Ристо Малчески, Скопје
Здравко Цветковски, Скопје

РЕШАВАЊЕ НА КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЧИ СО ДОВЕДУВАЊЕ ДО ПРОТИВРЕЧНОСТ

Еден од методите кој е доста погоден за решавање на некои видови комбинаторни задачи е: со правилно заклучување тргнувајќи од дадена претпоставка p да добиеме заклучок q, кој очигледно не е точен, т.е. исказот $\neg q$ е точен. Тогаш, имајќи го предвид законот за контрапозиција $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ и фактот дека импликацијата $p \Rightarrow q$ е точна, заклучуваме дека и импликацијата $\neg q \Rightarrow \neg p$ е точна. Но, исказот $\neg q$ е точен, па затоа мора и исказот $\neg p$ да е точен.

Задача 1. Петнаесет рибари уловиле вкупно 100 риби. Докажи дека постојат двајца од нив кои уловиле еднаков број на риби.

Решение. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека секој рибар уловил различен број на риби од преостанатите рибари. Тогаш најмалиот број на риби што го уловиле сите петнаесет рибари е поголем или еднаков на $0+1+2+...+14=105$, што противречи на условот дека рибарите вкупно уловиле 100 риби.

Од добиената противречност следува дека постојат најмалку двајца рибари кои што уловиле еднаков број на риби. ■

Задача 2. Дали е можно рабовите на коцка да се нумерираат со броевите 1,2,...,12 така што збировите на броевите кои се запишани на рабовите кои излегуваат од едно исто теме ќе бидат еднакви за сите темиња на коцката?

Решение. Нека претпоставиме дека такво нумерирање постои и нека вредноста на тие збирови е $s \in \mathbb{N}$. Тогаш збирот на сите збирови (по сите темиња) е $8s$, во овие збирови секој број од 1 до 12 се јавува по два пати (секој раб има две крајни точки). Затоа

$$8s = 2(1+2+...+12) \text{ т.е. } 8s = 2 \cdot \tfrac{12 \cdot 13}{2} = 12 \cdot 13$$

од каде следува $s = \frac{39}{2} \notin \mathbb{N}$, што противречни на $s \in \mathbb{N}$. Според тоа, бараното нумерирање не постои. ■

Задача 3. Дадени се 20 различни природни броеви помали од 70. Да ги разгледаме сите позитивни разлики на паровите од овие броеви. Докажи дека меѓу тие разлики постојат барем четири еднакви.

Решение. Нека се дадените броевите $a_1 < a_2 < ... < a_{20}$. Ќе докажеме дека меѓу разликите

$$a_{20} - a_{19},\ a_{19} - a_{18}, ...,\ a_2 - a_1 \tag{1}$$

подтојат барем четири еднакви. Имаме 19 разлики и нивниот збир е

$$a_{20} - a_1 \leq 69 - 1 = 68 \qquad (2).$$

Нека претпоставиме дека меѓу разликите (1) не постојат четири еднакви. Тогаш нивниот збир ќе биде поголем или еднаков на

$$3(1+2+3+4+5+6)+7 = 70,$$

што противречи на (2). Конечно, од добиената противречност следува дека меѓу разгледуваните разлики има барем четири еднакви, што значли дека и меѓу сите разлики има барем четири еднакви. ■

Задача 4. Дадени се $2n$ различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ помали или еднакви на $n^2, (n > 2)$. Докажи дека постојат три разлики $a_i - a_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., 2n\}, i \neq j$ кои меѓусебно се еднакви.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_1 < a_2 < ... < a_{2n}$. Ќе докажеме дека меѓу разликите

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ ...,\ a_{2n} - a_{2n-1} \tag{1}$$

има најмалку три еднакви. Нека претпоставиме дека меѓу овие разлики нема три еднакви. Тогаш имаме

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_1 &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{2n} - a_{2n-1}) \\ &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + ... + (n-1) + (n-1) + n \\ &= n(n-1) + n = n^2, \end{aligned}$$

т.е. $a_{2n} \geq n^2 + a_1 > n^2$, што противречи на условот на задачата. Конечно, од добиената противречност следува дека меѓу разликите (1) има три еднакви, што значи дека и меѓу сите разлики има три еднакви. ■

Задача 5. Дадени се седум различни природни броеви не поголеми од 1706. Докажи дека постојат три од нив, на пример a, b, c такви што $a < b + c < 4a$.

