Размишљање над једном сликом Богданова-Бјелског

Ратко Тошић, Нови Сад

Николај Петрович Богданов-Бјелски (1868 – 1945) родио се у селу Шитики Бјелског среза Смоленске губерније. Био је ванбрачно дете сиромашне сељанке. Имао је среће да доспе у школу Рачинског, који је уочио његов сликарски таленат и помогао му да стекне уметничко образовање на Московксој академији ликовних уметности.

Једна његова слика носи назив „Усмено рачунање". Слика је настала 1895. године. На слици се виде дечаци окупљени око школске табле. Два дечака који стоје у првом плану окренути су од табле и као да нешто напрегнуто рачунају или желе нечега да се сете. Један дечак шапуће нешто на уво учитељу, док други као да прислушкује. Неки дечаци носе опанке од лике, ономе из последњег плана је чак и кошуља поцепана, док су остали у чизмама. Очигледно, међу њима има деце како из сиромашних, тако и из богатих породица. Девојчица на слици нема и није тешко погодити зашто. У то време школовање није било свима доступно, чак ни сви дечаци нису имали прилику да иду у школу.

Учитељ и ученици које видимо на слици нису измишљени ликови. Учитељ је Сергеј Александрович Рачинскиј, познати руски педагог, значајни представник образованих људи 19. века. Био је доктор природних наука и професор ботанике Московског универзитета, који је 1868. године одлучио да „оде у народ". Положио је испит за звање учитеља почетних разреда и својим средствима отворио школу за сеоску децу у селу Татево Бјелскога среза Смоленске губерније.

Задатак који је поставио учитељ није лак, што се одражава у напрегнутом размишљању ученика у првом плану. Очигледно је врло озбиљно схватио постављени задатак и није тешко погодити да ће он ускоро доћи до решења. Ученик који шапуће на уво учитељу, изгледа као да је решио задатак, али његово решење није сасвим правилно, јер на лицу учитеља који га слуша нема знакова одобравања. А можда учитељ стрпљиво слуша да и други дођу до решења и не жури са одобравањем.

Богданов-Бјелски је добро познавао мале хероје са своје слике, одрастао је у њиховој средини, похађајући и сам школу Рачинског од 1878. до 1882. године, а кад је отишао на студије у Санкт Петербург, Рачински му је сваког месеца слао 25 рубаља.

Као ванбрачно дете мали Николај је на крштењу добио име Богданов (дат од Бога), а додатак Бјелски дописао је сам цар Николај II кад је потписивао његову диплому и долази од назива среза у коме је рођен.

После Октобарске револуције и победе бољшевика, Богданов-Бјелски је емигрирао из Русије, али то није довело до застоја у његовом уметничком стваралаштву. Изложбе његових слика између два светска рата приређиване су у свим већим европским градовима, између осталих у Београду, 1930. године. Међу његовим сликама налази се и једна која представља унутрашњост руске цркве Свете Тројице у Београду – место на коме је сахрањен генерал Врангел, вођа Беле армије, која је до 1920. године пружала отпор бољшевицима у Јужној Русији.

Није случајно уметник представио Рачинског, заједно са његовим ученицима, баш на часу усменог рачунања. Та слика је химна учитељу и ученику. Вештина усменог рачунања све више се губи, а њој се данас ни у школама не поклања довољно пажње. Међутим, ученици Рачинског су тако добро рачунали у глави да су се томе дивили сви посетиоци школе.

На слици „Усмено рачунање" Богданова-Бјелског на табли је представљен следећи задатак за усмено рачунање:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Покушавајући да израчунамо вредност горњег израза, рачунамо прво квадрате пет бројева у бројиоцу:

$$10\cdot 10=100,\quad 11\cdot 11=121,\quad 12\cdot 12=144,\quad 13\cdot 13=169,\quad 14\cdot 14=196.$$

Сада нам преостаје да саберемо пет добијених бројева, а затим добијени збир поделимо са 365. Међутим, после сабирања прва три броја пада у очи да је њихов збир једнак 365, тј. једнак имениоцу. То нам даје идеју да скратимо поступак. Делећи збир прва три квадрата са 365 добијамо 1. Преостаје да са 365 поделимо збир преостала два квадрата. Али, гле чуда, збир друга два квадрата је, такође, 365. Добија се да је вредност целог израза једнака 2. Дакле, при рачунању је корисно знати да не морамо делити одједном цео збир, него да је то могуће радити са делимичним збировима од по два-три сабирка.

Овај пример нам показује и пут којим се долази до идеје о састављању неког интересантног задатка. Аутор задатка је вероватно, забављајући се сабирањем квадрата природних бројева, приметио да су збирови $10^2 + 11^2 + 12^2$ и $13^2 + 14^2$ једнаки истом броју 365, те да ће збир свих пет квадрата подељен са 365 дати број 2, што му је дало идеју за састављање задатка.

Сада се може поставити питање да ли постоји још нека петорка узастопних природних бројева таква да је збир квадрата прва три броја једнак збиру квадрата преостала два броја. На основу решења следећег задатка закључујемо да других таквих петорки нема.

ЗАДАТАК 1. Наћи све природне бројеве n такве да је:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2.$$

Решење. После квадрирања и сређивања једначина се своди на $n^2=12n$, која има само једно решење у скупу природних бројева: $n = 12$. Дакле, петорка (10, 11, 12, 13, 14) је једина петорка природних бројева која задовољава услове задатка.

Напомена. Очигледно је да једначина $n^2=12n$, има још једно целобројно решење: $n=0$, али то није решење у скупу природних бројева.

Следеће инетересантно питање је да ли је могуће наћи и неке друге низове узастопних природних бројева такве да је збир квадрата првих неколико бројева једнак збиру квадрата преосталих бројева тога низа.Ограничићемо се на случај кад низ има $2k+1$ чланова при чему је збир квадрата првих $k+1$ чланова једнак збиру квадрата преосталих k чланова низа. Такве низове називаћемо *низовима Богданова-Бјелског*. Размотримо прво случај $k=3$. Проблем се своди на следећи задатак.

ЗАДАТАК 2. Наћи све природне бројеве n такве да је:

$$(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2.$$

Решење. После квадрирања и сређивања једначина се своди на $n^2=24n$, која има само једно решење у скупу природних бројева: $n = 24$. (Наравно, и овде постоји очигледно решење $n=0$, које није у скупу природних бројева).

Решење овог задатка даје нам једнакост

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2.$$

Посматрајмо сада општи случај.

ЗАДАТАК 3. Наћи све природне бројеве n такве да је за дати број k

$$(n-k)^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+\cdots+(n+k-1)^2+(n+k)^2.$$

Решење. Квадрирањем добијамо

$$\left(n^2-2nk+k^2\right)+\left(n^2-2(k-1)n+(k-1)^2\right)+\cdots+\left(n^2-2n+1\right)+n^2=$$

$$\left(n^2+2n+1\right)+\cdots+\left(n^2+2(k-1)n+(k-1)^2\right)+\left(n^2+2nk+k^2\right),$$

тј.

$$n^2=4n(1+2+\cdots+k).$$

како је $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k-1)}{2}$, добијамо једначину

$$n^2=2nk(k+1),$$

чије је једино решење у скупу природних бројева $n=2k(k+1)$. (Решење n = 0 није у скупу природних бројева.)

За решење једначине из задатка 3 рећи ћемо да је k-ти број Богданова-Бјелског и означаваћемо га са B_k. Број B_k је уствари средњи члан у низу Богданова-Бјелског од $2k+1$ чланова.

Најједноставнији случај задатка 3, $k=1$, даје решење $n=4$, тј. тројку бројева (3, 4, 5) за коју је $3^2+4^2=5^2$. То је и једна Питагорина тројка која се састоји од три узастопна природна броја.

На основу формуле добијене у решењу задатка 3, непосредно се израчунавају чланови низа Богданова-Бјелског:

$$4, 12, 24, 40, 60, 84, \ldots$$

одакле се, поред већ наведених, добијају једнакости:

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2,$$

$$78^2+79^2+80^2+81^2+82^2+83^2+84^2=85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2,$$

итд.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

1. Доказати да је сваки број Богданова-Бјелског за 1 мањи од збира квадрата нека два узастопна природна броја.
2. Доказати да је број $2B_k$ за 1 мањи од квадрата неког природног броја.
3. Израчунај вредност израза
$$\frac{21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2}{2030}.$$
4. Да ли постоји број Богданова-Бјелског који је потпуни квадрат?
5. Збир квадрата 2009 узастопних природних бројева једнак је збиру квадрата следећих 2008 узастопних природних бројева. Који је најмањи, а који највећи број међу тих 4017 бројева?
6. Наћи све природне бројеве n и $k\le n$ за које је
$$(n-k)+(n-k+1)+\cdots+(n-1)+n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k).$$
7. Наћи 4019 узастопних природних бројева таквих да је збир првих 2010 једнак збиру следећих 2009.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија