljenija) i konačno par p_1, p_2 pa s tim tangentama paralelnih potpornih pravaca figure. Tada je udaljenost tangenata t_1 i t_2 jednaka h, a jer je figura konstantne širine, i udaljenost potpornih pravaca p_1 i p_2 je jednaka h. Tangenta t_1 sigurno pripada pruzi p_1p_2, jer je u toj pruzi smještena čitava figura, pa prema tome i kružnica K_1, koja je u figuri sadržana. Kad bi i tangenta t_2 bila unutar pruge p_1p_2, bila bi udaljenost između tangenata t_1 i t_2 manja od h, a to je nemoguće. Znači, točka T ne može biti unutrašnja točka figure, pa je čitava figura smještena u krugu K_2, kako smo tvrdili. Obratno, ako od dviju koncentričnih kružnica, kojih je suma polumjera $R_1 + R_2 = h$, jedna obuhvaća figuru konstantne širine, druga će kružnica biti u toj figuri sadržana. Dokaz bi tekao analogno. Neka je sada r polumjer figuri upisane kružnice K_u, a R polumjer opisane kružnice K_o, onda ne može biti

$$r + R > h,$$

jer bi tada, prema upravo dokazanom postojala kružnica, koncentrična sa kružnicom K_u, koja obuhvaća figuru i kojoj je polumjer manji od R, što nije moguće. Međutim, ne može biti ni $\quad r + R < h,$

jer bi u tom slučaju mogli konstruirati kružnicu, koncentričnu sa kružnicom K_o i smještenu u figuri, koja bi imala polumjer veći od r, što je i opet nemoguće. Preostaje onda kao jedina mogućnost, da je

$$r + R = h.$$

Nadalje, kružnice K_u i K_o moraju biti koncentrične, jer bi u protivnom mogli konstruirati i kružnicu $\overline{K_o}$ koncentričnu sa K_u i polumjera R, koja bi obuhvaćala figuru, pa bi postojale dvije kružnice K_o i $\overline{K_o}$ opisane figuri, a to je nemoguće. Kod kruga se naravno upisana i opisana kružnica podudaraju $r = R = h/2$. Može se dokazati, da od svih figura konstantne širine h Reuleaux-ov trokut ima najveći polumjer R opisane kružnice, a time i najmanji polumjer r upisane kružnice.

Pod kutom konveksne figure u nekoj rubnoj točki smatrat ćemo najmanji kut, kojem je vrh u toj točki, a koji sadrži cijelu figuru. U regularnim točkama ruba taj je kut uvijek π, dok je u singularnim točkama manji od π. Dokazat ćemo, da kut u singularnoj točki figure konstantne širine nije manji od $2\pi/3$. Neka je P singularna točka figure konstantne širine h. (Sl. 11). Krakovi najmanjeg kuta Θ, kojemu je vrh u P, a koji sadrži figuru, jesu naravno potporni pravci figure. Tetive $\overline{PQ_1}$ i $\overline{PQ_2}$, okomite na te potporne pravce, su dijametri figure i prema tome jednake h. Trokut PQ_1Q_2 je zbog toga istokračan, a kut je trokuta kod vrha P jednak $\pi - \Theta$. Kako stranica $\overline{Q_1Q_2}$ ne može biti veća od h, to kut nasuprot toj stranici ne može biti veći od $\pi/3$. Dakle je $\pi - \Theta \leqq \pi/3$ i odatle $\Theta \geqq 2\pi/3$ kako smo tvrdili. U vrhovima Reuleaux-ovog trokuta taj je kut Θ upravo jednak $2\pi/3$, kako se to može zaključiti neposredno iz slike. Može se pokazati da je Reuleaux-ov trokut jedina figura konstantne širine, kojoj je kut u singularnoj točki jednak $2\pi/3$.

Krug, kojem je dijametar jenak h. ima opseg $h\pi$. Opseg Reuleaux-ovog trokuta širine h je $3 \cdot \pi/3\ h$, dakle $h\pi$. Opseg bilo kojeg Reuleaux poligona je $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha)\ h$, dakle opet $h\pi$, jer je suma unutrašnjih kutova u zvjezdastom mnogokutu jednaka π.[3] Kod našeg najjednostavnijeg primjera ovala konstantne širine je opseg

$$3\,[(a + b)\,\pi/3 + b\,\pi/3] = (a + 2b)\,\pi = h\pi$$

a analogno bi se vidjelo, da je opseg i kod ostalih ovala konstatne širine jednak $h\pi$. To nas upućuje na pomisao, da možda sve figure iste konstantne širine h imaju isti opseg $h\pi$. Stvarno, može se pokazati i sasvim općenito (Barbier), da je opseg svake figure konstantne širine h jednak $h\pi$, dakle da sve figure iste konstantne širine imaju isti opseg. To je osnovno svojstvo figura konstatne širine. Za dokaz te činjenice bilo bi međutim potrebno strogo fundirati pojam duljine neke zatvorene krivulje, a to bi premašilo opseg i svrhu ovoga članka.