Решение. Нека дадените броеви се $a_1, a_2, ..., a_7$. Без губење на општоста можеме даземеме дека $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_7 \le 1706$.

Ако за некој $i = 2,3,...,6$ важи $a_{i+1} < 4a_i - a_1$, тогаш $a_i < a_1 + a_{i+1} < 4a_i$ и задачата е решена.

Затоа нека претпоставиме дека $a_{i+1} \ge 4a_i - a_1$, за секој $i = 2,3,...,6$. Тогаш имаме

$$a_3 \ge 4a_2 - a_1 \ge 4(a_1 + 1) - a_1 = 3a_1 + 4$$
$$a_4 \ge 4a_3 - a_1 \ge 4(3a_1 + 4) - a_1 = 11a_1 + 16$$
$$a_5 \ge 4a_4 - a_1 \ge 4(11a_1 + 16) - a_1 = 43a_1 + 64$$
$$a_6 \ge 4a_5 - a_1 \ge 4(43a_1 + 64) - a_1 = 171a_1 + 256$$
$$a_7 \ge 4a_6 - a_1 \ge 4(171a_1 + 256) - a_1 = 683a_1 + 1024 \ge 1707 ,$$

што противречи на $a_7 \le 1706$. Од добиената противречност следува дека постои $i \in \{2,3,...,6\}$ таков што $a_{i+1} < 4a_i - a_1$, т.е. $a_i < a_1 + a_{i+1} < 4a_i$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 6. Множеството природни броеви $\{1,2,...,9\}$ е разбиено на три групи, т.е. е поделено на подмножества кои меѓу себе се дисјунктни, а нивната унија е множеството $\{1,2,...,9\}$. Докажи дека постои барем една група чиј производ на броеви е помал од 72.

Решение. Нека P_1 е производот на броевите од првата група, P_2 е производот на броевите од втората група и P_3 е производот на броевите од третата група.

Нека го претпоставиме спротивно, т.е. дека $P_1, P_2, P_3 \ge 72$. Тогаш имаме

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 9 = P_1 P_2 P_3 \ge 72^3 \;\Leftrightarrow\; 35 \ge 36 ,$$

што е противречност .

Од добиената противречност следува дека производот на броевите во барем една од трите групи е помал од 72. ■

Задача 7. Дадени се $2n$ топчиња, нумерирани со броевите $1,2,...,2n$. Тие се сместени $2n$ кутии, по едно топче во кутија, исто така нумерирани со броевите $1,2,...,2n$. Докажи дека постојат барем две топчиња такви што разликата на збировите на редните броеви на топчињата и редните броеви на кутиите во кои се наоѓаат е делива со $2n$.

Решение. Ќе докажеме дека постојат два збира кои даваат ист остаток по при делење со $2n$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека такви две збира не постојат. Бидејќи имаме $2n$ збирови, мора сите да даваат различни остатоци при делење со $2n$, т.е. се добиваат сите остатоци $0,1,2,...,2n-1$.

Според тоа, збирот на сите такви збирови при делење со $2n$ дава остаток кој е еднаков на остатокот кој се добива при делење со $2n$ на збирот

$$0+1+...+2n-1=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)=2n^2-n,$$

а тоа е бројот n. Од друга страна збирот на сите такви збирови е

$$2(1+2+...+2n)=2\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}=2n(2n+1)$$

и овој број е делив со $2n$, што противречи на претпоставката.

