Сојузен натпревар 1980

Седмо одделение

1. Шестина од вкупното количество на некоја стока е продадено со заработувачка од 20%, а половина од вкупното количество од истата стока е продадено со загуба од 10%. Со колку проценти заработувачка треба да се продаде остатокот од стоката за да се покрие загубата?

   Решение. Нека k вкупното количество стока, а c е планираната цена. Од условот на задачата слеува равенката

$$\frac{k}{6}\cdot 0{,}2c+\frac{k}{3}\cdot xc=\frac{k}{2}\cdot 0{,}1c,$$

   каде x е бараниот процент. Решение на оваа равенка е $x=0{,}05=5\%$.

2. Даден е број n чии цифри се 60 седумки и определен број нули. Докажи дека $\frac{n-27}{3}$ е цел број, а $\frac{n+27}{9}$ не е цел број.

   Решение. Збирот на цифрите на бројот n е $60\cdot 7=420$. Според тоа, бројот n е делив со 3, па затоа и бројот $n-27$ е делив со 3. Бидејжи бројот 420 не е делив со 9, заклучуваме дека n не е делив со 9, што значи дека бројот $n+27$ не е делив со 9.

3. Определи природни броеви $n_1,n_2,...,n_k$, $k>1$ (кои не мора да се различни меѓу себе) такви што

$$n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k=1988 \text{ и } n_1+n_2+...+n_k=1988.$$

   Колку различни решенија има?

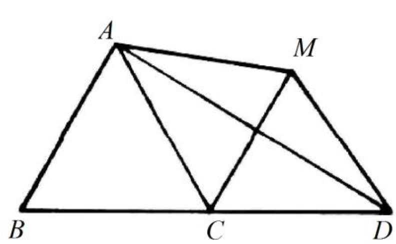
   Решение. Бидејќи $1988=2\cdot 2\cdot 7\cdot 71$ и $2+2+7+71=82$, едно решение може да биде

$$n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k=2\cdot 2\cdot 7\cdot 71\cdot 1\cdot 1 ...\cdot 1 \text{ (1906 единици)}.$$

4. На симетралата на надворешниот агол кај темето C на триаголникот ABC е земена произволна точка M. Докажи дека

$$MA+MB>AC+BC.$$

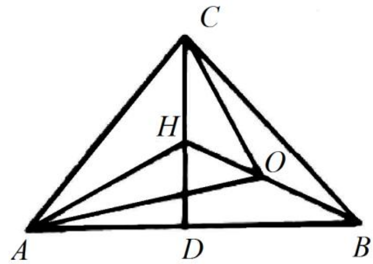
   Решение. Нека D е точка на продолжението на страната BC преку темето C таква што $CD=CA$, што значи симетрична на темето A во однос на симетралата CM. Јасно,



триаголниците ACM и DCM се складни, па затоа $DM = AM$. Според тоа,

$$MA + MB = MD + MB > BD = BC + CD = AC + BC.$$

5. Во рамнокрак триаголник $ABC, AC = BC$, во кој $\measuredangle ACB = 80^\circ$ дадена е точка O таква што $\measuredangle BAO = 10^\circ$ и $\measuredangle ABO = 30^\circ$. Определи го $\measuredangle ACO$.



Решение. Нека H е пресечната точка на висината CD на триаголникот и правата BO (цртеж десно). Триаголникот ABH е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle HAB = \measuredangle HBA = 30^\circ.$$

Според тоа,

$$\measuredangle CAH = 20^\circ = \measuredangle HAO.$$

Освен тоа,

$$\measuredangle ACD = 40^\circ \text{ и } \measuredangle AOH = \measuredangle OAB + \measuredangle OBA = 40^\circ.$$

Триаголниците AOH и ACH имаат два еднакви агли и заедничка страна AH, па затоа се складни. Од складноста следува $AO = AC$, што значи дека триаголникот AOC е рамнокрак и како $\measuredangle CAO = 40^\circ$ добиваме $\measuredangle ACO = 70^\circ$.

Осмо одделение

1. Два брода тргнуваат од местата A и B во пресрет еден кон друг. Секој од нив кога ќе стигне во едното место се враќа назад во другото место. Првиот пат бродовите се сретнале на $5km$ од A, а вториот пат на $3km$ од B. Определи го растојанието од A до B.

Решение. Растојанието од A до B да го означиме со x, брзините на бродовите со v' и v'', времето до првата средна со t', а времето од првата до втората среба со t''. Од условот на задачата добиваме

$$v't' = 5, v''t' = x - 5, v't'' = 3 + (x - 5), v''t'' = 5 + (x - 3).$$

Ако ги помножиме првата и четвртата равенка и втоарата и третата равенка, добиваме

$$5(x + 2) = v'v''t't'' = (x - 5)(x - 2), \text{ т.е. } x^2 - 12x = 0.$$

Но, $x > 0$, па од последната равенка следува $x = 12$.

2. Дадени се линеарните функции

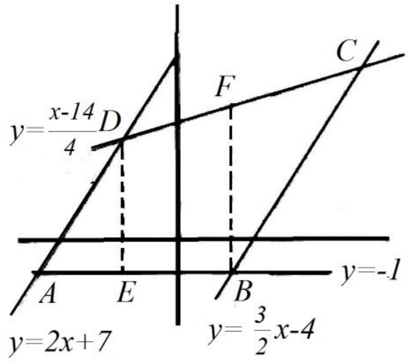
$$y=-1,\ y=\tfrac{3}{2}x-4,\ y=\tfrac{1}{4}x-\tfrac{7}{2}\ \text{и}\ y=2x+7.$$

Определи ги координатите на темињата и плоштината на правилниот четириаголник кои ги ограничуваат графиците на дадените функции.

Решение. Со A,B,C,D да ги означиме споменатите темиња како на цртежот десно. Имаме: $A(-4,-1), B(2,-1), C(6,5), D(-2,3)$

Баравата плоштина е

$$P=\frac{AE\cdot ED}{2}+\frac{(ED+BF)\cdot EB}{2}+\frac{BF\cdot h_{BF}}{2}$$
$$=\frac{2\cdot 4}{2}+\frac{(4+5)\cdot 4}{2}+\frac{5\cdot 4}{2}=32.$$



3. Докажи дека разликата на бројот кој е запишан со 100 единици и бројот кој е запишан со 50 двојки е квадрат на природен број.

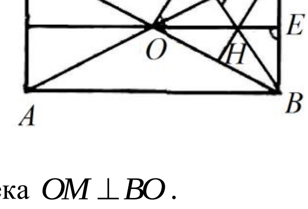
Решение. Имаме:

$$\underbrace{11..1}_{100}-\underbrace{22..2}_{50}=\tfrac{1}{9}(10^{100}-1)-\tfrac{2}{9}(10^{50}-1)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10^{100}-1-2\cdot 10^{50}+2)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10^{100}-2\cdot 10^{50}+1)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10^{50}-1)^2=(\tfrac{10^{50}-1}{3})^2.$$

Бидејќи бројот $10^{50}-1$ е делив со 9, тој е делив со 3, со што тврдењето е докажано.

4. Во правоаголникот $ABCD$ точката M припаѓа на страната CD и важи $DM=2\cdot CM$, а O е пресекот на дијагоналите. Правите AC и BM се сечат под прав агол. Определи го $\measuredangle BOM$.

Решение. Нека E е средината на страната BC. Тогаш $OE\perp BC$. Според тоа, точката H е ортоцентар на триаголникот OBC, па затоа $CH\perp OB$. Меѓутоа OH е средна линија на триаголникот DBM, па затоа $OH=\frac{1}{2}DM=MC$. Затоа четириаголникот $OHCM$ е паралелограм, па оттука следува дека $OM\perp BO$.

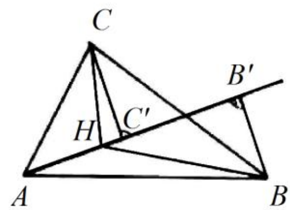


5. Даден е триаголник ABC и точка M во неговата внатрешност. Докажи дека

$$AM\cdot BC+BM\cdot AC+CM\cdot AB\geq 4P, \qquad (1)$$

каде P е плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Нека B' и C' се подножјата на нормалите соодветно повлечени од B и C на правата AM (цртеж десно). Тогаш



$$P_{ABM}=\frac{1}{2}AM\cdot BB' \text{ и } P_{ACM}=\frac{1}{2}AM\cdot CC',$$

па затоа

$$\begin{aligned}P_{ABM}+P_{ACM}&=\frac{1}{2}AM\cdot(BB'+CC')\\&\leq\frac{1}{2}AM\cdot BC.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{ACM}+P_{BCM}\leq\frac{1}{2}CM\cdot AB \text{ и } P_{ABM}+P_{BCM}\leq\frac{1}{2}BM\cdot AC.$$

Сега, ако ги собереме последните три неравенства, по средувањето го добиваме неравенстsвото (1).