Ердеш – Морделова теорема

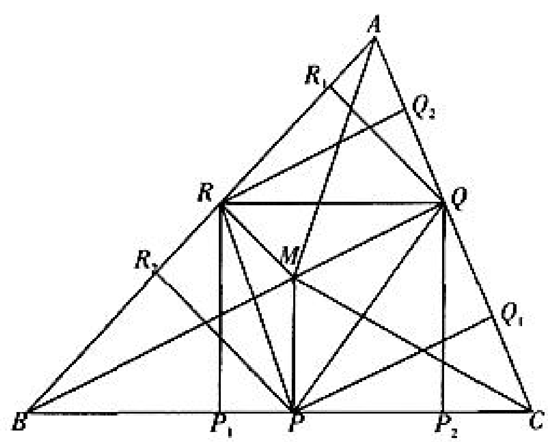
***Драгољуб С. Јовић*, Зајечар**

Теорема: Ако је M произвољна унутрашња тачка троугла ABC, а P, Q и R подножја нормала из тачке M редом на странице BC, CA и AB овог троугла, онда је

$$MA + MB + MC \geqslant 2(MP + MQ + MR).$$

Напомена: Ову теорему је 1935. године доказао мађарски математичар Пол Ердеш[†], а две године касније ову теорему је на други начин доказао и амерички математичар Мордел[‡], па се по њима ова теорема и зове Ердеш-Морделова теорема.

Доказ. Нека је M произвољна унутрашња тачка троугла ABC, а P, Q и R подножја нормала из тачке M редом на странице BC, CA и AB датог троугла ABC (види слику).



Нека су P_1P_2, Q_1Q_2 и R_1R_2 ортогоналне пројекције одговарајућих дужи RQ, PR и QP редом на странице BC, CA и AB датог троугла ABC. Тада из правоуглих трапеза P_1P_2QR, Q_1Q_2RP и R_1R_2PQ непосредно следи да је:

$$RQ \geqslant P_1P_2,\ PR \geqslant Q_1Q_2,\ QP \geqslant R_1R_2,$$

са знаком једнакости, ако и само ако је $RQ \parallel P_1P_2$, $PR \parallel Q_1Q_2$ и $QP \parallel R_1R_2$, тј. са знаком једнакости, ако и само ако је $RQ \parallel BC$, $PR \parallel CA$ и $QP \parallel AB$. Из неједнакости $RQ \geqslant P_1P_2$ произилази редом да је:

$$MA \cdot RQ \geqslant MA \cdot P_1P_2, \quad \text{тј.} \quad MA \geqslant MA \cdot \frac{P_1P_2}{RQ}$$

[†] Paul Erdös (26.03.1913-20.09.1996.)

[‡] Louis Joel Mordell (28.01.1888-12.03.1972.)

или

$$MA \geqslant MA \cdot \left(\frac{P_1P}{RQ} + \frac{PP_2}{RQ} \right).$$

Слично се добија да је

$$MB \geqslant MB \cdot \left(\frac{Q_1Q}{PR} + \frac{QQ_2}{PR} \right) \quad \text{и} \quad MC \geqslant MC \cdot \left(\frac{R_1R}{PQ} + \frac{RR_2}{PQ} \right).$$

С друге стране, у четвороуглу $BPMR$ наспрамни углови BPM и MRB су прави, па је $BPMR$ тетивни четвороугао у коме је $\sphericalangle BPR = \sphericalangle BMR$ (као периферијски углови над истим луком BR). Како је $\sphericalangle BPR = \sphericalangle P_1PR$, следи да је $\sphericalangle P_1PR = \sphericalangle BMR$, па из правоуглих троуглова P_1PR и MRB произилази да је: $\cos(\sphericalangle P_1PR) = \cos(\sphericalangle BMR)$, тј. $\frac{P_1P}{PR} = \frac{MR}{MB}$, односно

$$P_1P = \frac{PR \cdot MR}{MB}.$$

Аналогно је:

$$PP_2 = \frac{PQ \cdot MQ}{MC}, \quad Q_1Q = \frac{QP \cdot MP}{MC}, \quad QQ_2 = \frac{RQ \cdot MR}{MA},$$
$$R_1R = \frac{RQ \cdot MQ}{MA}, \quad RR_2 = \frac{RP \cdot MP}{MB}.$$

Уврстимо ли ове вредности за P_1P и PP_2 у релацију за MA, вредности за Q_1Q и QQ_2 у релацију за MB, и најзад R_1R и RR_2 у релацију за MC, биће:

$$MA \geqslant MA \left(\frac{P_1P}{RQ} + \frac{PP_2}{RQ} \right) = MA \left(\frac{PR \cdot MR}{RQ \cdot MB} + \frac{PQ \cdot MQ}{RQ \cdot MC} \right)$$

$$MB \geqslant MB \left(\frac{Q_1Q}{PR} + \frac{QQ_2}{PR} \right) = MB \left(\frac{QP \cdot MP}{PR \cdot MC} + \frac{RQ \cdot MR}{PR \cdot MA} \right)$$

$$MC \geqslant MC \left(\frac{R_1R}{QP} + \frac{RR_2}{QP} \right) = MC \left(\frac{RQ \cdot MQ}{QP \cdot MA} + \frac{RP \cdot MP}{QP \cdot MB} \right),$$

одакле, после сабирања, произилази да је:

$$\begin{aligned} MA + MB + MC \ \geqslant\ & MP \left(\frac{MB \cdot QP}{PR \cdot MC} + \frac{MC \cdot RP}{QP \cdot MB} \right) + \\ & + \ MQ \left(\frac{MA \cdot PQ}{RQ \cdot MC} + \frac{MC \cdot RQ}{QP \cdot MA} \right) + \\ & + \ MR \left(\frac{MA \cdot PR}{RQ \cdot MB} + \frac{MB \cdot RQ}{PR \cdot MA} \right). \end{aligned}$$

Како за свака два реална броја a и b, различита од нуле и истог знака, важи неједнакост $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, имамо да је:

$$\frac{MB \cdot QP}{PR \cdot MC}+\frac{MC \cdot RP}{QP \cdot MB} \geqslant 2,$$

$$\frac{MA \cdot PQ}{RQ \cdot MC}+\frac{MC \cdot RQ}{QP \cdot MA} \geqslant 2$$

и

$$\frac{MA \cdot PR}{RQ \cdot MB}+\frac{MB \cdot RQ}{PR \cdot MA} \geqslant 2,$$

последња релација постаје

$$MA+MB+MC \geqslant 2(MP+MQ+MR),$$

што је и требало доказати.

Специјално, ако је троугао ABC једнакостраничан, а тачка M центар тог троугла, омда је $MA=MB=MC=\frac{2}{3}h$ и $MP=MQ=MR=\frac{1}{3}h$, где је h висина датог једнакостраничног троугла ABC, па је: $MA+MB+MC=2(MP+MQ+MR)$. Може се показати да знак једнакости важи ако и само ако је трогао ABC једнакостраничан, а тачка M центар тог троугла.

* * *

Задатак. Ако је M произвољна унутрашња тачка троугла ABC, а P, Q и R подножја нормала из тачке M редом на странице BC, CA и AB овог троугла, онда је

$$MA \cdot MB \cdot MC \geqslant 8(MP \cdot MQ \cdot MR).$$

* * *

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година