Конечно, од добиената противречност следува постојат два збира кои даваат ист остаток по при делење со $2n$, од што следува тврдењето на задачата. ■

Задача 8. Во секоја клетка на табла со димензии 25×25 е запишан 1 или -1. Нека a_i е производот на броевите во i-иот ред, а b_j е производот на броевите во j-тата колона. Докажи дека $a_1+b_1+...+a_{25}+b_{25}\neq0$.

Решение. Јасно

$$a_1a_2\cdot...\cdot a_{25}=b_1b_2\cdot...\cdot b_{25}, \tag{1}$$

(производ на сите броеви запишани на таблата). Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)...+(a_{25}+b_{25})=0.$$

Тогаш меѓу збировите $a_i+b_i, i=1,2,...,25$ има еднакви на 2, еднакви на -2 и еднакви на 0. Без ограничување на општоста може да земеме дека

$a_i+b_i=2$, за $i=1,2,...,k$,

$a_i+b_i=-2$, за $i=k+1,k+2,...,2k$ и

$a_i+b_i=0$, за $i=2k+1,2k+2,...,25$.

Според тоа, $a_i=b_i=1$, за $i=1,2,...,k$; $a_i=b_i=-1$, за $i=k+1,k+2,...,2k$; а ако $a_i=1$ за $i=2k+1,...,2k+m$ и $a_i=-1$ за $i=2k+m+1,...,25$, тогаш $b_i=-1$ за $i=2k+1,...,2k+m$ и $b_i=1$ за $i=2k+m+1,...,25$.

Од претходните разгледувања следува дека меѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{25}$ има $k+m$ позитивни и $25-(k+m)$ негативни, а меѓу броевите $b_1,b_2,...,$

b_{25} има $k+m$ негативни и $25-(k+m)$ позитивни. Понатаму, броевите $k+m$ и $25-(k+m)$ се со различна парност, од што следува дека производите $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{25}$ и $b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_{25}$ се со различни знаци, што противречќи на равенството (1).

Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ■

Задача 9. Во група од 20 луѓе, постојат 51 различен пар на познаници. Докажи дека во оваа група луѓе постои човек кој има најмалку 6 познаници.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека секој човек во групата има најмногу 5 познаници. Тогаш бројот на парови познаници е најмногу $\frac{20\cdot5}{2}=50$, контрадикција. Со ова задачата е решена. ■

Задача 10. Десет ученици на олимпијада по математика решиле 35 задачи. Познато е дека Филип решил точно една задача, Ана точно две задачи и Ѓорѓи решил точно три задачи. Докажи дека постои ученик кој решил најмалку пет задачи.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека не постои ученик кој решил 5 или повеќе задачи. Тогаш секој ученик решил 0, 1, 2, 3 или 4 задачи. Најголемиот број задачи што можеле да ги решат учениците е

$$1+2+3+7\cdot4=34,$$

што противречи на тоа дека учениците решиле 35 задачи.

Од добиената противречност следува дека постои ученик кој решил најмалку 5 задачи. ■

Задача 11. Во секоја клетка на дадена конечна табла запишани се броеви така што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите запишани во нему соседните клетки (две клетки се соседни ако имаат заедничка страна). Ако сите броеви на таблата се различни меѓу себе, да се докаже дека најголемиот број на таблата е сместен во некоја клетка за која најмалку една страна лежи на страната на таблата (рабна клетка).

Решение. Да претпоставиме дека најголемиот број a што е запишан на таблата не се наоѓа во рабна клетка. Нека броевите запишани во соседните клетки на бројот a се a_1, a_2, a_3 и a_4 тогаш $a_1,a_2,a_3,a_4<a$ односно $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}<a$, што противречни на $a=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$. Од добиената противречност следува дека бројот a е запишан во рабна клетка. ■

Задача 12. На кружница запишани се 8 броеви. Потоа меѓу секои два од нив запишан е нивниот збир, а почетните осум броеви се избришани. Дали е можно по оваа постапка на кружницата да останале броевите 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18, запишани во овој редослед.

