Др Ратко Тошић (Нови Сад)

БРОЈЕВИ И ИГРЕ

„И број им дадох, знање највеће...“
Есхил, Оковани Прометеј

„Work consists of whatever a body is obliged to do, and play consists of whatever a body is not obliged to do.“
Mark Twain, Tom Sawyer

Тешко је утврдити кад се у глави човека формирао појам броја. Грчка митологија откриће броја, као и многа друга велика открића, приписује Прометеју.

Питагористи, за разлику од првих материјалистичких теорија, сматрају да је у основи свега број, и да се све појаве у природи могу објаснити односима бројева. При томе су они под бројевима подразумевали оно што ми данас називамо природним бројевима. Прва велика криза у математици је и настала кад су сами питагористи открили да се однос дужина странице квадрата и његове дијагонале не може изразити као однос природних бројева. Ту кризу превазишао је Еудокс.

Већ су грчки математичари дошли до значајних открића о бројевима. Они су извршили класификацију бројева на парне и непарне, а затим на просте и сложене, доказали да има бесконачно много простих бројева (Еуклид) и дали алгоритам за налажење простих бројева не већих од датог броја (Ератостен).

Сва знања о бројевима до којих су дошли Грци, систематизовао је Диофант у својој „Аритметици“, у 13 књига, од којих је шест сачувано. Године 1621. Клод Баше де Мезирјак издао је Диофантову „Аритметику“ на латинском језику, са допунама и коментарима. Захваљујући томе, европски математичари су се упознали са грчким достигнућима о бројевима, и са Фермаом, теорија бројева почиње да се развија брзим темпом, што траје све до данас.

Могло би се рећи да је игра старија од броја. Игра је један од најважнијих извора културе. Дете чим се роди осећа потребу само

Рад је оно што чиниш под морање, а игра је све оно на што ниси приморан (Превод: Станислав Винавер) *да једе и да се игра.* Ту *потребу човека за игром најбоље је изразио* Фридрих Шилер речима: „Човек се игра само кад је човек у правом смислу, а човек је у правом смислу само кад се игра".

Мисаоне игре, које нас овде једино интересују, имају веома дугу историју. У гробницама фараона из периода око 2000 година пре нове ере, цртежима су представљене гарнитуре за игру са жетонима, као и сами играчи. Нису нам позната правила игре, али по угледу на савремену игру даме, игра је названа „египатска игра даме". Једна гарнитура за ту игру пронађена је приликом археолошких ископавања на Криту, почетком овог века. Сличне игре биле су популарне и у Грчкој, Риму и код Арапа.

Године 1612. Клод Баше де Мезирјак објавио је прву књигу која се може сврстати у жанр тзв. занимљиве математике. У тој књизи први пут се појављује један задатак у облику игре са бројевима. Крајем прошлог и почетком овог века била је популарна игра НИМ, чије је потпуно математичко решење дао Баутон, 1903. године.

Задаци:

1. Два играча наизменично исписују у врсту по једну цифру док се не добије $2k$–цифрен број. Победник је други играч ако је добијени број дељив са: (а) 11; (б) 7. У противном, победник је први играч. Који играч може да обезбеди победу, без обзира на то како игра његов противник? (в) Који играч може да обезбеди победу ако се исписује број са $2k+1$ цифара, а победник је први играч ако је добијени број дељив са 11; у противном – други?

2. Два играча исписују $2n$–цифрен број, употребљавајући само цифре 6, 7, 8 и 9. Прву цифру пише први играч, другу – други, трећу – први итд. Ако је на тај начин добијени број дељив са 9, победник је други играч, у противном – први. За које бројеве n победничку стратегију има први играч, а за које други?

3. *Два играча наизменично уписују по једну цифру у поља траке* 1×12 док се не добије 12–цифрени број. Није обавезно да се поља траке попуњавају редом. Није дозвољено користити цифре 0 и 9. *Може ли други играч постићи* да *добијени број буде дељив* са 407?

4. Два играча играју следећу игру. На табли је написан број 2. Сваки играч својим потезом замењује број n написан на табли – бројем $n+d$, где је d било који прави делитељ од n (мањи од n). Губи играч који на табли напише број већи од 1997. Који играч може да обезбеди победу?

5. Два играча наизменично исписују на табли природне бројеве не веће од n. При томе није дозвољено написати делитељ неког раније написаног броја. Губи играч који нема на располагању потез. Који играч може да обезбеди победу за: (а) $n = 10$; (б) $n = 1997$?

6. На гомили се налазе жетони. Играчи A и B наизменично узимају жетоне. Једним потезом узима се бар један, али мање од половине свих жетона на гомили. Победник је играч који остави само два жетона (јер његов противник после тога нема шта да игра).

7. На три гомиле има редом 10, 15 и 20 жетона. Једним потезом дозвољено је једну гомилу разбити на две мање. Губи играч који нема на располагању потез.

8. На табли је написано 10 јединица и 10 двојки. Једним потезом дозвољено је избрисати било које две цифре и ако су биле једнаке уместо њих написати двојку, а ако су биле различите – јединицу. Ако је последња преостала цифра на табли – јединица, победник је први играч; у противном – други.

9. На гомили се налази n жетона. Играчи наизменично узимају жетоне. Једним потезом може се узети p^k жетона, где је p прост, а k ненегативан цео број. Победник је играч који покупи последњи жетон.

10. На столу се налази 1000 жетона. Играчи наизменично узимају жетоне, при чему број жетона који се могу узети једним потезом мора бити степен двојке ($1 = 2^0$). Победник је играч који покупи последњи жетон.

Решења:

1. (а) Други. Он треба увек да напише исту цифру коју је у претходном потезу написао његов противник.

(б) Други. Он треба увек да напише цифру која допуњава цифру коју је претходно написао његов противник до двоцифреног броја који је дељив са 7.

(в) Други. У првом потезу он треба да напише цифру која је за 1 мања од оне коју је написао његов противник; у осталим потезима он понавља цифру коју је написао први играч.

2. За $n = 3k$, победничку стратегију има други играч. После сваког потеза првог играча, други пише цифру која сабрана са оном коју је написао његов противник у претходном потезу – даје збир 15.

За $n = 3k+1$, победничку стратегију има први играч. Првим потезом он исписује било коју цифру различиту од 9. После сваког потеза другог играча, први исписује цифру која сабрана са оном коју је исписао његов противник у претходном потезу – даје збир 15. При таквој игри првог играча, збир свих цифара осим прве и последње, дељив је са 9. Како је прва цифра различита од 9, збир свих цифара није дељив са 9.

За $n = 3k + 2$, победничку стратегију има први играч. Својим првим потезом он исписује цифру 9. После сваког потеза другог играча, осим претпоследњег, први играч игра као и у случају $n = 3k + 1$. Ако својим претпоследњим потезом други играч напише цифру различиту од 9, први после тога пише цифру 9; ако други напише цифру 9, први пише цифру различиту од 9. При таквој игри првог играча, збир свих цифара осим прве и три последње – дељив је са 9. Међу преостале четири цифре налазе се бар две деветке и бар једна цифра различита од 9. Дакле збир те четири цифре, према томе ни збир свих цифара, није дељив са 9.

3. Да. Стратегија другог играча је следећа: он разбија 12 позиција на два скупа по 6 и сваки пут кад први играч упише цифру x, он на одговарајуће место у другој шесторци уписује цифру $9 - x$. Добијени број има облик $A \cdot 10^6 + B$, где је $A + B = 999999$. Како је $999999 = 111111 \cdot 9$, $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $37 \cdot 11 = 407$, то је број 999999 дељив дељив са 407; према томе и број $A \cdot 10^6 + B = A(10^6 - 1) + A + B = (10^6 - 1)(A + 1)$.

4. Први играч. Сваким потезом он број написан на табли повећава за 1. (После сваког потеза другог играча на табли мора бити паран број.)

5. (а) Први играч има победничку стратегију, која се састоји у дећем. Он прво пише број 6. Преостали бројеви који нису д тељи од 6, могу се разбити на три пара: (4, 5), (7, 9), (8, Као одговор на сваки потез другог играча, први исписује бро истог пара.

(б) Доказаћемо да победничку стратегију има први играч. сврху размотримо нову игру са истим правилима изузев што дозвољено писати број 1. (У претходној игри јединица мож се напише само као први потез првог играча). Ако у новој и први играч има победничку стратегију, он је примењује, јер је очигледно, победничка стратегија и у првој игри. У противн он прво пише број 1, а затим примењује победничку страте другог играча.

6. Први играч може да победи ако се на почетку на гомили на n жетона, при чему је

$$2^k < n < 2^{k+1},$$

за $k \in N$. Он сваким потезом оставља на гомили 2^l жетона, г l природан број.

7. После сваког потеза број гомила повећава се за 1. На поче их је 3, на крају 45. Дакле, укупно ће бити повучена 42 пот Последњи, четрдесет други (победнички), вуче други играч.

8. Парност броја јединица на табли после сваког потеза остаје промењена. Зато једина преостала цифра не може бити једин Према томе, победник је други играч.

9. Ако n није дељив са 6, победничку стратегију има први играч. увек треба да игра тако да на гомили остане број жетона де са 6. То увек може постићи, јер је сваки природан број м од 6 или прост или је степен простог броја. Други играч сва својим потезом мора оставити број жетона који није дељив с (јер број дељив са 6 није степен простог броја). Ако је n де са 6, победничку стратегију има други играч.

10. Победничку стратегију има први играч ако број n није дељи 3; у противном – други.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија