Христо Лесов
Казанлк, Бугарија

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

За роденден Данило од другарите добил како подарок три папагали. Но, тој имал само два празни кафези. Кога ставил по еден папагал во секој кафез, му останал еден папагал. Го ставил во еден од кафезите и во тој кафез имало 2 папагали. Без да знае за намерата на другарите на Данило, татко му купил два папагали, кои Данило ги ставил по еден во секој кафез. Така, сега во еден кафез имало три, а во другиот два папагали.

Се разбира, Данило можел да ги распредели папагалите така што во едниот кафез ќе стави четири, а во другиот еден папагал, или во едниот сите пет, а во другиот ниту еден.

Како може Данило да распредели пет папагали во 4 или 3 кафези? Не е тешко да се види дека при ставање на 5 папагали во четири кафези, сигурно во еден кафез ќе има најмалку 2 папагали, а ако се распределат пет папагали во три кафези, тогаш можни се два случаи: или во еден кафез ќе има најмалку три папагали или во два кафези ќе има најмалку по два папагали.

Во иста ситуација се нашла и Бисера, која купила 4 книги и требало да ги стави во трите фиоки од својата работна маса. Јасно, во една фиока мора да има барем две книги.

Воопшто, при распределувањето на некои предмети, животни и слично во клетки (кафези, кутии, фиоки и слично) се забележува определена зависност, на која може да и се даде математичка формулација, на пример во следниот облик:

Нека $m>n$***. Ако распределиме*** m ***предмети во*** n ***клетки, тогаш барем во една клетка ќе имаме најмалку два предмети.***

Ова е наједноставниот облик на познатиот ***принцип на Дирихле***, кој го носи името на познатиот германски математичар Дирихле, кој прв укажал на можноста на негова примена во доста сложени задачи. Во натамошните разгледувања низ задачи ќе дадеме неколку интересни примени на овој принцип.

Задача 1. Според наставниот план во VI одделение неделно има 4 часа математика. Наставничката Лилјана, во работен ден, секоја седмица одржува 2 часа со математичката секција. Докажи, дека посетителите на секцијата во еден ден имаат барем 2 часа математика.

Решение. Посетителите на секцијата имаат 4+2=6 часа математика распоредени во пет работни денови. Од принципот на Дирихле следува дека има еден ден во седмицата во кој посетителите на секција имаат барем два часа математика. ♦

Задача 2. Во едно училиште има 367 ученици. Докажи, дека има барем двајца ученици кои имаат роденден во ист ден?

Решение. Во една година има 365 или 366 денови (ако годината е престапна), па затоа имаме 365 или 366 клетки во кои треба да распределиме 367 ученици. Според принципот на Дирихле, добиваме дека постои ден во годината во кој барем двајца ученици имаат роденден. ♦

Од разгледаните примери станува јасно, дека при примената на принципот на Дирихле најважно е правилно да избереме кои од дадените објекти ќе бидат клетки, а кои предмети што ќе ги распоредуваме.

Задача 3. Докажи, дека меѓу 4 произволни цели броеви постојат 2 чија разлика е делива со 3.

Решение. Прво, да забележиме дека при делење со 3 целите броеви даваат остаток 0, 1 или 2, односно секој цел број може да се запише во еден од следните облици: $3k, 3k+1$ или $3k+2$. Сега улогата на клетките ја имаат остатоците, кои се 3. Но броеви се 4. Така согласно принципот на Дирихле барем два од броевите даваат еднаков остаток при делење со 3, односно тие можат да се претставaт во ист облик. Јасно, нивната разлика е делива со 3. ♦

Забелешка. Непосредно обопштување на претходната задача е следната:

Да се докаже, дека меѓу $k+1$ цели броеви постојат два, чија разлика е делива со k.

Ви предлагаме самостојно да ја решите оваа задача, како и следната задача.

Задача 4. Во училиницата има 18 клупи со по две места. Во VI^4 одделение има 32 ученика. Докажи, дека има барем 14 клупи во кои седат по два ученика.

Ако внимателно го разгледаме распоредувањето на петте папагали на Данило во два кафези, ќе забележиме дека бројот на папагалите е поголем од удвоениот број на кафезите. Овој и сличните примери го даваат ***обопштениот принцип на Дирихле***, чија формулација е следната.

Ако ставиме повеќе од kn ***предмети во*** n ***клетки, тогаш во една од клетките ќе има најмалку*** $k+1$ ***предмети.***

Ова обопштување ќе го илустрираме во следните две задачи.

Задача 5. Во VII^1 одделение има 37 ученици. Докажи, дека барем 4 од нив се родени во ист месец.