Решение. Нека го претпоставиме спротивно, т.е. нека по опишаната постапка на кружницата останале броевите 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18. Нека почетните броеви се a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 и a_8, при што бројот 12 е збир на броевите a_1 и a_2. Тогаш, од една страна имаме

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8) \\ &= 12+14+16+18=60, \end{aligned}$$

а од друга страна добиваме

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 &= (a_8+a_1)+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7) \\ &= 11+13+15+17=56, \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противреќност следува дека со оваа постапка, без разлика кои се почетните броеви, не е можно на кружницата да останале броевите 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18, запишани во овој редослед. ■

Задача 13. Дали е можно од произволно избрани 10 парни двоцифрени броеви да се изберат два пара броеви такви што нивните разлики се еднакви.

Решение. Да претпоставиме дека постојат 10 парни броеви такви што по парови сите разлики се различни меѓу себе. Да ги подредиме дадените броеви во растечки редослед. Тогаш разликите меѓу два соседни броја се исто така различни и збирот на овие разлики е поголем или еднаков на $2+4+...+18=90$.

Бидејќи најмалиот број е поголем или еднаков на 10 добиваме дека најголемиот број е поголем или еднаков на $10+90=100$, што што е контрадикција со условот дека избраните броеви се двоцифрени.

Конечно, од добиената противречност следува дека од произволно избрани 10 парни двоцифрени броеви може да се изберат два пара броеви такви што нивните разлики се еднакви. ■

Задача 14. Шаховска табла е разделена на 13 правоаголници со страни паралелни на страните на таблата. Дали овие правоаголници можат да бидат сите различни меѓу себе? (Квадратот е правоаголник.)

Решение. Нека претпоставиме дека сите правоаголници се различни меѓу себе. Тогаш лесно се гледа дека тринаесетте правоаголниците кои покриваат најмал број клетки се:

$$1\times 1,\ 1\times 2,\ 1\times 3,\ 1\times 4,\ 2\times 2,\ 1\times 5,\ 1\times 6,$$
$$2\times 3,\ 1\times 7,\ 1\times 8,\ 2\times 4,\ 3\times 3 \text{ и } 2\times 5.$$

Според тоа, најмалиот број клетки кои го покриваат овие правоаголници е еднаков на

$$1+2+3+4+4+5+6+6+7+8+8+9+10=73,$$

што противречи на фактот дека таблата има 64 клетки.

Конечно, од добиената противречност следува дека меѓу делбените правоаголници мора да има еднакви.♦

Задача 15. Дадени се 10 отсечки чии должини се поголеми од 1 и се помали од 55. Доокажи дека меѓу овие 10 отсечки, постојат три од кои може да се формира триаголник.

Решение. Нека должините на отсечките се $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Без губење на општоста можеме да земеме дека

$$1 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_{10} < 55.$$

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека не постојат три отсечки од кои може да се формира триаголник. Тогаш имаме

$$a_3 \ge a_1 + a_2 > 1+1=2,\ a_4 \ge a_2 + a_3 > 1+2=3,\ a_5 \ge a_4 + a_3 > 2+3=5,$$
$$a_6 \ge a_5 + a_4 > 3+5=8,\ a_7 \ge a_6 + a_5 > 8+5=13,\ a_8 \ge a_7 + a_6 > 13+8=21,$$
$$a_9 \ge a_8 + a_7 > 21+13=34 \text{ и } a_{10} \ge a_9 + a_8 > 34+21=55,$$

што противречи на условот на задачата.

Конечно од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ■

Задача 16. Нека отсечката AB припаѓа на правата p. На правата p произволно се означени 45 точки кои не припаѓаат на отсечката AB. Дали може, збирот од растојанијата на овие точки до точката A, да е еднаков со збирот на растојанијата на овие точки до точката B?

