Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година

ПОБОЉШАЊЕ ЈЕДНЕ ПОЗНАТЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У ТРОУГЛУ

Шефкет Арсланагић, Сарајево

Реч је о следећој неједнакости

$$R \geqslant 2r, \tag{1}$$

где су R и r полупрецници описане и уписане кружнице троугла. У математичкој литератури ова неједнакост је позната као неједнакост Ојлера[1]. Неједнакост (1) је директна последица обрасца за удаљеност центара (I) уписане кружнице и центра (O) описане кружнице троугла:

$$IO = \sqrt{R(R-2r)}, \tag{2}$$

одакле следи да мора бити $R - 2r \geqslant 0$, тј. $R \geqslant 2r$. Једнакост следи ако и само ако је троугао једнакостраничан. Више доказа једнакости (2) налази се у [1] на стр. 432. Рецимо и то да постоје разни докази неједнакости (1), неки су дати у [2] на стр. 186. Ми ћемо дати још један интересантан доказ.

Доказ. Поћи ћемо од образаца за полупречнике приписаних кружница r_a, r_b и r_c троугла:

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c},$$

где су P и s површина, односно полуобим троугла, тј. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Сада лако показујемо, користећи једнакости $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Херонов образац), $r = \dfrac{P}{s}$ и $R = \dfrac{abc}{4P}$, да важе једнакости

$$r_a r_b r_c = Ps, \tag{3}$$

и

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4Rs^2. \tag{4}$$

Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја добијамо:

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) \geqslant 8 r_a r_b r_c,$$

а одавде због (3) и (4):

$$4Rs^2 \geqslant 8Ps,$$

тј.

$$4Rs^2 \geqslant 8rs^2,$$

[1] Leonhard Euler, 1707-1783, чувени швајцарски математичар који је добар део свог живота живео и радио у Петрограду у царској Русији.

а одавде

$$R \geqslant 2r. \quad \square$$

Сада ћемо дати неколико побољшања неједнакости (1), тј. доказаћемо да важе боље (јаче) неједнакости од неједнакости (1). При томе ћемо користити неке друге неједнакости чији се докази налазе у [3] и [4].

Побољшање 1. За сваки троугао важи неједнакост

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b}. \tag{5}$$

Доказ. Увешћемо смену (о овој смени види чланак на стр. 258 у [1]):

$$a = y + z,\ b = x + z,\ c = x + y,$$

где су x, y, z неки позитивни бројеви. Сада добијамо:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} = x + y + z, \\ P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}, \\ R &= \frac{abc}{4P} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}, \\ r &= \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}, \end{aligned}$$

па имамо

$$\frac{R}{r} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4xyz} \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{z+x}{x+y} + \frac{x+y}{z+x}. \tag{6}$$

Како је $(x+y)^2 \geqslant 4xy$ и $(z+x)^2 \geqslant 4zx$, то одавде добијамо неједнакости:

$$\frac{1}{4xy} \geqslant \frac{1}{(x+y)^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4zx} \geqslant \frac{1}{(z+x)^2},$$

те након њиховог сабирања:

$$\frac{y+z}{4xyz} \geqslant \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(z+x)^2},$$

или након множења са $(z+x)(x+y)$:

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4xyz} \geqslant \frac{z+x}{x+y} + \frac{x+y}{z+x},$$

односно због (6):

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b}. \quad \square$$

Пошто је због неједнакости $A \geqslant G$:

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2,$$

то добијамо најзад:

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Дакле, неједнакост (5) је боља (јача) од неједнакости (1). Неједнакост (5) постаје неједнакост (1) само у случају $b = c$. Једнакост важи за $a = b = c$, тј. за једнакостранични троугао.

Побољшање 2. За сваки троугао важи неједнакост

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \tag{7}$$

Доказ. За овај доказ ћемо користити познате неједнакости 5.13 из [3] и 7.15 из [4] које гласе

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2 \tag{8}$$

и

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant 4R^2s^2. \tag{9}$$

Последња неједнакост после дељења са $a^2b^2c^2$ постаје:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4r^2}. \tag{9'}$$

Имамо сада на основу неједнакости Коши-Буњаковски-Шварца за $n = 3$:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \leqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

а одавде због (8) и (9′):

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \leqslant 9R^2 \cdot \frac{1}{4r^2},$$

односно

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \quad \square$$

Како је из неједнакости $A \geqslant G$ за три позитивна броја

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3,$$

то добијамо да је сада:

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqslant 1.$$

Дакле, неједнакост (7) је боља (јача) од неједнакости (1). Једнакост важи за $a = b = c$, тј. за једнакостранични троугао.

Побољшање 3. За сваки троугао важи неједнакост

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}. \tag{10}$$

Доказ. За овај доказ ћемо користити неједнакост (8) и неједнакост 3.2.24 из [4] (или 7.12 из [3]) која гласи:

$$ab+bc+ca \geqslant 18Rr. \tag{11}$$

Из (11) имамо реципрочну неједнакост:

$$\frac{1}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{1}{18Rr} \tag{11'}$$

Сада добијамо из (8) и (11′):

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leqslant \frac{9R^2}{18Rr} = \frac{R}{2r},$$

тј. тражену неједнакост. □

Како је $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ (јер је $\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geqslant 0$), то је

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geqslant 1,$$

те добијамо да је сада:

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geqslant 1.$$

Дакле, неједнакост (10) је боља (јача) од неједнакости (1). Једнакост важи за $a = b = c$, тј. за једнакостранични троугао.

Литература

[1] Arslanagić, Š. *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Arslanagić, Š. *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] Bottema, O. and oth. *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] Minculete, N. *Egalitati si inegalitati geometrice in triunghi*, Editura Eurocarpatica, Sfantu Gheorghe (Romania), 2003.