Решение. Во годината има 12 месеци. Тие претставуваат $n=12$ клетки, во кои треба да распределиме 37 ученици од ова одделение, односно треба да сместиме повеќе од $3\cdot 12$ ученици и значи $k=3$. Согласно со обопштениот принцип на Дирихле добиваме дека во ист месец се родени барем 3+1=4 ученици од VII^1 одделение. ♦

Задача 6. За опремување на компјутерската училница се набавени 630 дискети, кои се спакувани во 25 кутии. Докажи, дека има кутија која содржи повеќе од 25 дискети.

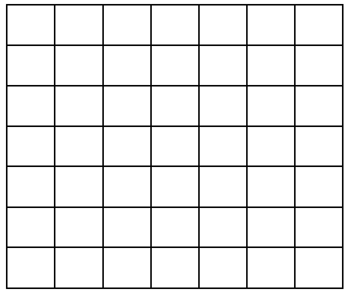
Решение. Имаме 25 кутии и ако во секоја од нив се сместени по 25 дискети, тогаш бројот на набевените дискети би бил $25\cdot 25=625$, што е помалку од 630. Значи, мора да има кутија во која има повеќе од 25 дискети. ♦

Обиди се самостојно да ја решиш следната задача.

Задача 7. Во VII^2 одделение има 30 ученици и сите правеле тест. Еден од нив, Филип, направил 13 грешки решавајќи го тестот. Останатите ученици направиле помалку грешки од Филип. Докажи, дека барем три ученици направиле ист број грешки (може да има ученици кои не направиле грешки).

Принципот на Дирихле се среќава и во таканаречениот геометриски облик. Ќе решиме еден пример.

Задача 8. Во квадрат со страна $7cm$ се распоредени 50 точки. Дали постојат две точки кои се на рстојание помало од $2cm$?



Решение. Ќе ја поделиме секоја страна на квадратот на 7 еднакви делови од по $1cm$ и ќе повлечиме прави паралелни на страните на квадратот (види цртеж). Така добиваме $7 \cdot 7 = 49$ квадрати со страна $1cm$. Тие ја имаат улогата на клетките. Во нив треба да сместиме 50 точки, па од принципот на Дирихле следува дека има квадратче во кое има барем 2 точки, на пример A и B. Тогаш, $\overline{AB} < 1+1 = 2cm$, што значи дека одговорот на поставеното прашање е позитивен. ♦

На истата идеја се сведува и решавањето на следните две задачи, кои ви предлагаме самостојно да ги решите.

Задача 9. Во правоаголен овоштарник со должина $20m$ и ширина $10m$ се засадени 201 дрво. Докажи, дека има правоаголен дел со страни $2m$ и $1m$ во кој се наоѓаат барем 3 дрва.

Задача 10. Во правоаголен овоштарник со должина $10m$ и ширина $5m$ се засадени 51 јаболкници, на кои има по 25 јаболка. Докажи, дека во овштарникот може да се најде дел со плоштина $1m^2$, во кој има најмалку 52 плодови.

На крајот ќе дадеме уште едно уточнување на принципот на Дирихле со кое се прецизира распределбата на предметите во клетките при обопштувањето. Конкретен пример веќе дадовме со сместувањето на 5 папагали во 3 кафези, а тука ќе разгледаме уште една задача.

Задача 11. Во VI^5 одделение има 26 ученици. Докажи, дека или има 4 од нив родени во ист месец, или има два месеци, во кои се родени по три ученици во од ова одделение.

Решение. Ако во 12-те месеци се родени најмногу по 2 ученика, тогаш бројот на учениците во VI^5 не е поголем од $2 \cdot 12 = 24$ ученици, а одделението има 26 ученици. Значи, останиваат два ученика кои се родени во ист месец или во два различни месеци, од што следува тврдењето на задачата. ♦

*

* *

Колку може да се направи со еден едноставен принцип. На љубопитните читатели им предлагаме да ги разгледаат и следните три задачи, како и книгата “*Занимлива математика*” од авторите К. Тренчевски, Р. Малчески и Д. Димовски во која можат да се најдат триесетина решени задачи од оваа математичка област.

Задача 12. Нека M е произволно множество од 10 природни броеви, кои се помали од 100. Докажи дека постојат две дисјунктни подмножества на множеството M со еднакви збирови на елементи.

Задача 13. Во рамнината е дадено множество A од n, ($n \geq 2$) точки, при што некои од елементите на A се поврзани со отсечки. Докажи, дека во A има барем 2 точки, кои со отсечки се поврзани со ист број точки од A.

Ќе дадеме уште една формулација на последната задача.

Задача 13*. Во група од повеќе од двајца луѓе некои се познаваат меѓу себе. Докажи, дека барем двајца од таа група имаат ист број познаници од групата.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