Решение. Нека X е произволна точка од дадените 45 точки. Тогаш важи $\overline{AX} - \overline{BX} = \pm\overline{AB}$. Да претпоставиме дека разгледуваните збирови на растојанијата се еднакви. Тогаш при некое разместување на знаците $+$ и $-$ важи $\underbrace{\pm\overline{AB}\pm\overline{AB}\pm...\pm\overline{AB}}_{45}=0$, што противречи на тоа дека збир на непарен број собирци еднакви по апсолутна вредност не може да биде еднаков на

0. Конечно, од добиената противречнос следува дека разгледуваните збирови не може да се еднакви. ■

Задача 17. На круг со радиус 1, произволно се распоредени 7 точки така што растојанието меѓу било кои две од дадените точки не е помало од 1. Докажи дека центарот на кругот е една од овие 7 точки.

Решение. Нека претпоставиме дека центарот O не е една од овие 7 точки. Тогаш постојат две од овие точки, P и Q такви што $\measuredangle POQ < 60^\circ$ (Зошто?). Да го разгледаме триаголникот OPQ. Од $\measuredangle POQ < 60^\circ$ следува $\measuredangle OPQ > 60^\circ$ или $\measuredangle OQP > 60^\circ$. Заради симетрија можеме да земеме дека $\measuredangle OPQ > 60^\circ$. Бидејќи во триаголникот OPQ спроти поголем агол лежи поголема страна добиваме дека $1 \leq \overline{PQ} < \overline{OQ} \leq 1$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека центарот O е една од дадените 7 точки. ■

Задача 18. Должините на страните на еден конвексен четириаголник се помали од 24. Нека P е произволна внатрешна точка за четириаголникот. Докажи дека постои теме на четириаголникот такво што растојанието од тоа теме до точката P е помало од 17.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека сите четири растојанија од P до темињата на четириаголникот се поголеми или еднакви на 17. Еден од аглите $\measuredangle APB$, $\measuredangle BPC$, $\measuredangle CPD$ ил $\measuredangle DPA$ е поголем или еднаков на 90° (зошто?). Нека $\measuredangle APB \geq 90^\circ$. Тогаш

$$\overline{AB}^2 \geq \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$$

(зошто?) , т.е. имаме

$$24^2 > \overline{AB}^2 \geq \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 \geq 2\cdot 17^2 \;\Leftrightarrow\; 576 > 578,$$

што не е можно.

Конечно, од добиената противречнос следува тврдењето на задачата. ■

Задача 19. Во група од 5 луѓе, меѓу било кои тројца постојат двајца кои се познаваат меѓу себе и двајца кои не се познаваат меѓу себе. Докажи дека овие 5 луѓе можат да се распоредат околу такалезна маса така што секој соседен пар се познава меѓу себе.

Решение. Нека со A, B, C, D и E ги означиме петте луѓе. Ќе докажеме дека секој од нив познава точно двајца од останатите.

Нека претпоставиме дека A познава барем тројца од останатите, т.е. нека A ги познава B, C и D. Да ги разгледаме тројките составени од A, B, C и D во кои учествува A, т.е. тројките $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$. Од условот следува дека B и C, B и D, и C и D не се познаваат меѓу себе, што значи дека тројката $\{B, C, D\}$ не содржи пар познаници, а тоа е противречност Значи A познава најмногу двајца од останатите.

Ако A познава точно еден од останатите, т.е. A е познаник со B тогаш да ги разгледаме тројките $\{A, C, D\}$, $\{A, C, E\}$, $\{A, D, E\}$. Бидејќи A не се познава со C, D и E, добиваме дека C и D, C и E, D и E, се познаваат меѓу себе. Според тоа, во тројката $\{C, D, E\}$ сите се познаваат меѓу себе, што повторно е противречност. Значи A мора да има најмалку двајца познаници.

Нека A е познаник со B и E. Тогаш A не се познава со C и D. Ако ја разгледаме тројката $\{A, C, D\}$, следува дека C и D се познаваат меѓу себе. Ако пак ја разгледаме тројката $\{A, B, E\}$ следува дека B и E не се познаваат меѓу себе. Значи B го познава A и познава еден од C и D. Без губење на општоста можеме да земеме дека B го познава C. Тогаш B не ги познава ниту D ниту E. Според ова D и E мора да се познаваат.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бараниот распоред е $A-B-C-D-E$. ■