ПРОДУЖИ НИЗ III

Ратко Тошић, Нови Сад

У овом чланку дајемо решења задатака за самостални рад, постављених у претходном броју Математичког листа, у чланку „Продужи низ II".

1. Докажи да се у низу б) из задатка 8 не може појавити цифра 5.

Решење. Доказаћемо прво да се у овом низу не могу појавити две непарне цифре као суседни чланови низа. Заиста, претпоставимо да су два узастопна члана низа непарне цифре *c* и *d*. Тада могу наступити следећа два случаја:

1) Број $\overline{cd}$ је производ два узастопна члана *a* и *b* који су непарни и у низу се појављује пре посматраних чланова *c* и *d*;

2) Цифра *c* је последња цифра производа два узастопна непарна члана *a* и *b* који се у низу појављује пре чланова *c* и *d*.

Дакле, из претпоставке да су два узастопна члана *c* и *d* посматраног низа непарна следи да се и пре њих у низу појављују нека два узастопна непарна члана. Закључујемо да и међу прва три члана низа постоје два непарна, што је нетачно.

Из чињенице да у низу не постоје два узастопна члана који су непарни, следи да се у низу не може појавити цифра 9. Заиста, цифра девет може се појавити само у производу два броја ако тај производ није мањи од 90, што је немогуће јер је производ два једноцифрена броја увек мањи од 90.

Цифра 7 се у производу два једноцифрена броја различите парности може појавити само ако су то бројеви 9 и 8 ($9 \cdot 8 = 72$). Како се у низу не појављује цифра 9, не појављује се ни цифра 7.

Цифра 5 се у производу два једноцифрена броја различите парности појављује само у два случаја: $54 = 6 \cdot 9$ и $56 = 7 \cdot 8$. Међутим, у оба случаја један од чинилаца је цифра која се у посматраном низу не може појавити (9 или 7). Према томе, у низу се не може појавити ни цифра 5.

2. Напиши 2017. члан сваког од низова из задатка 10.

Решење. Лако се уочава да су сви низови периодични, одакле лако налазимо 2017. члан низа. За први и осми низ то је број 1; за трећи, шести и девети то је број 9; за други и седми то је број 16; за четврти и пети то је број 13.

3. Први члан низа је 2000000001, а сваки следећи се добија тако што се претходни сабере са неком његовом цифром различитом од 0. Перица исписује чланове низа, настојећи да сви чланови буду непарни. Да ли он може то да постигне?

Решење. Не. Доказаћемо општије тврђење: *У бесконачном низу природних бројева, сваки члан, почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са неком његовом цифром различитом од 0. Докажи да у том низу постоји паран број.*

Заиста, ако у сваком члану низа одбацимо његову последњу цифру, добијамо нови, помоћни низ, у коме је сваки члан, почев од другог, једнак претходном, или је за 1 већи од претходног. (Додавањем једноцифреног броја различитог од 0, или се повећава последња цифра, или се последа цифра мења, а претпоследња повећава за 1.) Тај помоћни низ је растући (у њему се исти број може појавити највише пет пута), па закључујемо да ће се у том новом низу појавити сви природни бројеви који нису мањи од првог члана тога низа. Између осталих, појавиће се и број чије су све цифре непарне. Следећи члан низа биће паран број. Довољно је, уствари, да цифре различите од нуле буду непарне.

У нашем случају, Перица може увек да додаје прву цифру – двојку, и на тај начин дође до броја 3000000001. Додавањем томе броју броја 1 или 3, добијамо паран број. Интересантно је да Перица на овај начин може да испише 500000000 чланова низа (сваки следећи је за 2 већи од претходног) пре него што буде принуђен да напише паран број.

4. У низу природних бројева, сваки број почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са његовом највећом цифром. Колико највише узастопних чланова тога низа могу бити непарни бројеви? (У поставци овог задатка у претходном броју МЛ омашком је изостављена реч „узастопних".)
Решење. 5. Нека су a, b, c, d, e, тим редом, узастопни непарни чланови низа. Последње цифре тим бројевима су непарне, а највеће цифре бројева a, b, c, d су парне, и према томе нису последње. При прелазу на следећи број, највећа цифра претходног се не мења (у противном, она се повећава за 1 и постаје непарна). Дакле, a, b, c, d, e је аритметички низ чија је разлика парна цифра $z \neq 0$. Бројеви $0, z, 2z, 3z, 4z$ се завршавају различитим цифрама (јер дају различите остатке при дељењу са 5). Додајући тим бројевима a, видимо да се бројеви a, b, c, d, e завршавају различитим цифрама (непарним). Следи да се један од њих завршава цифром 9. То може бити само број e (јер би у противном то била највећа цифра у неком од претходних бројева), па је следећи члан паран број. Пет узастопних непарних бројева имамо, на пример, у низу:

$$807, 815, 823, 831, 839.$$

5. У низу су исписани у растућем поретку бројеви дељиви са 9:

$$9, 18, 27, 36, \ldots$$

Испод сваког броја написан је збир његових цифара.
а) На ком месту у другом низу ће се први пут појавити број 81?
б) Шта ће се у том низу појавити пре: четири пута узастопно број 27 или број 36?
в) Шта ће се у том низу појавити пре: десет пута узастопно број 27 или број 36?
Решење. а) У другом низу број 81 ће се први пут појавити под бројем 999999999, дакле, биће 111111111. број у низу.
б) Број 36 први пут ће се појавити под бројем 9999; четири узастопна броја 27 појавиће се раније, под бројевима 3969, 3978, 3987, 3996.
в) Десет узастопних бројева 27 појавиће се испод бројева од 9909 до 9990, дакле, пре броја 36.

6. Низ бројева формира се на следећи начин: На првом месту је број 7, а даље, иза сваког броја је збир цифара његовог квадрата увећан за 1. Тако, на другом месту је број 14 јер је $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На трећем месту је број 17, итд. Који се број налази на 2017. месту?
Решење. Непосредно се израчунава првих осам чланова низа. То су:

$$7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, \ldots$$

Закључујемо да ће се, после прва четири члана низа, периодично понављати тројка бројева: 5, 8, 11. Како је $2017 - 4 = 2013 = 3 \cdot 671$, следи да ће се после прва четири члана низа, 671 пута поновити тројка бројева 5, 8, 11; дакле, на 2017. месту у низу биће последњи члан те тројке, тј. број 11.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија